

## Дважды стохастические волновые модели многомерных случайных полей

В.Р. Крашенинников<sup>1</sup>, А.Ю. Субботин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ульяновский государственный технический университет, Северный Венец 32, Ульяновск, Россия, 432027

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы построения математических моделей случайных полей для описания и имитации изображений. В волновой модели случайное поле является результатом влияния возмущений (волн), возникающих в случайные моменты времени в случайных местах и имеющих случайные формы. Эта модель позволяет представлять и имитировать изотропные и анизотропные изображения и их временные последовательности, определённые на произвольных областях многомерного пространства, а также на любых поверхностях. Однако данная модель позволяет представлять только однородные поля. В настоящей работе рассматриваются «дважды стохастические» волновые модели, когда одно волновое случайное поле (управляющее) задаёт параметры второго (управляемого) случайного поля. В результате изображения становятся неоднородными, так как параметры управляемого поля случайным образом изменяются по пространству. Рассмотрены также варианты, когда два поля взаимно влияют друг на друга.

### 1. Введение

Для эффективного решения различных задач обработки изображений необходима их математическая постановка, которая прежде всего включает в себя модель изображений как объекта исследования. К настоящему времени существует обширная литература по моделям изображений, например, [1-3]. Однако в подавляющем большинстве работ рассматриваются двумерные плоские изображения, реже их последовательности; довольно трудно решаются задачи имитации изображений и корреляционного анализа и синтеза; вызывает затруднение описание неоднородных изображений. В работах [4, 5] предложена волновая модель случайного поля, позволяющая описывать однородные изображения и их последовательности, определённые на областях и поверхностях любой размерности с небольшими вычислительными затратами для имитации. В этой модели случайное поле является результатом влияния возмущений (волн), возникающих в случайные моменты времени в случайных местах и имеющих случайные формы. При сферической форме волн порождаемые поля изотропны. Для придания анизотропии можно использовать, например, эллипсоидальные волны. Основное влияние на вид корреляционной функции поля оказывает только один параметр – распределение вероятностей коэффициента масштаба волн, поэтому сравнительно легко решаются задачи корреляционного анализа и синтеза.

Однако эта модель описывает только однородные изображения. В [6, 7] для описания неоднородных изображений предложена «дважды стохастическая» авторегрессионная модель случайного поля. В этой модели одно случайное поле (управляющее) задаёт параметры второго

(управляемого) поля, которое оказывается неоднородным, так как его параметры случайным образом изменяются по пространству, поэтому структура получающегося изображения существенно различна в разных местах. В настоящей работе эта идея использована применительно к волновой модели, что позволило получать модели широкого класса неоднородных изображений, определенных на областях и поверхностях любых размерностей.

## 2. Базовая волновая модель случайного поля

В волновой модели случайное поле определяется равенством

$$x_j^t = \sum_{\{k: \tau_k \leq t\}} f((\bar{j}, t), (\bar{u}_k, \tau_k), \bar{\omega}_k),$$

где  $(n+1)$ -мерная область определения  $\{(\bar{j}, t)\}$  может быть сеточной или непрерывной;  $\{(\bar{u}_k, \tau_k)\}$  – дискретное поле случайных точек (ПСТ) в  $(n+1)$ -мерном непрерывном пространстве;  $\bar{j}, \bar{u}_k$  – точки в  $n$ -мерном непрерывном пространстве;  $t$  и  $\tau_k$  интерпретируются как время;  $\bar{\omega}_k$  – случайный вектор параметров функции  $f$ . Это поле можно представить как результат воздействия случайных возмущений или волн  $f((\bar{j}, t), (\bar{u}_k, \tau_k), \bar{\omega}_k)$ , возникающих в случайных местах  $\bar{u}_k$  в случайные моменты времени  $\tau_k$  и изменяющихся во времени и пространстве. Выбор параметров этой модели позволяет получить широкий класс полей, включающий в себя многие известные модели.

