Двойственные упорядоченные структуры бинарных отношений

В.П. Цветов[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Теория упорядоченных структур, в частности упорядоченных полугрупп бинарных отношений, находит обширные приложения, например, в теории графов, теории автоматов, теории кодирования, теории программирования и теории искусственного интеллекта. В работе рассматриваются алгебраические упорядоченные структуры бинарных отношений, порожденные операциями булевой алгебры и композиции. Водится понятие двойственной к полугруппе бинарных отношений относительно операции дополнения. Исследуются взаимные свойства двойственных операций.

1. Введение

Теория абстрактных алгебраических систем и структур лежит в основе формальных исследований различных прикладных моделей [1-5]. Важную роль в теории алгебраических систем с бинарными операциями играют полугруппы, а в теории упорядоченных множеств – решеточно упорядоченные множества и соответствующие им решетки.

Напомним, что полугруппой называется алгебра с одной ассоциативной бинарной операцией; решеткой – алгебра с двумя ассоциативными и коммутативными бинарными операциями «объединения» и «пересечения», также обладающими свойствами взаимного поглощения; решеточно упорядоченным множеством – упорядоченное множество, в котором каждое конечное подмножество имеет точную верхнюю и нижнюю грани.

Полугруппа, наделенная структурой, в общем случае, частичного порядка, стабильного относительно полугрупповой операции называется упорядоченной. Отношение порядка $\prec$ считается стабильным относительно полугрупповой операции $\circ$, если $\forall u,v,w\, u \prec v \to w \circ u \prec w \circ v \wedge u \circ w \prec v \circ w$. Известно, что любая упорядоченная полугруппа изоморфна некоторой подполугруппе бинарных отношений, упорядоченной относительно теоретико-множественного включения. Таким образом, упорядоченная полугруппа бинарных отношений представляет самостоятельный интерес в классе упорядоченных полугрупп.

Обозначим как $S_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, (\circ, \subseteq) \right\rangle$ - решеточно упорядоченную полугруппу бинарных отношений на универсуме U с операцией композиции и отношением включения, а $L_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, (\cup, \cap) \right\rangle$ - ограниченную дистрибутивную решетку бинарных отношений на универсуме U с операциями пересечения и объединения. Здесь $2^{U\times U}$ обозначает булеан над декартовым произведением $U \times U$. Также напомним, что решетка называется дистрибутивной, если решеточные операции обладают свойством взаимной дистрибутивности, и ограниченной, если в ней существуют нейтральные по решеточным операциям элементы, называемые универсальными гранями решетки. При изучении бинарных отношений обычно оперируют терминами алгебраических систем $S_{R(U\times U)}$, $L_{R(U\times U)}$, то есть не учитывают существование дополнения в структуре $L_{R(U\times U)}$. Тем не менее, многие свойства бинарных отношений удобно формулировать, используя понятие дополнительного элемента. В частности, свойство линейности бинарного отношения R, обычно определяемое равенством $I_{U\times U}\cup R\cup R^{-1}=1_{U\times U}$, бывает удобно определять, как свойство антисимметричности его дополнения $\overline{R}\cap\overline{R}^{-1}\subseteq I_{U\times U}$, или наоборот. Здесь R^{-1} - обратное к бинарному отношению R, $1_{U\times U}=U\times U$ - универсальное бинарное отношение, $I_{U\times U}$ - отношение равенства и нейтральный по операции $\circ$ элемент. Также напомним, что $1_{U\times U}$ и $0_{U\times U}=\varnothing$ являются универсальными верхней и нижней гранями решетки $L_{R(U\times U)}$, соответственно.

