Дискретные ортогональные преобразования с самоподобными базисными функциями

В.М. Чернов[1,2]

[1]Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001
[2]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В работе вводятся и исследуются новые базисы дискретных ортогональных преобразований, ассоциированные с некоторыми рекурсивными процессами и обладающие свойством самоподобия. Доказываются достаточные условия ортогональности системы базисных функций. Для преобразований с введенными базисами синтезируются быстрые алгоритмы преобразований. Обсуждается связь рассматриваемых базисов с аналитическими свойствами производящих рядов Дирихле.

1. Введение

В практике решения задач цифровой обработки сигналов (ЦОС) выбор того или иного дискретного ортогонального преобразования базируется на неформальном субъективном мнении пользователя об «адекватности» применяемого спектрального преобразования для решения задач именно рассматриваемого класса сигналов, также характеризуемого в неформальных терминах.

Конечно, *какие-то* аргументы, безусловно, приводятся, но они сводятся либо к анализу полученных экспериментальных результатов [1], либо социальной/оборонной значимостью [2], либо квазинаучной аргументацией, например: «базисные функции дискретного косинусного преобразования (ДКП) хорошо аппроксимируют собственные функции преобразования Карунена-Лоэва для *широкого класса стационарных случайных процессов»* [3],[4] (заметим, что в цитированных источниках этот класс не характеризуется; просто *широкий* и всё).

Тем не менее, (и это обычная практика) функция, наблюдаемая лишь на конечном интервале, часто *считается* продолженной, например, периодически.

Резоны:

(а) «мне так удобнее»/«есть математический аппарат»;

(б) «есть мнение…» / «опыт подсказывает…» и т.п.

Более убедительным аргументом в пользу периодического продолжения является тот факт, что для ДОП с периодическими базисными функциями существует развитая теория синтеза так называемых «быстрых» алгоритмов их вычисления. Более того, наиболее эффективными являются алгоритмы вычислений преобразований с базисными функциями – характерами абелевых групп (дискретные преобразования Фурье, Виленкина-Крестенсона) или их линейными комбинациями (дискретные преобразования Хартли, ДКП). Причем, по вышеназванным причинам принадлежность входных сигналов к классу, в частности, периодических сигналов просто постулируется.

Что касается реальной полезности и практической применимости тех или иных аналитических критериев принадлежности рассматриваемых сигналов к определенному классу, то просто следует признать, что вообще проверка выполнения большинства критериальных требований обычно невозможна за конечное время так как предполагают, вообще говоря, инфинитную проверку.

В работе рассматриваются преобразования с «самоподобными» базисными функциями. Как представляется автору, «универсального» формального определения самоподобия, похоже, не существует. Особенно это относится к дискретным, конечным объектам. А известные теоретические работы, в которых ставятся и исследуются вопросы самоподобия в дискретных последовательностях, не затрагивают проблемы синтеза новых базисов ДОП [5],[6]. Следует также отметить, что новые базисы порождают и новые проблемы, связанные с их изучением и применением. Например, «волюнтаристское» решение о признании функции, наблюдаемой только на конечном интервале, периодической функцией приводит, например, к известным краевым эффектам (эффект Гиббса и т.п.). Точно также, решение о признании функции «самоподобной» должно привести к краевым эффектам в специфической форме.

2. Аналитические условия периодичности

И в теоретической математике, и в ряде прикладных областях науки, имеющих предметом или средством исследований числовых последовательностей $\{a(n)\}$, широко применяется метод производящих функций. Наиболее часто в прикладных науках в качестве производящих функций используются степенные ряды

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)z^{n} \tag{1}$$

(например, z-преобразование в информатике) и (много реже) ординарные ряды Дирихле

$$\Phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s};\ \mathrm{Re}\,s>\sigma_0. \tag{2}$$

Классическая теорема Абеля позволяет судить по информации о коэффициентах степенного ряда (сходимость) об аналитических свойствах функции $F(z)$ (подобные теоремы часто называют теоремами абелевого типа). Утверждения, позволяющие по аналитическим свойствам функций $F(z),\Phi(s)$ (или их аналитических продолжений) судить о свойствах последовательности $\{a(n)\}$, называют тауберовыми теоремами [7],[8].

