

Динамика перепутывания состояний двух сверхпроводящих кубитов, нерезонансно взаимодействующих с двумя независимыми резонаторами

Е.К. Башкиров¹, М.М. Евсеев¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В настоящей работе проводилось исследование динамики перепутывания состояний двух сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с двумя микроволновыми модами независимых копланарных резонаторов, в рамках нерезонансной двойной модели Джейнса-Каммингса. В модели предполагаются различными расстройки частот полей резонаторов и константы атом-полевого взаимодействия. Было получено аналитическое решение модели. Была выявлена зависимость атомного перепутывания от расстроек частот полей резонаторов и переходов в двухуровневых системах.

1. Введение

Квантовая перепутанность имеет фундаментальное значение для понимания нелокальности квантовой механики и её роли в квантовых вычислениях и информатике [1]. Поэтому прилагаются большие усилия для исследования характеристик перепутанности, её возникновения и контроля в различных системах. Хорошо известно, что модель Джейнса-Каммингса (МДК) является простейшей физической моделью, которая описывает взаимодействие кубита (естественного или искусственного двухуровневого атома) с одной модой резонатора и используется для описания различных физических объектов, взаимодействующих с выделенными модами оптических и микроволновых резонаторов, таких как ридберговские атомы, ионы в магнитных ловушках, квантовые точки, сверхпроводящие цепи, примесные спины [2]. Йонак и др. предложили двойную модель Джейнса-Каммингса (ДМДК), состоящую из двух двухуровневых атомов и двух мод поля резонатора (каждый атом взаимодействует только с одной модой резонатора) [3], и исследовали динамику атомного перепутывания в такой модели. Они обнаружили, что для слабых полей перепутанность кубитов не стационарна и может демонстрировать периодические колебания в виде внезапной смерти и рождения перепутывания. В последнее время появилось большое число работ, посвящённых исследованию ДМДК (смотрите ссылки в [4]).

В ряде наших работ было исследовано влияние диполь-дипольного взаимодействия, расстройки частот резонансных переходов в атомах и частоты поля, штарковского сдвига энергетических уровней, многофотонных вырожденных и невырожденных переходов в атомах на атом-атомное перепутывание для ряда нелинейных двухатомных МДК [5-7]. В частности, нами исследовались особенности перепутывания кубитов для резонансной ДМДК с учетом диполь-дипольного взаимодействия атомов [8, 9]. В настоящей работе нами была рассмотрена

динамика нерезонансной двойной модель Джейнса-Каммингса. Исследовалось влияние интенсивностей кубит-полевых взаимодействий и расстройек между частотами полей резонаторов и частотами атомных переходов на степень перепутывания кубитов.

2. Описание рассматриваемой модели

Рассмотрим 2 идентичных сверхпроводящих кубита, которые в дальнейшем будем обозначать как A и B , и 2 резонаторных моды компланарных или LC-контуров, обозначаемых как a и b (A взаимодействует только с a и аналогично для B и b). Кубит A нерезонансно взаимодействует с единичной модой поля резонатора a , кубит B нерезонансно взаимодействует с единичной модой поля резонатора b . Вследствие случайности положения кубитов в резонаторе, крайне трудно контролировать равенство взаимодействий между различными «атом-резонатор» системами. Поэтому константы взаимодействий между атомами и резонаторами предполагаются неравными. Таким образом гамильтониан системы можно записать в виде

$$\hat{H}_{DJC} = \hbar\omega_{qa}\hat{J}_a^z + \hbar\omega_{qb}\hat{J}_b^z + \hbar\omega_{fa}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_{fb}\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\gamma_a\left(\hat{a}^N\hat{J}_a^+ + (\hat{a}^\dagger)^N\hat{J}_a^-\right) + \hbar\gamma_b\left(\hat{b}^M\hat{J}_b^+ + (\hat{b}^\dagger)^M\hat{J}_b^-\right),$$