2. Алгебраическая структура $h_{R(U\times U)}$

Рассмотрим алгебраическую структуру $h_{R(U\times U)}=\left\langle 2^{U\times U},\left(\cup,\cap,\circ,{}^{-},{}^{-1},\subseteq,0_{U\times U},1_{U\times U},I_{U\times U}\right)\right\rangle$. Нетрудно установить следующие общие свойства ее операций:

$$R_1\cup\left(R_2\cup R_3\right)=\left(R_1\cup R_2\right)\cup R_3; \tag{1}$$

$$R_1\cap\left(R_2\cap R_3\right)=\left(R_1\cap R_2\right)\cap R_3; \tag{2}$$

$$R_1\circ\left(R_2\circ R_3\right)=\left(R_1\circ R_2\right)\circ R_3; \tag{3}$$

$$R_1\cup R_2=R_2\cup R_1; \tag{4}$$

$$R_1\cap R_2=R_2\cap R_1; \tag{5}$$

$$0_{U\times U}\cup R=R; \tag{6}$$

$$1_{U\times U}\cap R=R; \tag{7}$$

$$I_{U\times U}\circ R=R\circ I_{U\times U}=R; \tag{8}$$

$$1_{U\times U}\cup R=1_{U\times U}; \tag{9}$$

$$0_{U\times U}\cap R=0_{U\times U}; \tag{10}$$

$$0_{U\times U}\circ R=R\circ 0_{U\times U}=0_{U\times U}; \tag{11}$$

$$1_{U\times U}\circ 1_{U\times U}=1_{U\times U}; \tag{12}$$

$$R_1\cup\left(R_2\cap R_3\right)=\left(R_1\cup R_2\right)\cap\left(R_1\cup R_3\right); \tag{13}$$

$$R_1\cap\left(R_2\cup R_3\right)=\left(R_1\cap R_2\right)\cup\left(R_1\cap R_3\right); \tag{14}$$

$$R_1\circ\left(R_2\cup R_3\right)=\left(R_1\circ R_2\right)\cup\left(R_1\circ R_3\right); \tag{15}$$

$$\left(R_2\cup R_3\right)\circ R_1=\left(R_2\circ R_1\right)\cup\left(R_3\circ R_1\right); \tag{16}$$

$$R_1\circ\left(R_2\cap R_3\right)\subseteq\left(R_1\circ R_2\right)\cap\left(R_1\circ R_3\right); \tag{17}$$

$$\left(R_2\cap R_3\right)\circ R_1\subseteq\left(R_2\circ R_1\right)\cap\left(R_3\circ R_1\right); \tag{18}$$

$$R_1\cup\left(R_1\cap R_2\right)=R_1; \tag{19}$$

$$R_1\cap\left(R_1\cup R_2\right)=R_1; \tag{20}$$

$$R\cup R=R; \tag{21}$$

$$R\cap R=R; \tag{22}$$

$$\overline{\overline{R}} = R; \tag{23}$$
$$\overline{1}_{U\times U} = 0_{U\times U}; \tag{24}$$
$$\overline{0}_{U\times U} = 1_{U\times U}; \tag{25}$$
$$\overline{R_1 \cup R_2} = \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2; \tag{26}$$
$$\overline{R_1 \cap R_2} = \overline{R}_1 \cup \overline{R}_2; \tag{27}$$
$$\left(R_1 \cup R_2\right)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}; \tag{28}$$
$$\left(R_1 \cap R_2\right)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}; \tag{29}$$
$$\left(R_1 \circ R_2\right)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}; \tag{30}$$
$$\overline{R^{-1}} = \overline{R}^{-1}; \tag{31}$$
$$R_1 \subseteq R_2 \Leftrightarrow R_1 \cup R_2 = R_2 \Leftrightarrow R_1 \cap R_2 = R_1; \tag{32}$$
$$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \cup R_3 \subseteq R_2 \cup R_3; \tag{33}$$
$$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \cap R_3 \subseteq R_2 \cap R_3; \tag{34}$$
$$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3 \wedge R_3 \circ R_1 \subseteq R_3 \circ R_2; \tag{35}$$
$$R_1 \subseteq R_2 \Leftrightarrow \overline{R}_1 \supseteq \overline{R}_2. \tag{36}$$

Сужение сигнатуры $h_{R(U\times U)}$ приводит к следующим стандартным алгебраическим системам.

