

## Динамические особенности систем гистерезисно связанных осцилляторов Ван дер Поля

М.Е. Семенов<sup>1,2,3</sup>, П.А. Мелешенко<sup>1,3</sup>, А.М. Соловьев<sup>4</sup>, О.О. Решетова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ВУНЦ ВВС ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Старых Большевиков 54А, Воронеж, Россия, 394064

<sup>2</sup>ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Единая геофизическая служба Российской академии наук», Ленина 189, Обнинск, Россия, 249035

<sup>3</sup>Воронежский государственный университет, Университетская пл. 1, Воронеж, Россия, 394018

<sup>4</sup>АО «Концерн «Созвездие», Плехановская 14, Воронеж, Россия, 394018

**Аннотация.** В работе исследуется физически реализуемая радиотехническая модель генератора ван дер Поля с гистерезисной связью, находящегося под воздействием гармонической силы. Предложен алгоритм управления хаотической динамикой осциллятора. На основе анализа численных результатов бифуркационных диаграмм и соответствующей динамики показателей Ляпунова установлена эффективность регулизирующей роли гистерезисного звена.

### 1. Введение

Уравнение Ван дер Поля – одно из важных уравнений теории колебаний, посредством которого описывается универсальный механизм возникновения автоколебаний через бифуркацию Андронова–Хопфа, возможность появления как квазигармонических, так и релаксационных колебаний.

Число примеров автоколебательных систем, поведение которых моделируется при помощи уравнения Ван дер Поля, достаточно велико – различные системы в радиотехнике, такие триодный генератор и генератор на туннельном диоде, моделирование динамики кардиоритмов [1], а также разнообразные приложения в робототехнике, в частности, модели поворачивающегося робота[2]. Системы связанных осцилляторов ван дер Поля вполне успешно применялись для анализа сложных систем, в том числе и с распределенными параметрами таких как тропические циклоны, где было использовано свойство осцилляторов генерировать автоколебательные режимы. Это же свойство было использовано при описании ионизационных волн[3], а также в широком спектре задач, связанных с построением процессов, протекающих в человеческом организме. При этом в качестве основного метода исследования полученной системы использовался метод основанный на переходе к укороченным уравнениям (их часто называют уравнениями Ландау–Стюарта). Такой подход возможен, когда управляющий параметр, величина связи и частотная расстройка осцилляторов являются малыми. В этом случае становится возможным применение метода медленно меняющихся амплитуд.

Известно, что в системе связанных осцилляторов ван дер Поля могут реализовываться в том числе и хаотические режимы движения [4]. При этом хаос наблюдаемый в указанной системе является гиперболическим[5], то есть устойчивым по отношению к малым возмущениям

параметров системы. Одной из классических задач, связанных с хаотической динамикой является задача управления. В этой связи отметим наиболее известные методы управления хаотической динамикой [6-8], в которых используются различные модификации принципа обратной связи в сочетании с методами теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Программное управление хаотической динамикой основано на явлении вынужденной синхронизации, когда система «подстраивается» под периодическое воздействие, осуществляемое на систему извне. Один из перспективных методов управления хаотической динамикой основан на использовании гистерезисных преобразователей в контуре управления, формируемого по принципу обратной связи. Известно, что гистерезисные операторы на каждом такте колебаний абсорбируют энергию пропорциональную площади петли, в этом смысле возможность гистерезисного управления хаотическими системами представляется интересной и значимой.

Гистерезисные преобразователи в управляющих элементах рассматривались в работах [9-11], в качестве составляющих колебательных систем в [12-14]. Отметим, что при описании моделей гистерезиса традиционно используются два подхода: первый из них основан на операторной трактовке в терминах преобразователей с пространством состояний и входно-выходными соответствиями [15], второй основан на феноменологическом подходе, в котором гистерезисная петля описывается посредством дифференциальных и алгебраических соотношений – наиболее популярной в этом смысле является модель Боука-Вена [16].

## 2. Осциллятор ван дер Поля с периодическим возмущением

Осциллятор ван дер Поля в присутствии периодического внешнего воздействия с периодом близким к периоду автономных колебаний описывается уравнением вида:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t), \quad (1)$$

$$\dot{x}(0) = x_0, x(0) = x_1.$$

где  $\lambda$  – управляющий параметр,  $\omega_0$  – частота собственных колебаний осциллятора,  $\omega$  – частота внешнего сигнала,  $A$  – его амплитуда.

