

Численное моделирование уравнения теплопроводности в слоистой области и экспериментальное исследование его методической погрешности

А.В. Раку¹, А.С. Широқанев^{1,2}, А.А. Дегтярев¹, Н.Ю. Ильясова^{1,2}

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34а, Самара, Россия, 443086

²Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

Аннотация

В данной работе была исследована методическая погрешность разностного решения уравнения теплопроводности в слоистой области, рассчитанного на основе разностной схемы, полученной с помощью интегро-интерполяционного метода. Этот метод позволил получить консервативную схему, которая не обладает ложной сходимостью. Было доказано, что она действительно сходится и результаты исследования сходимости совпали с теоретически ожидаемыми.

Ключевые слова

Уравнение теплопроводности, интегро-интерполяционный метод, погрешность

1. Введение

Исследование погрешности разностного решения является важной задачей при разработке программ численного моделирования различных процессов. На практике часто возникает вопрос о сходимости методической погрешности приближённых решений, найденных конечно-разностным методом [1, 2], к решению исходной краевой задачи.

2. Численное моделирование уравнения теплопроводности в слоистой области

Задача о распространении тепла в неоднородной среде имеет несколько важных приложений, таких как, например, офтальмология. К примеру, при лечении диабетической ретинопатии лазерное излучение преобразуется в тепловое, что вызывает терапевтический эффект. Моделирование может помочь оценить температуры, вызываемые воздействием лазера на глазное дно. Для неоднородной среды краевая задача теплопроводности будет основываться на однородном уравнении теплопроводности [1]:

$$c(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Данное уравнение имеет разрывные коэффициенты, что отрицательно сказывается на сходимости. Поэтому при построении разностной схемы будем исходить из интегральной формы уравнения баланса [2] и использовать интегро-интерполяционный метод [1], чтобы получить консервативную разностную схему.

3. Проведение вычислительного эксперимента для определения фактической скорости сходимости разностной схемы

Для консервативной схемы важно исследовать погрешность, чтобы показать, что схема действительно обладает сходимостью. Исследование погрешности будем проводить в равномерной и в среднеквадратической нормах [3]. В таблице 1 приведены результаты вычислительных экспериментов по определению значений величин погрешности на измельчающихся сетках. Результаты представлены в СКО норме.

Таблица 1

Результат исследования погрешности при измельчении сетки по пространственной координате

l	K	$\Delta u_{h_t h_x}^{SKO}$	$m_{h_t h_x}^{SKO}$
16	40000	1,0903	1,6322
32	40000	0,668	1,6916
64	40000	0,3949	1,8531
128	40000	0,2131	1,925
256	40000	0,1107	

Из таблицы 1 видно, что при измельчении шага по пространственной координате величина $m_{h_t h_x}^{SKO}$ приближается к теоретическому значению.

4. Заключение

В ходе выполнения работы с помощью интегро-интерполяционного метода была построена разностная схема для уравнения теплопроводности, в связи с разрывными коэффициентами. Полученная с помощью данного метода схема является консервативной и обладает равномерной сходимостью, при этом измельчение сетки в 2 раза способствует уменьшению погрешности примерно в 2 раза, что соответствует теоретическому значению.

5. Благодарности

Результаты исследования были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (Проект № 0777-2020-0017), при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-29-01135, № 19-31-90160.

6. Литература

- [1] Лобанов, А.И. Численные методы решения уравнений в частных производных / А.И. Лобанов, И.Б. Петров [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://intuit.ru/goods_store/ebooks/8344 (19.11.2020).
- [2] Дегтярев, А.А. Метод конечных разностей: электрон. учеб. пособие / А.А. Дегтярев. – Самара: Изд-во СГАУ, 2011. – 83 с.
- [3] Дегтярев, А.А. Применение метода вычислительного эксперимента для исследования влияния параметров правой части нелинейного уравнения теплопроводности на его решение / А.А. Дегтярев, М.В. Силакова // Международная конференция с элементами научной школы для молодежи (ПИТ-2010). – Самара: СГАУ, 2010. – С. 410-414.