Следует отметить, что один из наиболее мощных математических аппаратов теории функций комплексного переменного – теория аналитического продолжения позволяет получить часто весьма слабую «тауберову» информацию из известных аналитических свойств ряда (1).

Действительно, из теоремы Даффина-Шеффера [9] следует, что в случае конечности множества значений $a(n)$, ряд (1) либо не продолжается аналитически за пределы круга сходимости, либо является рациональной функцией с конечным числом полюсов в случае периодической последовательности $a(n)$. Иными словами, теория аналитического продолжения, применительно к степенному производящему ряду (1) с конечнозначной последовательностью $a(n)$, позволяет отличать (с понятными оговорками относительно реалистичности «тестирующего» метода) только периодические последовательности от непериодических.

Производящие *ряды Дирихле* (2) с периодическими коэффициентами $a(n)$, безусловно, мероморфно продолжаются на всю комплексную плоскость, но могут продолжаться и в непериодическом случае.

В связи с этим возникает предположение, что некие гипотетические достаточные аналитические условия, выделяющие во множестве всех комплекснозначных последовательностей те последовательности $\{a(n)\}$, для которых *ряды Дирихле* (2) мероморфно продолжаются на всю комплексную плоскость, как для периодических последовательностей коэффициентов $a(n)$, так и для непериодических. Возможно (?) этот выделенный класс последовательностей частично унаследует и те алгебраические свойства периодических последовательностей, обеспечивающие в некоторой степени, синтез базисов дискретных ортогональных преобразованием с наличием эффективных («быстрых») алгоритмов их вычисления. Кроме того, аналитические условия периодичности последовательности могут быть сформулированы, как правило, в *«предельных»* терминах, относящихся к *бесконечным* множествам. Поэтому желательны формулировки условий с помощью таких формул, которые допускают *допредельную* субъективную констатацию *тенденции* её сходимости к финальной «точной» форме.

В работах Н.Г.Чудакова [10]-[11] показано, что такие условия для рядов Дирихле могут быть сформулированы в терминах интегральных итераций сумматорных функций последовательности $\{a(n)\}$, а именно, если справедливы асимптотические равенства

$$D_m(x) = R_m(x) + Q_m(x), \tag{3}$$

где $R_m(x)$ - полином, а для $Q_m(x)$ при $x \to \infty$ выполняются асимптотические соотношения:

$$Q_m(x) = O\left(x^{\gamma_m}\right) \text{ и } \lim_{m\to\infty}\left(\gamma_m - m\right) = -\infty,$$

где для данной комплексной последовательности $a(n)$ (интегральные) итерации $D_m(x)$ сумматорной функции $D_0(x)$ определены равенствами:

$$D_0(x) = \sum_{n\le x} a(n),\ D_{m+1}(x) = \int_1^x D_m(y)dy,\ m = 0,1,...$$

В частности, нетрудно показать, что для периодических функций $a(n)$ равенство (3) выполняется в форме

$$D_m(x) = P_m(x) + O(1). \tag{4}$$

Иными словами, итерации сумматорной функции произвольной периодической последовательности $a(n)$, «хорошо» (с точностью до $O(1)$) аппроксимируются полиномами.

В работе автора [12] приведен пример непериодической последовательности $a(n)$ для которой равенство (3) выполняется также в форме (4). Так как этот пример явился некоторыми предпосылками для написания данной работы, то остановимся на нем подробнее.

<u>*Прототипный пример.*</u> Последовательность $\alpha(n)$ строится рекурсивно следующим образом: начальный фрагмент последовательности $\alpha(n), n = 0,1,...,2^k - 1$ повторяется при $n = 2^k, 2^k + 1, ..., 2^{k+1} - 1$ с инверсией знака:

$$\alpha(n): +1,' \quad -1,' \quad -1,+1,' \quad -1,+1,+1,-1,' \quad -1,+1,+1,-1,+1,-1,-1,+1,' \quad ...$$

В [12] показано, что для этой *непериодической* последовательности справедливо асимптотическое равенство (3) именно в форме (4), что является характерным свойством, «заимствованным» у периодических последовательностей.