Для динамики поведения системы (1) характерно следующее явление: в определенном интервале частоты внешней силы колебания системы синхронизируются с внешним воздействием по частоте, причем упомянутый частотный интервал (полоса синхронизации) тем шире, чем больше интенсивность воздействия. Этот эффект – синхронизация внешней силой наблюдается в системах самой разной природы – в радиотехнических и электронных устройствах, в лазерах, в механических системах, в колебательных химических реакциях, в биологических объектах. Кроме синхронизации на частоте воздействия может реализоваться также синхронизация на гармониках и субгармониках, когда частоты воздействия и отклика кратны друг другу или, в самом общем случае, находятся в некотором рациональном отношении.

Если анализировать динамику поведения системы (1), то можно отметить следующее: при слабом внешнем воздействии имеются три периодических решения, но лишь одно из них устойчиво. При увеличении значения амплитуды  $A$  будет существовать единственное решение.

При фиксированном значении  $A$  с увеличением расстройки частот ( $\omega_0 - \omega$ ) можно наблюдать появление иных типов движения, а именно квазипериодических и хаотических.

Ниже рассматривается следующая модель:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega_0 t) + \Phi_{BW}(x, t), \quad (2)$$

$$\Phi_{BW}(x, t) = \alpha x(t) + (1 - \alpha) D z(t),$$

$$\dot{z}(t) = A_1 \dot{x}(t) - \beta |\dot{x}(t)| |z(t)|^{n-1} z(t) - \gamma \dot{x}(t) |z(t)|^n.$$

Система уравнений (2) описывает осциллятор ван дер Поля, под воздействием периодического воздействия, а также гистерезисного управления формализованного посредством модели Боука-Вена. Начальные и граничные условия определены аналогично с системой (1).

Пользуясь методом малого параметра, проведем анализ динамических особенностей системы. Для этого перепишем первое уравнение из системы (2) в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon [(\lambda - x^2)\dot{x} + A \cos(\omega_0 t) + \Phi_{BW}(x, t)].$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр. Решение уравнения будем искать в следующем виде:

$$x = B \cos \psi + \varepsilon u_1(B, \psi) + \dots, \tag{3}$$

где  $\psi = \omega t + \varphi(t)$ ,  $u_1(B, \psi), \dots$  – неизвестные функции не содержащие резонансных слагаемых. Тогда  $B$  и  $\varphi$  – амплитуда и фаза колебаний, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\dot{B} = \varepsilon f_1(B, \varphi) + \dots, \dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon F_1(B, \varphi) + \dots, \tag{4}$$

а  $\Delta = \omega - \omega_0$  – расстройка частоты.  $F, f$  – неизвестные функции, которые следует определить из условий отсутствия резонансных членов для функции  $u_1$ . Следуя алгоритму подробно описанному в [9] в первом приближении по  $\varepsilon$ , с учетом условия  $u_1(A, \psi) = 0$ , получим:

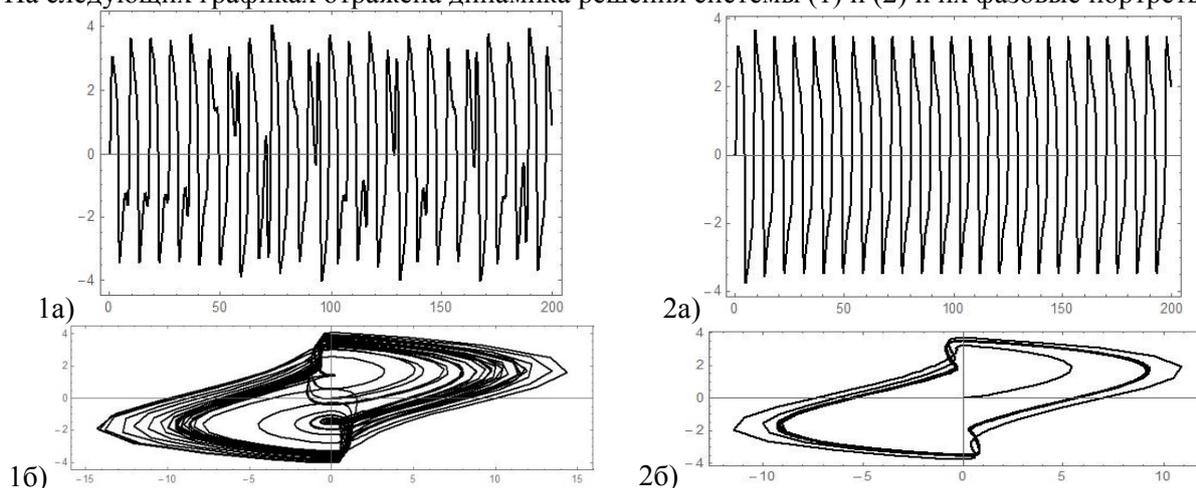
$$\dot{B} = \frac{B}{2} \left( \lambda - \frac{7B^2}{4} \right) + \frac{B_1 \sin \varphi}{2\Delta}, \dot{\varphi} = -\Delta + \frac{\Phi_{BW}}{2\Delta} - \frac{B_1 \sin \varphi}{2A\Delta} \tag{5}$$

Решение системы (5) может быть получено с использованием стандартных пакетов, ориентированных на решения систем нелинейных дифференциальных уравнений.