Рассмотрим частный случай волновой модели, для которой корреляционные задачи анализа и синтеза легко решаются. Пусть

$$f((\bar{j}, t), (\bar{u}_k, \tau_k), \bar{\omega}_k) = c \exp(-2(\rho_k / R_k)^2) \exp(-\mu |t - \tau_k|) \zeta_k, \quad (1)$$

где ПСТ – пуассоновское с плотностью  $\lambda$ ;  $c$  – константа;  $\rho_k = |\bar{j} - \bar{u}_k|$  – расстояние между  $\bar{j}$  и  $\bar{u}_k$ ;  $\{R_k\}$  – система независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин с плотностью распределения вероятностей (ПРВ)  $w(\alpha)$ ;  $\{\zeta_k\}$  – система независимых одинаково распределенных случайных величин. Волны неподвижны, независимы, имеют сферические сечения по пространству и экспоненциально затухают со временем; система  $\{\zeta_k\}$  определяет интенсивность волн, а  $\{R_k\}$  – их пространственный масштаб. Порождаемое поле  $X$  стационарно, однородно, имеет нулевое среднее, изотропную по пространству ковариационную функцию (КФ)

$$V(\rho, t) = M[x_{(0,0,\dots,0)}^0 x_{(\rho,0,\dots,0)}^t] = \frac{c^2 \pi^{n/2} \lambda}{2^{n+1}} e^{-\mu t} \int_0^\infty \alpha^n \exp\left(-\frac{\rho^2}{\alpha^2}\right) w(\alpha) d\alpha \quad (2)$$

и дисперсию

$$\sigma_n^2 = \frac{c^2 \pi^{n/2} \lambda}{2^{n+1} \mu} M[R^n],$$

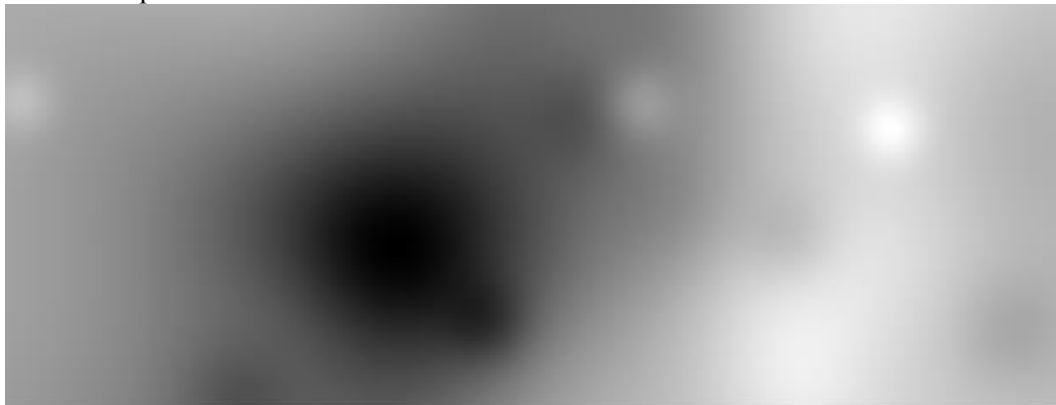
пропорциональную плотности  $\lambda$  ПСТ, эффективному интервалу  $1/\mu$  затухания волн и среднему значению  $n$ -й степени масштаба  $R$ .

Имитация дискретного поля на  $n$ -мерной области определения  $S$  с шагом квантования  $\Delta t$  по времени на основе модели рассмотренного частного вида может быть осуществлена с помощью следующего алгоритма. В начальный момент  $t_0 = 0$  значения поля на  $S$  равны нулю. В каждый последующий момент  $t_m = m\Delta t$  на непрерывном пространстве или на сетке, несколько перекрывающей  $S$ , формируется пуассоновское ПСТ с плотностью  $\lambda\Delta t$ . В каждой сформированной точке  $\bar{u}_k$  датчик выдаёт случайные величины  $\zeta_k$  и  $R_k$  с соответствующими ПРВ, после чего производится преобразование

$$x_j^{t_m} = x_j^{t_m - \Delta t} \exp(-\mu \cdot \Delta t) + c \sum_k \exp(-2(\rho_k / R_k)^2) \zeta_k$$

всех значений поля на  $S$ . Оно формирует последовательность кадров, то есть  $n$ -мерных изображений, определённых на  $S$ . При этом вычисляются только значения на  $S$ . Отметим, что  $S$

может быть любой, в частности, поверхностью в  $n$ -мерном пространстве. Достоинством этого алгоритма является его рекуррентность, что позволяет легко реализовать имитацию изображений. На рисунке 1 (а) приведен пример изображения, имитированного с помощью описанного алгоритма.