1. Ограниченное решеточно упорядоченное множество бинарных отношений:
$LO^1_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\subseteq, 0_{U\times U}, 1_{U\times U}\right)\right\rangle$, $LO^2_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\supseteq, 1_{U\times U}, 0_{U\times U}\right)\right\rangle$;

2. Ограниченные решеточно упорядоченные моноиды бинарных отношений;
$M^1_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\cup, \subseteq, 0_{U\times U}, 1_{U\times U}\right)\right\rangle$, $M^2_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\cap, \subseteq, 0_{U\times U}, 1_{U\times U}\right)\right\rangle$,
$M^3_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\cup, \supseteq, 1_{U\times U}, 0_{U\times U}\right)\right\rangle$, $M^4_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\cap, \supseteq, 1_{U\times U}, 0_{U\times U}\right)\right\rangle$,
$M_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\circ, \subseteq, I_{U\times U}, 0_{U\times U}, 1_{U\times U}\right)\right\rangle$;

3. Ограниченные решеточно упорядоченные идемпотентные полукольца с единицей бинарных отношений:
$SR^1_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\cup, \cap, \subseteq, 0_{U\times U}, 1_{U\times U}\right)\right\rangle$, $SR^2_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\cap, \cup, \supseteq, 1_{U\times U}, 0_{U\times U}\right)\right\rangle$,
$SR_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\cup, \circ, \subseteq, 0_{U\times U}, I_{U\times U}\right)\right\rangle$;

4. Булевы алгебры (ограниченные дистрибутивные решетки с дополнением) бинарных отношений:
$B^1_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\cup, \cap, {}^{-}, 0_{U\times U}, 1_{U\times U}\right)\right\rangle$, $B^2_{R(U\times U)} = \left\langle 2^{U\times U}, \left(\cap, \cup, {}^{-}, 1_{U\times U}, 0_{U\times U}\right)\right\rangle$.

Напомним, что моноидом называется полугруппа с нейтральным элементом, а полукольцом – алгебра с двумя ассоциативными операциями, одна из которых условно называется «сложением», а вторая – «умножением». В полукольце умножение дистрибутивно относительно сложения и имеется нейтральный по сложению элемент. Если в полукольце присутствует нейтральный по умножению элемент, то полукольцо называется полукольцом с единицей.

3. Двойственная к полугруппе $S_{R(U\times U)}$

Рассмотрим булев изоморфизм $F(R)=\overline{R}$ алгебр $B^1_{R(U\times U)}$ и $B^2_{R(U\times U)}$. Введем бинарную операцию •, двойственную к операции $\circ$ на $2^{U\times U}$, из соотношения $F(R_1\bullet R_2)=F(R_1)\circ F(R_2)$, т.е. полагая:

$$R_1\bullet R_2=\overline{\overline{R_1}\circ\overline{R_2}}=\{(u_1,u_2)\mid\forall u_3\ (u_1,u_3)\in R_1\vee(u_3,u_2)\in R_2\}. \tag{37}$$

Заметим, что $F(0_{U\times U})=1_{U\times U}$, $F(1_{U\times U})=0_{U\times U}$, $F(I_{U\times U})=\overline{I}_{U\times U}$, и кроме того:

$$R_1\circ R_2=\overline{\overline{R_1}\bullet\overline{R_2}}=\{(u_1,u_2)\mid\exists u_3\ (u_1,u_3)\in R_1\wedge(u_3,u_2)\in R_2\}; \tag{38}$$

$$R_1\bullet(R_2\bullet R_3)=(R_1\bullet R_2)\bullet R_3; \tag{39}$$

$$\overline{I}_{U\times U}\bullet R=R\bullet\overline{I}_{U\times U}=R; \tag{40}$$