### 3. Численные результаты

Анализ различных динамических режимов поведения системы (1) показал, что наряду с периодическим и квазипериодическим режимом, при определенном значении параметров возможно возникновение хаотического поведения. Для того, чтобы убедиться в том, что подобранные значения параметров соответствуют хаотическому режиму поведения, были вычислены показатели Ляпунова. При условии, что параметры уравнения, описывающего осциллятор ван дер Поля с периодическим возмущением соответствуют следующим значениям  $\lambda = 3.4, \omega_0^2 = \pi, A = 2\pi, \omega = 0.7$ , значения показателей Ляпунова равны:  $\{0.109414, -2.41502, 0.0\}$ , что подтверждает хаотическое поведение в системе.

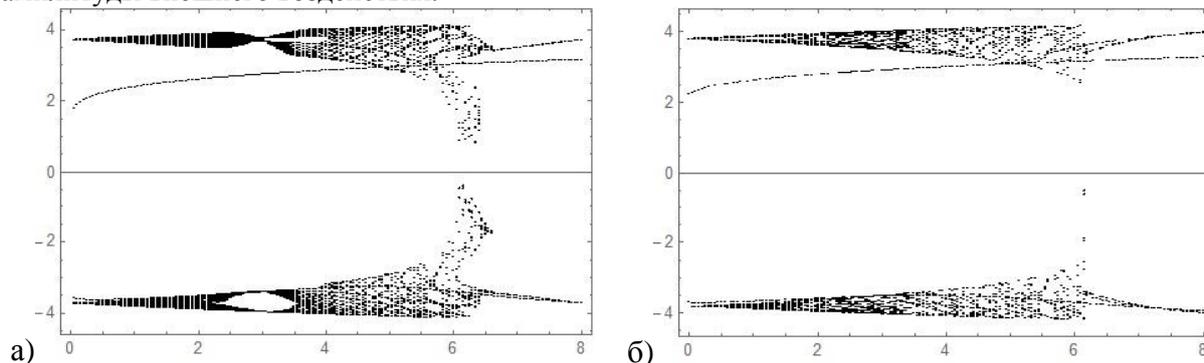
На следующих графиках отражена динамика решения системы (1) и (2) и их фазовые портреты:



**Рисунок 1.** Решение и фазовый портреты системы (1) и (2) при значении параметров  $\lambda = 3.4, \omega_0^2 = \pi, A = 2\pi, \omega = 0.7$ .

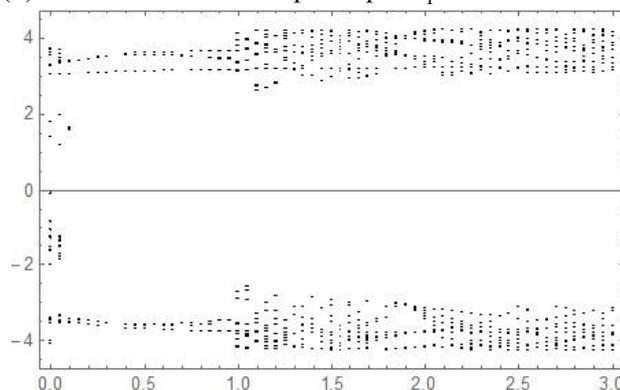
Как следует из результатов численного моделирования, системы (1) и (2) имеют существенные отличия в динамике поведения. Объяснить это можно тем, что включение гистерезисного звена приводит к диссипации энергии и, как следствие, к изменению динамических характеристик рассматриваемой системы.

Ниже продемонстрируем бифуркационные диаграммы для системы (1) и (2) в зависимости от амплитуды внешнего воздействия.



**Рисунок 2.** Бифуркационные диаграммы в зависимости от амплитуды внешнего воздействия для системы (а) и (б) при значении параметров  $\lambda = 3.4, \omega_0^2 = \pi, \omega = 0.7$ .