а)



б)

**Рисунок 1.** Пример имитации дважды стохастических изображений: (а) – управляющее изображение, (б) – управляемое изображение.

Рассмотрим решение корреляционных задач анализа и синтеза. Из (2) следует, что построенное поле имеет экспоненциальную нормированную корреляционную функцию (НКФ)  $\exp(-\mu t)$  по времени и НКФ

$$r(\rho) = \frac{1}{M[R^n]} \int_0^\infty \alpha^n \exp(-\rho^2 / \alpha^2) w(\alpha) d\alpha \tag{3}$$

по пространству, где  $M$  – знак математического ожидания. Таким образом, при решении задачи анализа, когда ПРВ  $w(\alpha)$  задана, искомая НКФ может быть найдена аналитически или численным интегрированием.

При решении задачи синтеза, когда НКФ  $r(\rho)$  задана, выражение (3) следует рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной ПРВ  $w(\alpha)$ . Выполняя в (3) замену  $x = \alpha^{-2}$ , получим выражение НКФ

$$r(\rho) = \frac{1}{2M[R^n]} \int_0^\infty x^{-\frac{n+3}{2}} \omega(x^{-\frac{1}{2}}) \exp(-\rho^2 x) dx \tag{4}$$

через преобразование Лапласа функции  $f(x) = x^{-(n+3)/2} \omega(x^{-1/2})$ . Из (4) следует, что если  $f(x)$  и  $F(\rho)$  – оригинал и изображение при преобразовании Лапласа, то с точностью до

постоянного множителя  $r(\rho) = F(\rho^2)$  и  $w(\alpha) = \alpha^{n+3} f(\alpha^{-2})$ . Это обстоятельство позволяет использовать теорию преобразования Лапласа для решения поставленных задач анализа и синтеза. Например, при равномерной ПРВ  $w(\alpha)$  на отрезке  $[a, b]$  получаем

$$r(\rho) = (n+1)\rho^{n+1} [\Gamma(-\frac{n+1}{2}, \rho^2 b^{-2}) - \Gamma(-\frac{n+1}{2}, \rho^2 a^{-2})] / 2(b^{n+1} - a^{n+1}),$$

при  $w(\alpha) = 2a^{2k+n} \alpha^{-(2k+n+1)} \exp(-a^2/\alpha^2) / \Gamma(k+n/2)$  находим  $r(\rho) = [a^2/(a^2 + \rho^2)]^k$ , а при  $w(\alpha) = 2a^n b^n \alpha^{-(n+1)} [\exp(-a^2/\alpha^2) - \exp(-b^2/\alpha^2)] / (b^2 - a^2) \Gamma(n/2)$  имеем выражение  $r(\rho) = [\ln(b^2 + \rho^2)/(a^2 + \rho^2)] / [\ln(b^2/a^2)]$ .

Поскольку найти аналитическое решение задачи синтеза удастся не всегда, рассмотрим метод ее приближенного решения. Из (3) следует, что при вырожденном распределении ( $R = \alpha = const$ ) получаем НКФ  $\exp(-\rho^2/\alpha^2)$ . Пусть теперь задана произвольная невозрастающая НКФ  $r(\rho)$ . Аппроксимируем ее с достаточной точностью суммой гауссоид с положительными коэффициентами:  $r(\rho) \approx h(\rho) = \sum_i q_i \exp(-\rho^2/\alpha_i^2)$ , где  $\sum_i q_i = 1$ , так как  $r(0) = 1$ . Тогда при дискретном распределении  $P(R = \alpha_i) = k^{-1} q_i / \alpha_i^n$ , где  $k = \sum_i q_i / \alpha_i^n$ , порождаемое поле будет иметь НКФ, в точности равную  $h(\rho)$ . Таким образом, построенная модель позволяет приближенно решать задачу синтеза с помощью вариации только распределения вероятностей масштаба  $R$ .

### 3. Дважды стохастическая волновая модель

Описанная выше волновая модель определяет только однородные изображения. Для формирования неоднородных изображений нужно, чтобы параметры модели изменялись по области определения  $S$ . Этого можно достичь, разбивая  $S$  искусственно на части, в каждой из которых волновая модель имеет свой набор параметров. Но, учитывая возможную неопределенность реальных изображений, в [6, 7] рассмотрены «дважды стохастические» модели, в которых одно или несколько авторегрессионных (управляющих) случайных полей задают параметры итогового (управляемого) авторегрессионного поля. Используем эту идею для волновых моделей.