где $\hat{J}_i^z = \frac{1}{2}(|+\rangle_{ii}\langle+| - |-\rangle_{ii}\langle-|)$ — оператор инверсии для i -того кубита ($i = A, B$), $\hat{J}_i^+ = |+\rangle_{ii}\langle-|$ и $\hat{J}_i^- = |-\rangle_{ii}\langle+|$ — операторы перехода между возбуждённым $|+\rangle_{ii}$ и основным $|-\rangle_{ii}$ состояниями i -того кубита, \hat{a} и \hat{a}^\dagger (\hat{b} и \hat{b}^\dagger) — операторы рождения и уничтожения фотонов (или плазмонов в случае LC-резонатора) моды a (b) резонатора, $\hbar\omega_{qi}$ ($i = A, B$) — сверхпроводящие энергетические щели, γ_a (γ_b) — константа взаимодействия кубита A (B) с модой резонатора a (b), ω_{fi} ($i = A, B$) — частоты мод полей резонаторов, N (M) — фотонность взаимодействия кубита A (B) с модой резонатора a (b). В качестве начального состояния кубитов рассматривается белловское чистое состояние вида

$$|\Psi(0)\rangle_{AB} = \cos(\theta)|+-\rangle + \sin(\theta)\exp(-i\phi)|-+\rangle, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

Примем также, что поля резонаторов в начальный момент находились в фоковском состоянии $|\Psi(0)\rangle_{ab} = |nm\rangle$.

Тогда начальное состояние системы можно определить в виде

$$|\Psi(0)\rangle = (\cos(\theta)|+-\rangle + \sin(\theta)\exp(-i\phi)|-+\rangle) \otimes |nm\rangle.$$

Для определения зависящей от времени волновой функции будет использоваться оператор эволюции $\hat{U}(t, t_0)$, который можно записать в виде

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}_{Aa}(t, t_0) \otimes \hat{U}_{Bb}(t, t_0),$$

где $\hat{U}_i(t, t_0)$ ($i = Aa, Bb$) — операторы эволюции для подсистем ДМДК, состоящих из сверхпроводящего кубита (A, B) и взаимодействующей с ним моды поля резонатора (a, b). Выделенные системы представляют из себя нерезонансные модели Джейнса-Каммингса (МДК). Для записи оператора эволюции ДМДК определим оператор эволюции для МДК.

3. Оператор эволюции в модели Джейнса-Каммингса

Гамильтониан МДК можно представить в виде

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega_q\hat{J}^z + \hbar\omega_f\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\gamma\left(\hat{a}^N\hat{J}^+ + (\hat{a}^\dagger)^N\hat{J}^-\right),$$

где $\hat{J}^z = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$ — оператор инверсии кубита ($i = A, B$), $\hat{J}^+ = |+\rangle\langle-|$ и $\hat{J}^- = |-\rangle\langle+|$ — операторы перехода между возбуждённым $|+\rangle$ и основным $|-\rangle$ состояниями кубита, \hat{a} и \hat{a}^\dagger — операторы рождения и уничтожения фотонов (или плазмонов в случае LC-резонатора) моды a резонатора,

$\hbar\omega_q$ - сверхпроводящая энергетическая щель, γ - константа взаимодействия кубита с модой резонатора, ω_f - частота моды поля резонатора, N (M) - фотонность взаимодействия кубита с модой резонатора.

Сопоставим векторам состояний кубита двухкомпонентные вектор-столбцы

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что гамильтониану МДК (4) соответствует оператор эволюции $\hat{U}_{JC}(t, t_0)$ вида

$$\hat{U}_{JC}(t, t_0) = \begin{pmatrix} \hat{A}(\omega_f, \delta, \gamma, N | t, t_0) & \hat{B}(\omega_f, \delta, \gamma, N | t, t_0) \\ \hat{C}(\omega_f, \delta, \gamma, N | t, t_0) & \hat{D}(\omega_f, \delta, \gamma, N | t, t_0) \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{A}(\omega_f, \delta, \gamma, N | t, t_0) = e^{-i\alpha(\omega_f, \hat{a}^\dagger \hat{a}, N | t, t_0)} \left(\xi(\delta, \gamma, \hat{a}^\dagger \hat{a}, N | t, t_0) + i\delta\zeta(\delta, \gamma, \hat{a}^\dagger \hat{a}, N | t, t_0) \right),$$

$$\hat{B}(\omega_f, \delta, \gamma, N | t, t_0) = -2i\gamma \hat{a}^N e^{-i\alpha(\omega_f, \hat{a}^\dagger \hat{a} - N, N | t, t_0)} \zeta(\delta, \gamma, \hat{a}^\dagger \hat{a} - N, N | t, t_0),$$