3. Основной результат

Пусть

$$f(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_{r-1} z^{r-1} \in \mathbf{C}[z], \quad F_\infty(z) = \prod_{k=0}^{\infty} f(z^{r^k}),$$

$$F_p(z) = \prod_{k=1}^{p-1} f(z^{r^k}) = \sum_{n=0}^{r^p-1} a(n) z^n = (c_0 + ... + c_{r-1} z^{r-1}) ... \left(c_0 + c_1 z^{r^{p-1}} + ... + c_{r-1} z^{r^{p-1}(r-1)}\right).$$

Пусть далее

$$\Psi_1(n) = a(n)\exp\left\{2\pi i \, n/r^p\right\},\ \Psi_m(n) = \Psi_1(mn) = a(n)\exp\left\{2\pi i \, nm/r^p\right\};\ n, m = 0,1,...,r^p - 1,$$

а преобразование r^p – мерного (входного) вектора $\left(x(0), x(1), ..., x(r^p - 1)\right)$ определяется соотношением

$$x(m) = \sum_{n=0}^{r^p-1} x(n)\Psi_m(n); m = 0,1,...,r^p - 1. \tag{5}$$

Теорема 1. Если для коэффициентов c_j многочлена $f(z)$ выполняются соотношения

$$\left|c_0\right|^2 + \left|c_1\right|^2 + ... + \left|c_{r-1}\right|^2 = \beta \neq 0, \quad \left|c_0\right|^2 + \left|c_1\right|^2 e^{2\pi i/r} + ... + \left|c_{r-1}\right|^2 e^{2\pi i(r-1)/r} = 0 \tag{6}$$

то преобразование $\left\{x(n)\right\} \to \left\{x(m)\right\}; m, n = 1,...,r^p - 1$ является ортогональным относительно стандартного эрмитового произведения (здесь $\delta_{m,k}$ - дельта-функция Кронекера):

$$\left\langle \Psi_k, \Psi_m \right\rangle = \sum_{n=0}^{r^p-1} \Psi_k\left(n\right)\overline{\Psi_m}(n) = \beta^p \cdot \delta_{m,k}, \tag{7}$$

Пример 1. Пусть G - мультипликативная группа корней степени r из единицы, H – подгруппа порядка q группы G. Пусть K – смежный класс G по H, подгруппа H состоит из корней степени q: $H = \left\{ e^{2\pi i \cdot 0/q}, e^{2\pi i \cdot 1/q}, ..., e^{2\pi i \cdot (q-1)/q} \right\}$; $K = \nu H, \nu \in G$ – мультипликативный сдвиг множества H. Пусть $\chi_K(y)$ – характеристическая функция (индикатор) множества K:

$$\chi_K(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in K, \\ 0, & \text{если } y \notin K. \end{cases}$$

Независимо от конкретного значения параметра ν справедливы соотношения

$$\left|\chi_K(0)\right|^2 + \left|\chi_K(1)\right|^2 + ... + \left|\chi_K(r-1)\right|^2 = \beta \neq 0, \left|\chi_K(0)\right|^2 + \left|\chi_K(1)\right|^2 e^{2\pi i/r} + ... + \left|\chi_K(r-1)\right|^2 e^{2\pi i(r-1)/r} = 0.$$

Поэтому в силу Теоремы 1, преобразование (5) с порождающим полиномом

$$f\left(z\right) = \chi_K(0) + \chi_K(1)z + ... + \chi_K(r-1)z^{r-1},$$

и базисными функциями, удовлетворяющими (6), является дискретным ортогональным преобразованием. ■

В частности, пусть

$$f\left(z\right) = 1 + z + z^2 + ... + z^{r-1},$$

тогда $F(z) = \prod_{k=1}^{p-1} f(z^{r^k}) = \sum_{n=0}^{r^p-1} z^n$ и функции $\Psi_m\left(n\right) = \exp\left\{2\pi \frac{nm}{N}\right\}$ являются базисными функциями обычного дискретного преобразования Фурье длины $N = r^p$.