Пусть управляющее поле  $X$  задано моделью (1) с некоторыми значениями своих параметров. Используем для управляемого поля  $Y$  модель этого же вида, но с измененной ПРВ масштабных коэффициентов, зависящей от  $X$ . Возьмем, например,

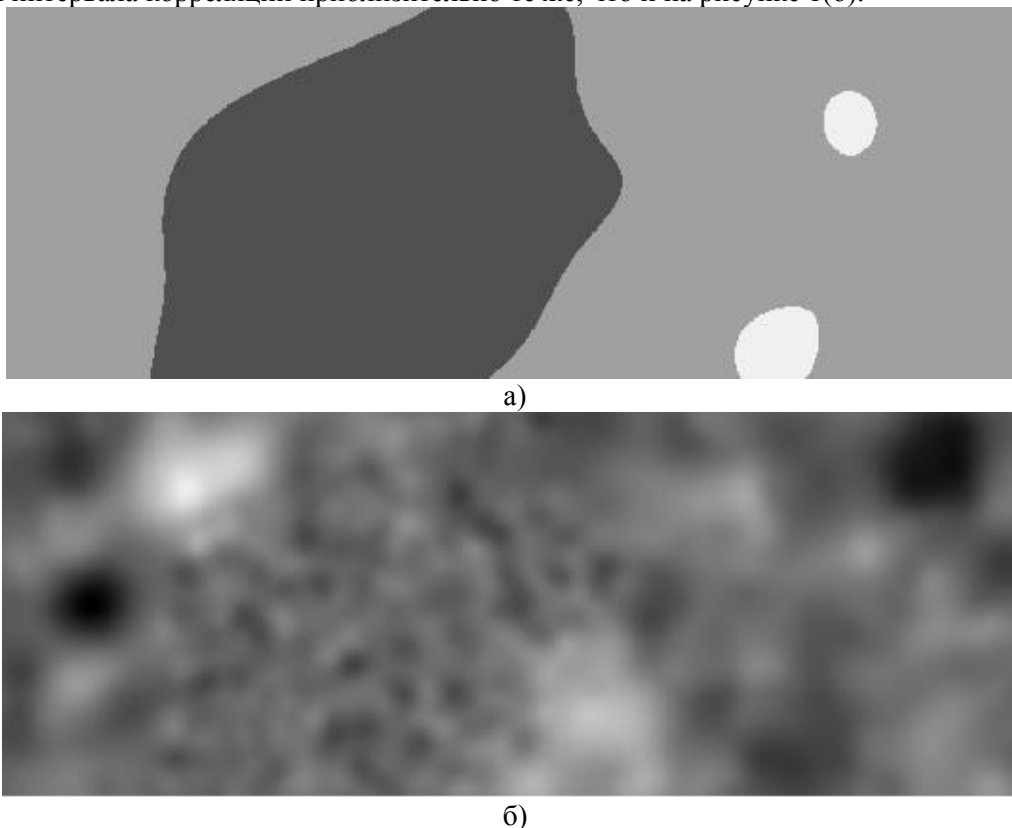
$$R_k^Y = r_m + (x^t(\bar{u}_k) - \min X^t) R_k, \quad (5)$$

где  $X^t$  – поле  $X$  в момент времени  $t$ ;  $\bar{u}_k$  – сформированная точка ПСТ для  $Y^t$ ;  $x^t(\bar{u}_k)$  – значение поля  $X^t$  в этой точке;  $r_m$  – минимально допустимое значение масштаба  $R_k^Y$  для  $Y$ ,  $R_k$  – значение случайного масштаба (при его распределении для поля  $X$ ). Преобразование (5) приводит к соответствующему преобразованию ПРВ  $w_X(\alpha) \rightarrow w_Y(\alpha)$  масштаба поля  $Y$ , которое следует использовать в (3) при вычислении КФ поля  $Y$ . Отметим, что возможны и другие дважды стохастические модели, когда и другие параметры итогового изображения (значение  $c$ , плотность ПСТ и т.д.) определяются одним или несколькими управляющими изображениями.