$$1_{U\times U}\bullet R=R\bullet 1_{U\times U}=1_{U\times U}; \tag{41}$$

$$0_{U\times U}\bullet 0_{U\times U}=0_{U\times U}; \tag{42}$$

$$R_1\bullet(R_2\cap R_3)=(R_1\bullet R_2)\cap(R_1\bullet R_3); \tag{43}$$

$$(R_2\cap R_3)\bullet R_1=(R_2\bullet R_1)\cap(R_3\bullet R_1); \tag{44}$$

$$R_1\bullet(R_2\cup R_3)\supseteq(R_1\bullet R_2)\cup(R_1\bullet R_3); \tag{45}$$

$$(R_2\cup R_3)\bullet R_1\supseteq(R_2\bullet R_1)\cup(R_3\bullet R_1); \tag{46}$$

$$(R_1\bullet R_2)^{-1}=R_2^{-1}\bullet R_1^{-1}; \tag{47}$$

$$R_1\supseteq R_2\Rightarrow R_1\bullet R_3\supseteq R_2\bullet R_3\wedge R_3\bullet R_1\supseteq R_3\bullet R_2. \tag{48}$$

По построению, полугруппа $S_{R(U\times U)}$ изоморфна $\overline{S}_{R(U\times U)}=\langle 2^{U\times U},(\bullet,\supseteq)\rangle$, также как моноид $M_{R(U\times U)}$ и полукольцо $SR_{R(U\times U)}$ изоморфны моноиду $\overline{M}_{R(U\times U)}=\langle 2^{U\times U},(\bullet,\supseteq,\overline{I}_{U\times U},1_{U\times U},0_{U\times U})\rangle$ и полукольцу $\overline{SR}_{R(U\times U)}=\langle 2^{U\times U},(\cap,\bullet,\supseteq,1_{U\times U},\overline{I}_{U\times U})\rangle$, соответственно.

В дальнейшем, решеточно упорядоченные алгебраические структуры $S_{R(U\times U)}$ и $\overline{S}_{R(U\times U)}$, $M_{R(U\times U)}$ и $\overline{M}_{R(U\times U)}$, $SR_{R(U\times U)}$ и $\overline{SR}_{R(U\times U)}$ будем называть двойственными.

Исходя из характеристических условий, определяющих результат операций $\circ$ и •, можем записать:

$$\begin{aligned}
&u_1R_1\circ(R_2\bullet R_3)u_2\Leftrightarrow\exists u_3\ u_1R_1u_3\wedge u_3(R_2\bullet R_3)u_2\Leftrightarrow\exists u_3\ u_1R_1u_3\wedge(\forall u_4\ u_3R_2u_4\vee u_4R_3u_2)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\exists u_3\forall u_4\ u_1R_1u_3\wedge(u_3R_2u_4\vee u_4R_3u_2)\Leftrightarrow\exists u_3\forall u_4\ (u_1R_1u_3\wedge u_3R_2u_4)\vee(u_1R_1u_3\wedge u_4R_3u_2)\Rightarrow\\
&\Rightarrow\forall u_4\exists u_3\ (u_1R_1u_3\wedge u_3R_2u_4)\vee(u_1R_1u_3\wedge u_4R_3u_2)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\forall u_4\ (\exists u_3\ u_1R_1u_3\wedge u_3R_2u_4)\vee(\exists u_3\ u_1R_1u_3\wedge u_4R_3u_2)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\forall u_4\ u_1R_1\circ R_2u_4\vee(\exists u_3\ u_1R_1u_3\wedge u_4R_3u_2)\Leftrightarrow\forall u_4\ (u_1R_1\circ R_2u_4\vee u_4R_3u_2)\wedge(u_1R_1\circ R_2u_4\vee\exists u_3\ u_1R_1u_3)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow(\forall u_4\ u_1R_1\circ R_2u_4\vee u_4R_3u_2)\wedge(\forall u_4\ u_1R_1\circ R_2u_4\vee\exists u_3\ u_1R_1u_3)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow u_1R_1\circ(R_2\bullet R_3)u_2\wedge(\forall u_4\ u_1R_1\circ R_2u_4\vee\exists u_3\ u_1R_1u_3)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow u_1R_1\circ(R_2\bullet R_3)u_2\wedge((\forall u_4\exists u_3\ u_1R_1\circ R_2u_4)\vee(\exists u_3\ u_1R_1u_3))\Rightarrow u_1R_1\circ(R_2\bullet R_3)u_2\wedge(\exists u_3\ u_1R_1u_3)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow u_1R_1\circ(R_2\bullet R_3)u_2\wedge(u_1\in D_{R_1}),
\end{aligned}$$