Параметры модели Боука-Вена существенным образом влияют на площадь петли гистерезиса и направление обхода. Как известно, максимальное влияние оказывает параметр  $A_1$ , отвечающий за ширину петли гистерезисного преобразователя, то есть другими словами, параметр модели Боука-Вена  $A_1$  отвечает за количество «абсорбируемой» энергии. Исследуем режимы поведения системы (2) в зависимости от этого параметра. Проведем бифуркационные диаграммы для системы (2) в зависимости от параметра  $A_1$ .

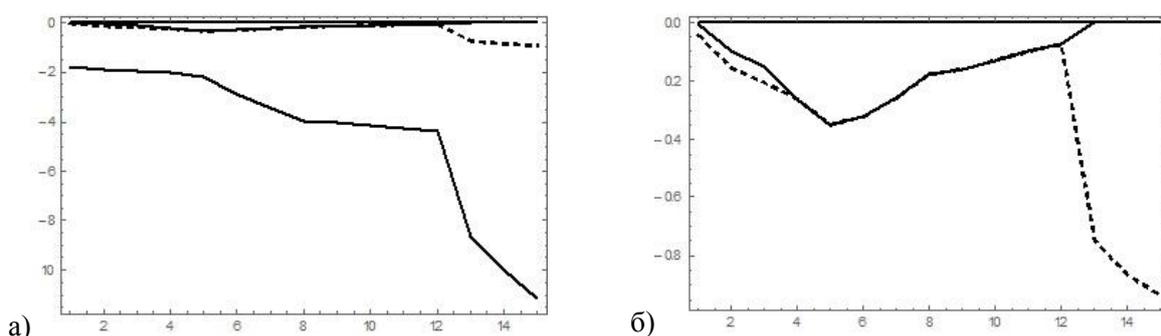


**Рисунок 3.** Бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра  $A_1$  для системы (2) при значении остальных параметров модели Боука-Вена  $\beta = 0.9, \gamma = 0.1, n = 4$ .

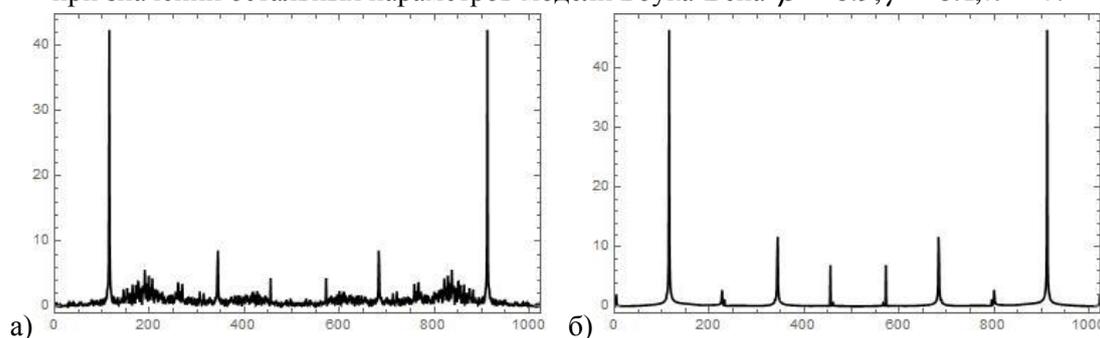
Из анализа приведенной диаграммы видно, что появление сложного не периодического поведения возможно, только в случаи, когда значения параметров таковы, что описываемая ими петля имеет малую площадь. Приведем спектр ляпуновских показателей для системы (2) в зависимости от параметра модели Боука-Вена  $A_1$ , отвечающего за ширину петли. Один из параметров имеет нулевые значения, а три других отрицательны. На рисунке 4а, отражено поведений всех 4 показателей, а на график 4б, характеризует поведение первых трех значений показателей. Стоит отметить, что первый показатель оставаясь отрицательным с течением времени стремится к нулю, второй показатель как уже отмечалось ранее имеет нулевые значения, а третий показатель начинает уменьшаться.

Известно, что качественные особенности динамики нелинейных систем находят отражения в спектральных характеристиках. Ниже приведены спектры решения систем (1) и (2).

Как видно, спектр решения системы (1) является непрерывным, что как известно, [17] соответствует хаотическому поведению, в то время как, из рисунка 5б ясно видно, что система демонстрирует трехчастотное, квазипериодическое движение.



**Рисунок 4.** Спектр ляпуновских показателей в зависимости от параметра  $A_1$  для системы (2) при значении остальных параметров модели Боука-Вена  $\beta = 0.9, \gamma = 0.1, n = 4$ .