На рисунке 1 (б) показано изображение  $Y$ , управляемое верхним изображением  $X$  на рисунке 1 (а). Заметно, что более гладкие области изображения  $Y$  соответствуют более светлым областям изображения  $X$ , то есть большим его значениям и большим значениям коэффициента растяжения  $R_k^Y$  волн (3). Выборочное значение интервала абсолютной корреляции в более гладкой области этого изображения равно 87, а менее гладкой только 12.

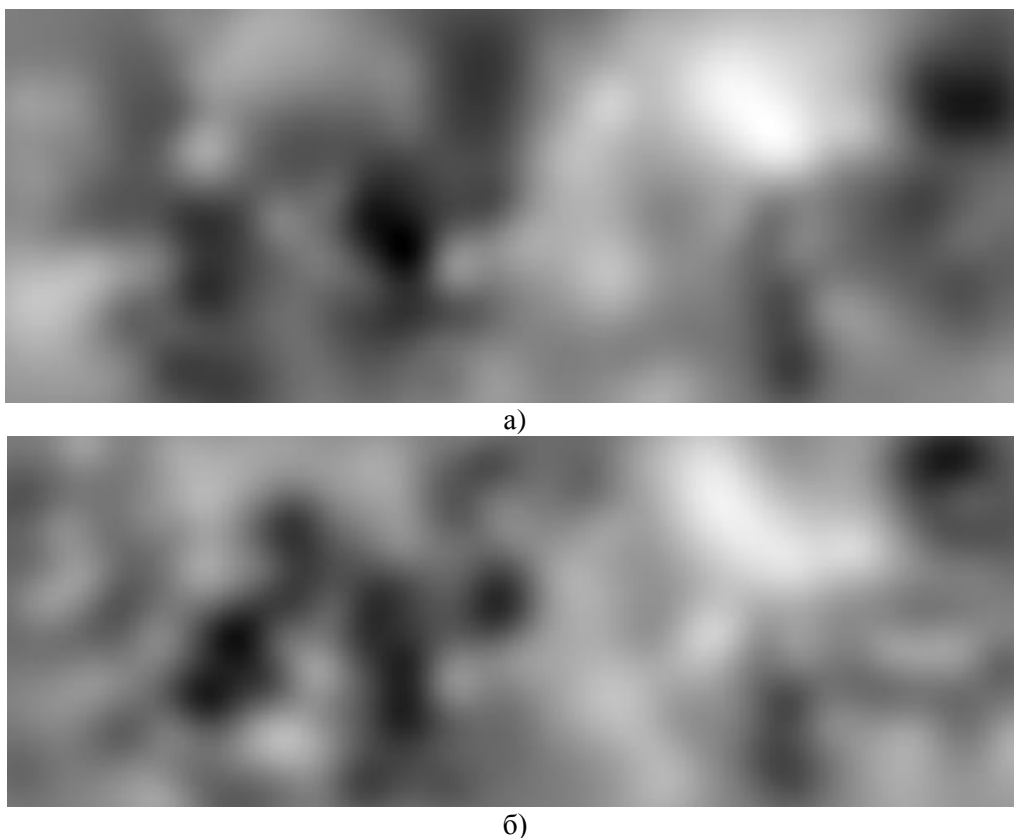
Однако границы между более и менее гладкими областями на  $Y$  размыты, так как волны имеют значительную протяженность и яркость  $X$  изменяется плавно.

В [6] для получения более четких границ на дважды стохастических авторегрессионных изображениях применено квантование управляющего изображения, что обеспечивает скачкообразное изменение параметров управляемого. Этот метод можно применить и для волновых моделей. На рисунке 2 (а) показано квантованное на 3 уровня изображение из рисунка 1 (а). Изображение, управляемое этим квантованным, показано на рисунке 2 (б). Здесь границы между участками различной гладкости более четкие, чем на рисунке 1. Выборочные значения интервала корреляции приблизительно те же, что и на рисунке 1(б).



**Рисунок 2.** Пример имитации дважды стохастических изображений с квантованием: (а) – управляющее изображение, (б) – управляемое изображение.