где $D_{R_1} = \{u_1 \mid \exists u_3 \; u_1 R_1 u_3\} \subseteq U$ - область определения бинарного отношения R_1. Вводя в рассмотрение бинарное отношение $1_{D_{R_1} \times U} = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \in D_{R_1} \wedge u_2 \in U\} \subseteq U \times U$, можем записать:

$$R_1 \circ (R_2 \bullet R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \bullet R_3 \cap 1_{D_{R_1} \times U}.$$

Учитывая то, что

$$u_1 R_1 \circ 1_{U \times U} u_2 \Leftrightarrow \exists u_3 \; u_1 R_1 u_3 \wedge u_3 1_{U \times U} u_2 \Leftrightarrow \exists u_3 \; u_1 R_1 u_3 \wedge u_2 \in U \Leftrightarrow u_1 \in D_{R_1} \wedge u_2 \in U \Leftrightarrow u_1 1_{D_{R_1} \times U} u_2$$

можем записать:

$$R_1 \circ (R_2 \bullet R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \bullet R_3 \cap R_1 \circ 1_{U \times U}. \tag{49}$$

Аналогично получаем:

$$(R_2 \bullet R_3) \circ R_1 \subseteq R_2 \bullet (R_3 \circ R_1) \cap 1_{U \times U} \circ R_1; \tag{50}$$

$$R_1 \bullet (R_2 \circ R_3) \supseteq (R_1 \bullet R_2) \circ R_3 \cup R_1 \bullet 0_{U \times U}; \tag{51}$$

$$(R_2 \circ R_3) \bullet R_1 \supseteq R_2 \circ (R_3 \bullet R_1) \cup 0_{U \times U} \bullet R_1. \tag{52}$$

Причем,

$$1_{U \times D_{R_1^{-1}}} = 1_{U \times U} \circ R_1;$$

$$1_{\overline{D_{\overline{R}_1}} \times U} = R_1 \bullet 0_{U \times U};$$

$$1_{U \times \overline{D_{\overline{R}_1^{-1}}}} = 0_{U \times U} \bullet R_1.$$

4. Расширение структуры $h_{R(U \times U)}$

Обозначим $O_{U \times U} = \overline{I}_{U \times U}$ и рассмотрим следующее расширение структуры $h_{R(U \times U)}$:

$$H_{R(U \times U)} = \left\langle 2^{U \times U}, \left(\cup, \cap, \bullet, \circ, ^{-}, ^{-1}, \subseteq, 0_{U \times U}, 1_{U \times U}, O_{U \times U}, I_{U \times U}\right)\right\rangle.$$

Для операций и отношения порядка из сигнатуры $H_{R(U \times U)}$ выполняются свойства (1) – (52), с учетом введенного обозначения $O_{U \times U} = \overline{I}_{U \times U}$.

Запишем (49) – (50) в виде:

$$(R_2 \bullet R_3) \circ R_1 \cup R_2 \bullet 0_{U \times U} \subseteq R_2 \bullet (R_3 \circ R_1);$$

$$R_1 \circ (R_2 \bullet R_3) \cup 0_{U \times U} \bullet R_3 \subseteq (R_1 \circ R_2) \bullet R_3.$$

Тогда (47) – (50) можно записать, как:

$$R_1 \circ (R_2 \bullet R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \bullet R_3 \cap R_1 \circ 1_{U \times U};$$

$$R_1 \circ (R_2 \bullet R_3) \cup 0_{U \times U} \bullet R_3 \subseteq (R_1 \circ R_2) \bullet R_3;$$

$$(R_2 \bullet R_3) \circ R_1 \subseteq R_2 \bullet (R_3 \circ R_1) \cap 1_{U \times U} \circ R_1;$$

$$(R_2 \bullet R_3) \circ R_1 \cup R_2 \bullet 0_{U \times U} \subseteq R_2 \bullet (R_3 \circ R_1).$$