Пример 2. Пусть $N = 2^p$, числа $w \in \left\{0,...,2^p - 1\right\}$ представимы в двоичной системе счисления:

$$w = w_0 2^0 + w_1 2^1 + ... + w_{p-1} 2^{p-1}; w_j = 0,1.$$

Пусть далее G – группа, изоморфная прямой сумме p экземпляров циклической группы H_j порядка 2: $G \cong H_0 \oplus H_1 \oplus ... \oplus H_{p-1}$. Свяжем с числом w элемент группы G $w \leftrightarrow (w_0, w_1, ..., w_{p-1})$, считая, что $w_j \in H_j$. Пусть Θ – произвольный характер группы G, он может быть представлен в виде

$$\Theta\left(w\right) = \theta_0\left(w_0\right) \cdot ... \cdot \theta_{p-1}\left(w_{p-1}\right),$$

где θ_j; $j = 0,1,...,(p-1)$ – характеры групп H_j.

Пусть

$$F(z) = \left(1 + \theta_0\left(w_0\right)z\right)...\left(1 + \theta_{p-1}\left(w_{p-1}\right)z^{2^{p-1}}\right) = \sum_{n=0}^{2^p-1} a(n)z^n.$$

Определим спаривание элементов w группы G с элементами μ изоморфной ей дуальной группы G^*:

$$w\circ\mu \leftrightarrow \left(w_0\sigma(\mu_0),...,w_{p-1}\sigma(\mu_{p-1})\right),$$

где σ - некоторая перестановка компонент элемента $\mu \leftrightarrow (\mu_0,\mu_1,...,\mu_{p-1})$. Положим, как и ранее, $\Psi_\mu(w)=\Psi_1(w\circ\mu)$. Тогда преобразование (3) с определенными выше базисными функциями $\Psi_\mu(w)$ является ортогональным. ■

Ясно, что такое преобразование в зависимости от выбора способа спаривания $w\circ\mu$, то есть, перестановки σ, является «хаароподобным» преобразованием (преобразованием Хаара, Уолша, Адамара и т.п.). Аналогичным образом получается и множество преобразований, аналогичных преобразованиям Виленкина-Крестенсона [13].

Рассмотрим еще пример дискретного ортогонального преобразования, связанного через Теорему 1 с прототипным результатом работы [12].

Пример 3. Пусть в терминах формулировки Теоремы 1

$$f(z)=1-z\in\mathbf{C}[z],\quad F_\infty(z)=\prod_{k=0}^{\infty} f(z^{2^k}),\ F_p(z)=\prod_{k=1}^{p-1} f(z^{2^k})=\sum_{n=0}^{r^p-1} a(n)z^n=(1-z)...\left(1-z^{2^{p-1}}\right).$$

Пусть

$$\Psi_1(n)=a(n)\exp\left\{2\pi i\, {n}/{2^p}\right\},\ \Psi_m(n)=\Psi_1(mn)=a(n)\exp\left\{2\pi i\, {nm}/{2^p}\right\}; n,m=0,1,...,2^p-1.$$

Тогда преобразование

$$x(m)=\sum_{n=0}^{2^p-1} x(n)\Psi_m(n); m=0,1,...,2^p-1$$

является ортогональным. ■

Пример 4. Рассмотрим многочлен $f(z)=1+\omega z+\omega^5 z^2+z^3,\ \omega=\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$, удовлетворяющий условиям Теоремы 1. Последовательность $\psi(n)=\left\{1,\omega,\omega^5,1;\omega,\omega^2,\omega^6,\omega;\omega^5,1,\omega^4,\omega^5;1,\omega,\omega^5,1,...\right\}$ можно интерпретировать как цепной код кривой – «кривой Коха», а ДОП с базисными функциями

$$\Psi_1(n)=\psi(n)\exp\left\{2\pi i\, {n}/{4^p}\right\},\ n=0,1,...,4^p-1;\ \Psi_m(n)=\Psi_1(mn)=\psi(n)\exp\left\{2\pi i\, {nm}/{4^p}\right\}; n,m=0,1,...,4^p-1$$