В описанной модели два изображения неравноправны: одно управляет параметрами другого. В [8] предложена модель авторегрессионных изображений, определенных на цилиндре, совместно управляющих параметрами друг друга. Применим этот подход и для рассматриваемых волновых моделей. Рассмотрим последовательность изображений  $X_1, X_2, X_3, \dots$ . Изображения  $X_1$  и  $Y_1$  формируются так же, как  $X$  и  $Y$  в описанной выше модели. Из  $X_1$  и  $Y_1$  формируется изображение  $X_2 = aX_1 + bY_1$ , которое управляет формированием изображения  $Y_2$ , и так далее. Здесь следует брать  $|a| < 1$ . Этот процесс аналогичен покадровой авторегрессии. В результате в установившемся режиме кадры формируемой последовательности взаимно управляют параметрами друг друга. При увеличении временного интервала между кадрами влияние ослабевает. На рисунке 3 показаны два последовательных изображения, сформированные описанным образом. Визуально заметна их коррелированность (выборочный коэффициент корреляции равен 0.769). Это существенно отличается от однонаправленного управления (рисунок 1), где корреляция между изображениями практически нулевая.



**Рисунок 3.** Пример имитации дважды стохастических изображений со взаимным влиянием.

#### 4. Заключение

В настоящей работе представлены «дважды стохастические» волновые модели случайных полей (изображений). В этих моделях одно волновое случайное поле (управляющее) задаёт параметры второго (управляемого) случайного поля. В результате структура управляемого изображения оказывается существенно различной в разных местах, что дает возможность описывать неоднородные изображения со случайными неоднородностями. Рассмотрены также варианты, когда два и больше полей взаимно влияют друг на друга. Эти модели позволяют представлять и имитировать многомерные неоднородные изображения (и их временные последовательности), а также системы таких изображений со взаимными влияниями.

#### 5. Литература

- [1] Методы компьютерной обработки изображений / под ред. В. А. Соффера. – М.: Физматлит, 2001. – 784 с.
- [2] Визильтер, Ю.В. Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения / Ю.В. Визильтер, С.Ю. Желтов, А.В. Бондаренко, М.В. Осоков, А.В. Моржин. – М.: Физматкнига, 2010. – 672 с.
- [3] Шалыгин, А.С. Прикладные методы статистического моделирования / А.С. Шалыгин, Ю.А. Палагин. – Ленинград: Машиностроение, 1986. – 320 с.
- [4] Васильев, К.К. Статистический анализ последовательностей изображений / К.К. Васильев, В.Р. Крашенинников. – М.: Радиотехника, 2017. – 248 с.
- [5] Krasheninnikov, V.R. Multidimensional Image models and processing / V.R. Krasheninnikov, K.K. Vasil'ev // Intelligent Systems Reference Library. – 2018. – Vol. 135. – P. 11-64.
- [6] Васильев, К.К. Представление и обработка спутниковых многозональных изображений / К.К. Васильев, В.Е. Дементьев. – Ульяновск : УлГТУ, 2017. – 251 с.
- [7] Woods, J.W. Two-dimensional Kalman filtering // Topics in Applied Physic. – 1981. – Vol. 42. – P. 11-64.

- [8] Крашенинников, В.Р. Дважды стохастическая модель квазипериодического процесса в виде изображения на цилиндре / В.Р. Крашенинников, А.Ю. Субботин // Труды Международной научно-технической конференции «Перспективные информационные технологии» (ПИТ 2018). – Самара : Самарский научный центр РАН, 2018. – С. 1017-1021.

## Double stochastic wave models of multidimensional random fields

V.R. Krasheninnikov<sup>1</sup>, A.U. Subbotin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ulyanovsk State Technical University, Severny Venets street 32, Ulyanovsk, Russia, 432027

**Abstract.** In the wave model, a random field is the result of the influence of perturbations (waves) that occur at random times in random places and have random shapes. This model allows to represent and simulate isotropic and anisotropic images (and their temporal sequences) defined on arbitrary areas of multidimensional space, as well as on any surfaces. The problems of correlation analysis and synthesis can be relatively easily solved. However, this model allows to represent only homogeneous fields. In this paper, we consider “double stochastic” wave models, when the first wave random field (control field) sets the parameters of the second (controlled field). As a result, the controlled field becomes non-uniform, since its parameters vary randomly. Therefore, the image texture is significantly different in different places. We also consider options when two fields mutually influence each other. These models allow us to represent and simulate multidimensional inhomogeneous images (and their temporal sequences), as well as systems of such images with mutual correlations.