Нетрудно понять, что для любых $R_1, R_2, R_3 \in 2^{U \times U}$ имеют место включения:

$$R_1 \circ (R_2 \bullet R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \bullet R_3;$$

$$(R_2 \bullet R_3) \circ R_1 \subseteq R_2 \bullet (R_3 \circ R_1).$$

Нас будет интересовать случай «взаимной ассоциативности»:

$$R_1 \circ (R_2 \bullet R_3) = (R_1 \circ R_2) \bullet R_3 = R_1 \circ R_2 \bullet R_3, \tag{53}$$

$$(R_2 \bullet R_3) \circ R_1 = R_2 \bullet (R_3 \circ R_1) = R_2 \bullet R_3 \circ R_1, \tag{54}$$

и алгебры, замкнутые относительно этого свойства.

Ограничим рассмотрение простейшими сужениями и подалгебрами алгебры $H_{R(U\times U)}$. Обозначим $U_{+1}^{U} \subseteq 2^{U\times U}$ - множество функций из U в U. Очевидно, что $\left\langle U_{+1}^{U}, \left(\circ, \subseteq, I_{U\times U}, 0_{U\times U}\right)\right\rangle$ - ограниченный снизу решеточно упорядоченный подмоноид моноида $M_{R(U\times U)}$.

Покажем, что множество U_{+1}^{U} замкнуто относительно операции $\bullet$.

Предположим сначала, что множество U состоит из одного элемента. Понятно, что в этом случае $U_{+1}^{U} = 2^{U\times U} = \left\{I_{U\times U}, 0_{U\times U}\right\}$, где $I_{U\times U}$ - тождественная, а $0_{U\times U}$ - нигде не определенная функции из U в U, и, следовательно, U_{+1}^{U} замкнуто относительно операции $\bullet$ в силу замкнутости $2^{U\times U}$.

Пусть теперь мощность $|U| > 1$. Предположим, что $R_1, R_2 \in U_{+1}^{U}$, но $R_1 \bullet R_2 \notin U_{+1}^{U}$. В этом случае найдутся $u_1, u_2, u_3 \in U$ такие, что $u_2 \neq u_3$, и сразу для всех $u \in U$ будут выполняться условия $\left((u_1, u) \in R_1 \vee (u, u_2) \in R_2\right) \wedge \left((u_1, u) \in R_1 \vee (u, u_3) \in R_2\right)$. Так как $R_1 \in U_{+1}^{U}$, то может существовать только один элемент $u_0 \in U$ такой, что $(u_1, u_0) \in R_1$. Тогда сразу для всех элементов $u \in U \setminus \{u_0\} \neq \varnothing$ должны выполняться условия $u_2 \neq u_3 \wedge (u, u_2) \in R_2 \wedge (u, u_3) \in R_2$, что противоречит предположению $R_2 \in U_{+1}^{U}$. Что доказывает замкнутость U_{+1}^{U} относительно операции $\bullet$.

Обозначим U^U U_0^U, - множества тотальных функций и тотальных биекций из U в U, соответственно. Очевидно, $U_0^U \subseteq U^U \subseteq U_{+1}^{U}$.

Пусть мощность $|U| = \left|\{u_1, u_2\}\right| = 2$. В таком случае, $\left|2^{U\times U}\right| = 16$, $\left|U_{+1}^{U}\right| = 9$, $\left|U^U\right| = 4$, $\left|U_0^U\right| = 2$.

В таблице 1 приведены результаты численных экспериментов, отражающие нарушение свойств (53) и (54) в рассматриваемом случае.

Таблица 1. Количество нарушений свойств взаимной ассоциативности операций $\circ$, $\bullet$.