$$\hat{C}(\omega_f, \delta, \gamma, N | t, t_0) = -2i\gamma (\hat{a}^\dagger)^N e^{-i\alpha(\omega_f, \hat{a}^\dagger \hat{a}, N | t, t_0)} \zeta(\delta, \gamma, \hat{a}^\dagger \hat{a}, N | t, t_0),$$

$$\hat{D}(\omega_f, \delta, \gamma, N | t, t_0) = e^{-i\alpha(\omega_f, \hat{a}^\dagger \hat{a} - N, N | t, t_0)} \left(\xi(\delta, \gamma, \hat{a}^\dagger \hat{a} - N, N | t, t_0) + i\delta\zeta(\delta, \gamma, \hat{a}^\dagger \hat{a} - N, N | t, t_0) \right),$$

$$\xi(\delta, \gamma, n, N | t, t_0) = \cos\left(\frac{t-t_0}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\gamma^2(n+1)_N}\right), \quad \zeta(\delta, \gamma, n, N | t, t_0) = \frac{\sin\left(\frac{t-t_0}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\gamma^2(n+1)_N}\right)}{\sqrt{\delta^2 + 4\gamma^2(n+1)_N}},$$

$$\alpha(\omega_f, n, N | t, t_0) = \omega_f(t-t_0) \left(n + \frac{N+1}{2} \right),$$

$$(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1),$$

$$\delta = N\omega_f - \omega_q.$$

Таким образом, выражение для оператора эволюции нерезонансной МДК получено.

4. Выражение для волновой функции

Используя определённый оператор эволюции и выражение для волновой функции в начальный момент времени, можно определить временную волновую функцию изучаемой системы

$$\begin{aligned} |\Psi(t, t_0)\rangle &= C_1(t, t_0) |++nm-M\rangle + C_2(t, t_0) |++n-Nm\rangle + C_3(t, t_0) |+-nm\rangle \\ &+ C_4(t, t_0) |+-n-Nm+M\rangle + C_5(t, t_0) |--nm-M\rangle + C_6(t, t_0) |--n+Nm-M\rangle \\ &+ C_7(t, t_0) |--nm+M\rangle + C_8(t, t_0) |--n+Nm\rangle \end{aligned}$$

Здесь

$$C_1(t, t_0) = -2i\gamma_b \sqrt{(m-M+1)_M} e^{-i(\alpha_I(n)+\alpha_{II}(m-M))} \left(\xi_I(n) + i\delta_a \zeta_I(n) \right) \zeta_{II}(m-M) \cos(\theta),$$

$$C_2(t, t_0) = -2i\gamma_a \sqrt{(n-N+1)_N} e^{-i(\alpha_I(n-N)+\alpha_{II}(m))} \zeta_I(n-N) \left(\xi_{II}(m) + i\delta_b \zeta_{II}(m) \right) \sin(\theta) e^{-i\phi},$$

$$C_3(t, t_0) = e^{-i(\alpha_I(n)+\alpha_{II}(m-M))} \left(\xi_I(n) + i\delta_a \zeta_I(n) \right) \left(\xi_{II}(m-M) + i\delta_b \zeta_{II}(m-M) \right) \cos(\theta),$$

$$C_4(t, t_0) = -4\gamma_a \gamma_b \sqrt{(n-N+1)_N (m+1)_M} e^{-i(\alpha_I(n-N)+\alpha_{II}(m))} \zeta_I(n-N) \zeta_{II}(m) \sin(\theta) e^{-i\phi},$$

$$C_5(t, t_0) = e^{-i(\alpha_I(n-N)+\alpha_{II}(m))} \left(\xi_I(n-N) + i\delta_a \zeta_I(n-N) \right) \left(\xi_{II}(m) + i\delta_b \zeta_{II}(m) \right) \sin(\theta) e^{-i\phi},$$

$$C_6(t, t_0) = -4\gamma_a \gamma_b \sqrt{(n+1)_N (m-M+1)_M} e^{-i(\alpha_I(n)+\alpha_{II}(m-M))} \zeta_I(n) \zeta_{II}(m-M) \cos(\theta),$$