позволяет известными спектральными методами производить цифровую обработку сигнала типа «зашумлённой кривой Коха» (фильтрация, интерполяция, компрессия и пр.). В работах автора [14],[15] рассматривалась связь также и других «фрактальных» кривых и последовательностей, аналогичных $\psi(n)$ ■

4. Быстрые алгоритмы

Пусть $\omega_N=\exp\left\{2\pi i/N\right\}$. Рассмотрим «стандартное» дискретное преобразование Фурье (ДПФ) также «стандартной» длины $N=2^t$:

$$x(m)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\exp\left\{2\pi i nm/N\right\}; m=0,1,...,N-1,$$

для вычисления которого уже больше полувека существуют «быстрые» алгоритмы – так называемые БПФ. Напомним один из таких алгоритмов - «БПФ с прореживанием по частоте» с целью указать возможность перенесения структуры этого алгоритма на случай быстрого вычисления преобразования (5). Опуская широко известные подробности, имеем:

$$x(m)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\omega^{mn}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(x(n)+x(n+N/2)(-1)^m\right)\left(\omega_{N/2}\right)^{mn}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{N/2-1}\left(x(n)+x(n+N/2)\right)\left(\omega_{N/2}\right)^{mn} & \text{при четных } m;\\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N/2-1}\left(x(n)-x(n+N/2)\right)\left(\omega_{N/2}\right)^{mn} & \text{при нечетных } m.\end{cases}$$

Несложные итерации последних равенств приводят к обычной оценке арифметической сложности $W(N)$ для рассматриваемых значений параметров ДПФ $W(N) = O(N \cdot \log_2 N)$.

Аналогично, в общем случае для функций Теоремы 1, имеем для преобразования (5):

$$x(m) = \sum_{n=0}^{r^p-1} x(n)\Psi_m(n) = \sum_{q=0}^{r-1} \sum_{n=0}^{r^{p-1}-1} x(n+qr^{p-1})\Psi_m(n+qr^{p-1}).$$

Так как

$$\Psi_m(n+qr^{p-1}) = a(n+qr^{p-1})\exp\left\{2\pi i \left(n+qr^{p-1}\right)m \big/ r^p\right\} = a(n)\cdot c_q \cdot \exp\left\{2\pi i\, qm \big/ r\right\} \cdot \exp\left\{2\pi i\, nm \big/ r^p\right\},$$

то

$$x(m) = \sum_{n=0}^{r^p-1} x(n)\Psi_m(n) = \sum_{n=0}^{r^{p-1}-1} \left(\sum_{q=0}^{r-1} x(n+qr^{p-1}) \cdot c_q \cdot \exp\left\{2\pi i m/r\right\} \right) \Psi_m(n).$$

Таким образом, вычисление преобразования (5) длины $N = r^p$ сводится к вычислению r преобразований длины $N\big/r$ и к дополнительным умножениям в каждой из линейных комбинаций внутренней суммы в (11) на $\exp\left\{2\pi i m/r\right\}$ - корни степени r из единицы в зависимости от вычета $m(\operatorname{mod} r)$ и параметры c_q ДОП с базисными функциями, удовлетворяющими (6).

5. Заключение

В контексте развития теории ДОП можно все же констатировать, что имеются работы, посвященные исследованиям ДОП, определенных на самоподобных «предфрактальных» двумерных областях [16], но автору неизвестны работы, где исследовались бы нетрадиционные ДОП с условием некого «самоподобия» не области определения, а значений базисных функций преобразования. Несмотря на этот теоретический пробел, потребность в дискретном спектральном анализе с помощью преобразований с такими базисами представляется достаточно высокой в связи, например, с задачами анализа трафика в компьютерных сетях [17],[18], в связи с применением самоподобных моделей в финансовой математике [19], в комбинаторике.

6. Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №16-41-630676_р_а, №18-29-03135_ мк) и рамках госзадания по теме № 0026-2018-0106.

7. Литература

[1] Васин, Ю.Г. "Хорошо приспособленные" базисы и задачи обработки экспериментальной информации / Ю.Г. Васин. – Горький: ГГУ, 1979. – 130 с.

[2] Махортых, С.А. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов / С.А. Махортых, М.Н. Устинин, Ф.Ф. Дедус – М:. Машиностроение, 1999. – 356 с.

[3] Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К.Р. Рао – М: Связь, 1980.

[4] Ярославский, Л.П. Введение в цифровую обработку изображений / Л.П. Ярославский – М.: Советское радио, 1979

[5] Hendriks, D. Arithmetic Self-Similarity of Infinite Sequences / D. Hendriks, F.G.W. Dannenberg, J. Endrullis, M. Dow, J.W. Klop // arXiv:1201.3786.

[6] Odagaki, T. Self-similarity of binary quasiperiodic sequences / T. Odagaki, M. Kaneko // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1994. – Vol. 27(5). – P. 1683-1690. DOI: 10.1088/0305-4470/27/5/030.

[7] Постников, А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел / А.Г. Постников – М.: Наука, 1971. – 416 с.

[8] Субханкулов М.А. Тауберовы теоремы с остатком./М.А.Субханкулов - М:Наука, 1976. - 402с.
[9] Бибербах, Л. Аналитическое продолжение /Л.Бибербах – М.: Наука, 1967. – 241 с.
[10] Чудаков, Н.Г. Аналитические критерии периодичности функций / Н.Г.Чудаков// Тезисы Всесоюзной конференции “Проблемы аналитической теории чисел и ее применений” – Вильнюс. – 1974. – С. 302-303.
[11] Чудаков, Н.Г. Об одном классе рядов Дирихле / Н.Г. Чудаков // Теория чисел – Куйбышев, 1975. – С. 53-57.
[12] Чернов, В.М. Об одном классе рядов Дирихле с конечными функциями Линделёфа / В.М. Чернов // Исследования по теории чисел. – 1982. – № 8. – С. 92-95.
[13] Трахтман, А.М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А.М. Трахтман, В.А. Трахтман – М.: Сов. радио, 1975.
[14] Chernov, V.M. Some spectral properties of fractal curves / V.M. Chernov // Machine Graphics & Vision. – 1996. – Vol. 5(1/2). – P. 413-422.
[15] Chernov, V.M. Tauber theorems for Dirichlet series and fractals / V.M. Chernov // Proc. of ICPR'96 – Vienna, 1996. – Vol. 2(B). – P. 656-661.
[16] Чернов, В.М. Дискретные ортогональные преобразования на фундаментальных областях канонических систем счисления / В.М. Чернов, М.С. Каспарьян // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 4. – С. 484-487.
[17] Karagiannis, T. Poisson View of Internet Traffic / T. Karagiannis, M. Molle, M.A. Faloutsos // Proc. of the 23-rd Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies INFOCOM. – 2004. – Vol. 3(7-11). – P. 1558-1569.
[18] Taqqu, M. Proof of a fundamental result in self–similar traffic modeling / M. Taqqu, W. Willinger, R. Sherman // Computer Communication Review. – 1997. – Vol. 27(2). – P. 5-23.
[19] Hastings, K.J. Introduction to Financial Mathematics / K.J. Hastings – CRC Press, 2015.

Discrete orthogonal transforms with self-similar basis functions

V.M. Chernov[1,2]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086
[2]Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

Abstract. New bases of discrete orthogonal transformations associated with certain recursive processes and possessing the property of self-similarity are introduced and investigated. Sufficient conditions for the orthogonality of a system of basic functions are proved . Fast transformation algorithms are synthesized for transformations with the entered bases. The relationship of the bases under consideration with the analytical properties of Dirichlet generating series is discussed.