**Рисунок 5.** Спектральные характеристики а) системы (1) и б) системы (2).

#### 4. Заключение

В работе была рассмотрена возможность управления хаотической динамикой осциллятора ван дер Поля, находящегося под воздействием гармонической силы. на основе анализа численных результатов бифуркационных диаграмм и соответствующей динамики показателей Ляпунова установлена эффективность регуляризирующей роли гистерезисного звена.

#### 5. Литература

- [1] Van der Pol, B. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart / B. van der Pol, J. van der Mark // *Philosophical Magazine & Journal of Science*. – 1928. – Vol. 6(38). – P. 763.
- [2] Veskos, P. Developmental acquisition of entrainment skills in robot swinging using van der Pol oscillators / P. Veskos, Y. Demiris // *Proceedings of the Fifth International Workshop on Epigenetic Robotics: Modeling Cognitive Development in Robotic Systems Lund University Cognitive Studies*, 2005. – P. 87.
- [3] Klinger, T. Van der Pol Dynamics of ionization waves / T. Klinger, A. Piel, F. Seddighi, C. Wilke // *Physics Letters A*. – 1993. – Vol. 182(2, 3). – P. 312.
- [4] Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // *УФН*. – 2011. – № 181:2. – С. 121-149.
- [5] Лоскутов, А.Ю. Очарование хаоса / А.Ю. Лоскутов // *УФН*. – 2010. – Т. 180:12. – С. 1305-1329.
- [6] Ott, E. Controlling Chaos / E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke // *Phys. Rev. Lett.* – 1990. – Vol. 64. – P. 1196.
- [7] Pyragas, K. Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback // *Phys. Lett.* – 1992. – Vol. 170. – P. 421-427.
- [8] Магницкий, Н.А. О стабилизации неподвижных точек хаотических отображений / Н.А. Магницкий // *Доклады РАН*. – 1996. – Т. 351(2). – С. 175-177.
- [9] Семенов, М.Е. Неограниченные и диссипативные колебания в системах с релейными нелинейностями / М.Е. Семенов, П.А. Мелешенко, О.О. Решетова // *Воронежского государственного университета: Физика. Математика*. – 2018. – № 3. – С. 159-171.

- [10] Семенов, М.Е. Стабилизация обратного гибкого маятника с гистерезисными свойствами / М.Е. Семенов, М.Г. Матвеев, Г.Н. Лебедев, А.М. Соловьёв // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2017. – № 8. – С. 516-525.
- [11] Ряжских, В.И. Стабилизация обратного маятника на двухколесном транспортном средстве / В.И. Ряжских // Вестник Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ. – 2017. – № 9. – С. 41-50.
- [12] Semenov, M. E. Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers / M.E. Semenov, A.M. Solovyov, P.A. Meleshenko // Proceedings in Physics. – 2018. – Vol. 199. DOI: 10.1007/978-3-319-63937-6\_15.
- [13] Solovyov, A.M. Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems / A.M. Solovyov, M.E. Semenov, P.A. Meleshenko // Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 201. – P. 578-583.
- [14] Carpineto, N. Hysteretic tuned mass dampers for structural vibration mitigation / N. Carpineto, W. Lacarbonara, F. Vestroni // Journal of Sound and Vibration. – 2014. – Vol. 333. – P. 1302-1318.
- [15] Красносельский, М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
- [16] Ikhouane, F. Dynamic properties of the hysteretic Bouc-Wen model / F. Ikhouane, V. Manosa, J. Rodellar // Systems & Control Letters. – 2007. – Vol. 56. – P. 197-205.
- [17] Кузнецов, С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – М.: Физматлит, 2006. – 356 с.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00158, № 16-08-00312, № 17-01-00251).

## Dynamic features of systems of hysteresis-related Van der Pol oscillators

М.Е. Семенов<sup>1,2,3</sup>, П.А. Мелешенко<sup>1,3</sup>, А.М. Соловьёв<sup>4</sup>, О.О.Решетова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, Starykh Bol'shevikov 54A, Voronezh, Russia, 394064

<sup>2</sup>Geophysical Survey of Russia Academy of Sciences, Lenin Ave. 189, Obninsk, Russia, 249035

<sup>3</sup>Voronezh State University, University Square. 1, Voronezh, Russia, 394018

<sup>4</sup>JSC "Concern "Sozvezdie", Plekhanovskaya 14, Voronezh, Russia, 394018

**Abstract.** In this paper, we study the physically realizable radio-technical model of van der Pol oscillators with hysteresis coupling. The modes of chaotic and regular dynamics of the system under consideration are identified in the parameter space of both the system and the hysteresis link. An algorithm is proposed for controlling chaotic dynamics based on energy dissipation by means of hysteresis converters in the connecting channel.