$$C_7(t, t_0) = -2i\gamma_b \sqrt{(m+1)_M} e^{-i(\alpha_I(n-N)+\alpha_{II}(m))} \left(\xi_I(n-N) + i\delta_a \zeta_I(n-N) \right) \zeta_{II}(m) \sin(\theta) e^{-i\phi},$$

$$C_8(t, t_0) = -2i\gamma_a \sqrt{(n+1)_N} e^{-i(\alpha_I(n)+\alpha_{II}(m-M))} \zeta_I(n) \left(\xi_{II}(m-M) + i\delta_b \zeta_{II}(m-M) \right) \cos(\theta),$$

$$X_{I(II)}(n) = X\left(\omega_{fa(fb)}, \delta_{fa(fb)}, \gamma_{fa(fb)}, n, N(M) | t, t_0\right), \quad X = \alpha, \xi, \zeta.$$

5. Определение явного вида параметра Переса - Хородецких

Для двухкубитной системы, описываемой матрицей плотности $\rho_A(t)$, мера перепутанности состояний или отрицательность может быть определена через отрицательные собственные значения μ_i^- частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной атомной матрицы плотности $\rho_A^{T_1}$

$$\varepsilon = -2 \sum \mu_i^-.$$

Статистический оператор исследуемой системы может быть определён в виде ($t_0 \equiv 0$)

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|.$$

Усредняя матрицу плотности системы по полевым переменным можно получить выражение для редуцированной атомной матрицы плотности и частично транспонированной атомной матрицы плотности в виде

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} |C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |C_3(t)|^2 + |C_4(t)|^2 & C_3(t)\bar{C}_5(t) & 0 \\ 0 & \bar{C}_3(t)C_5(t) & |C_5(t)|^2 + |C_6(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |C_7(t)|^2 + |C_8(t)|^2 \end{pmatrix},$$

$$\rho_A^{T_b}(t) = \begin{pmatrix} |C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 & 0 & 0 & \bar{C}_3(t)C_5(t) \\ 0 & |C_3(t)|^2 + |C_4(t)|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |C_5(t)|^2 + |C_6(t)|^2 & 0 \\ C_3(t)\bar{C}_5(t) & 0 & 0 & |C_7(t)|^2 + |C_8(t)|^2 \end{pmatrix}.$$

Частично транспонированная атомная матрица плотности имеет только одно собственное значение, которое может быть отрицательным. В результате отрицательность может быть определена в виде

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 - |C_7(t)|^2 - |C_8(t)|^2)^2 + 4|C_3(t)\bar{C}_5(t)|^2} - (|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 + |C_7(t)|^2 + |C_8(t)|^2).$$

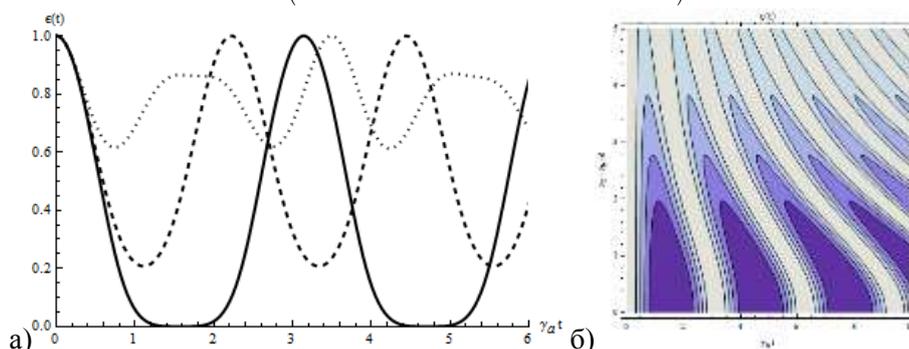


Рисунок 1. Результаты численного моделирования динамики отрицательности в зависимости от $\gamma_a t$ для случая $\gamma_b = \gamma_a$, $n=m=0$, $N=M=1$ (параметр $\theta = \pi/4$): а) величины расстройк частот $\delta_a=3$, $\delta_b=5$ (точечная), $\delta_a=\delta_b=2$ (штриховая), и $\delta_a=\delta_b=0$ (сплошная); б) величина расстройк ($\delta_a=\delta_b=\delta$) частот отложена по вертикальной координате, цветом указано значение отрицательности (белый $\rightarrow 1$, тёмно-синий $\rightarrow 0$), линии уровня построены с шагом 0.2.

6. Обсуждение результатов

Результаты численного моделирования динамики отрицательности показаны на рисунке 1. График 1 (а) показывает, что, в случае равенства интенсивностей атом-полевых

взаимодействий, отрицательность эволюционирует периодически между 0 и 1, при этом период зависит от соотношения расстройок частот. При этом увеличении отношения параметров расстройок приводит к стабилизации перепутывания кубитов. На графике 1 (б) показано влияние расстройок частот в случае идентичных подсистем на отрицательность. Увеличение значений расстройок частот приводит к увеличению частоты осцилляций отрицательности. При этом наблюдается стабилизация перепутывания состояний кубитов.

7. Заключение

В настоящей работе была изучена динамика перепутывания состояний кубитов в ДМДК. Анализ проводился посредством численного моделирования эволюции отрицательности для различных параметров исходной системы. Было показано, что расстройки частот влияют на период осцилляций параметра перепутывания, но не определяют максимальную степень перепутанности состояний кубитов. Полученные результаты могут быть использованы при выборе наиболее эффективных механизмов контроля и управления перепутыванием сверхпроводящих кубитов.

8. Литература

- [1] Nielsen, M.A. Quantum Computation and Quantum Information / M.A. Nielsen, I.L. Chuang – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – P. 698. DOI: 10.1017/CBO9780511976667.
- [2] Buluta, I. Neutral and artificial atoms for quantum computation/ I. Buluta, S. Ashhab, F. Nori // Rep. Prog. Phys. – 2011. – Vol. 74. – P. 104401. DOI: 10.1088/0034-4885/74/10/104401.
- [3] Yönaç, M.Y. Sudden death of entanglement of two Jaynes–Cummings atoms / M.Y. Yönaç, T. Yu, J.H. Eberly // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2006. – Vol. 39(15). – P. S621. DOI: 10.1088/0953-4075/39/15/S09.
- [4] Zhu, W.-T. Entanglement Dynamics of Two Qubits Coupled Independently to Cavities in the Ultrastrong Coupling Regime: Analytical Results/ W.-T. Zhu, Q.-B. Ren, L.-W. Duan, Q.-H. Chen // Chin. Phys. Lett. – 2016. – Vol. 33(5). – P. 050302. DOI: 10.1088/0256-307X/33/5/050302
- [5] Bashkirov, E.K. Entanglement of two superconducting qubits interacting with two-mode thermal field / E.K. Bashkirov, M.S. Mastyugin // Computer Optics. – 2013. – Vol. 38(3). – P. 278-285.
- [6] Bashkirov, E.K. Entanglement between qubits due to the atomic coherence / E.K. Bashkirov, D.V. Litvinova // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(4). – P. 663-669.
- [7] Bashkirov, E.K. The dynamics of entanglement in two-atom Tavis-Cummings model with non-degenerate two-photon transitions for four-qubits initial atom-field entangled states / E.K. Bashkirov, M.S. Mastyugin // Opt. Commun. – 2014. – Vol. 313. – P. 170-174.
- [8] Bashkirov, E.K. The influence of dipole-dipole interaction on entanglement of two superconducting qubits in the framework of double Jaynes-Cummins model / E.K. Bashkirov, M.M. Evseev // J. Phys.: Conference Ser. – 2017. – Vol. 917. – P. 062011.
- [9] Bashkirov, E.K. Dynamics of two dipole-coupled superconducting qubits interacting with two independent cavity modes / E.K. Bashkirov, M.M. Evseev // J. Phys.: Conference Ser. – 2019. – Vol. 1368. – P. 022009.

Dynamics of entanglement of two superconducting qubits nonresonantly interacting with two independent resonators

Е.К. Bashkirov¹, М.М. Evseev¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. In the present work, we studied the dynamics of entanglement of the states of two superconducting qubits interacting with two microwave modes of independent resonators in the framework of the nonresonant double Janssen-Cummings model. The model assumes various frequency mismatches of the resonator fields and atom-field interaction constants. An analytical solution to the model was obtained. The dependence of atomic entanglement on frequency disturbances of resonator fields and transitions in two-level systems was revealed.