$R_1, R_2, R_3 \in W$	$R_1 \circ (R_2 \bullet R_3) \neq (R_1 \circ R_2) \bullet R_3$	$(R_2 \bullet R_3) \circ R_1 \neq R_2 \bullet (R_3 \circ R_1)$
$W = 2^{U\times U}$	874 из 4096	874 из 4096
$W = U_{+1}^{U}$	90 из 729	20 из 729
$W = U^U$	0 из 64	0 из 64
$W = U^U \cup \{0_{U\times U}\}$	10 из 75	4 из 75
$W = U^U \cup \{1_{U\times U}\}$	4 из 75	10 из 75
$W = U^U \cup \{0_{U\times U}, 1_{U\times U}\}$	24 из 216	24 из 216
$W = U_0^U$	0 из 8	0 из 8
$W = U_0^U \cup \{0_{U\times U}\}$	0 из 27	0 из 27
$W = U_0^U \cup \{1_{U\times U}\}$	0 из 27	0 из 27
$W = U_0^U \cup \{0_{U\times U}, 1_{U\times U}\}$	6 из 64	6 из 64

Ниже приведены таблицы Кэли, задающие операции $\circ$ и $\bullet$ на множестве $U_0^U \cup \{0_{U\times U}, 1_{U\times U}\} = \{O_{U\times U}, I_{U\times U}, 0_{U\times U}, 1_{U\times U}\}$.

Таблица 2. Таблица Кэли операции $\circ$ на множестве $U_0^U \cup \{0_{U\times U}, 1_{U\times U}\}$.

$\circ$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$1_{U\times U}$
$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$1_{U\times U}$
$I_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$1_{U\times U}$
$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$
$1_{U\times U}$	$1_{U\times U}$	$1_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$1_{U\times U}$

Таблица 3. Таблица Кэли операции $\bullet$ на множестве $U_0^U \cup \{0_{U\times U}, 1_{U\times U}\}$.

$\bullet$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$1_{U\times U}$
$O_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$1_{U\times U}$
$I_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$1_{U\times U}$
$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$1_{U\times U}$
$1_{U\times U}$	$1_{U\times U}$	$1_{U\times U}$	$1_{U\times U}$	$1_{U\times U}$

Ниже приведены случаи нарушения свойств (53) и (54) взаимной ассоциативности операций $\circ$ и $\bullet$ на множестве $U_0^U \cup \{0_{U\times U}, 1_{U\times U}\}$.

$R_1 \circ (R_2 \bullet R_3) \neq (R_1 \circ R_2) \bullet R_3$:

$1_{U\times U} \circ (I_{U\times U} \bullet 0_{U\times U}) = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = (1_{U\times U} \circ I_{U\times U}) \bullet 0_{U\times U}$,

$1_{U\times U} \circ (O_{U\times U} \bullet 0_{U\times U}) = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = (1_{U\times U} \circ O_{U\times U}) \bullet 0_{U\times U}$,

$0_{U\times U} \circ (I_{U\times U} \bullet 1_{U\times U}) = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = (0_{U\times U} \circ I_{U\times U}) \bullet 1_{U\times U}$,

$0_{U\times U} \circ (O_{U\times U} \bullet 1_{U\times U}) = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = (0_{U\times U} \circ O_{U\times U}) \bullet 1_{U\times U}$,

$0_{U\times U} \circ (0_{U\times U} \bullet 1_{U\times U}) = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = (0_{U\times U} \circ 0_{U\times U}) \bullet 1_{U\times U}$,

$0_{U\times U} \circ (1_{U\times U} \bullet 1_{U\times U}) = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = (0_{U\times U} \circ 1_{U\times U}) \bullet 1_{U\times U}$;

$(R_2 \bullet R_3) \circ R_1 \neq R_2 \bullet (R_3 \circ R_1)$:

$(0_{U\times U} \bullet I_{U\times U}) \circ 1_{U\times U} = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = 0_{U\times U} \bullet (I_{U\times U} \circ 1_{U\times U})$,

$(0_{U\times U} \bullet O_{U\times U}) \circ 1_{U\times U} = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = 0_{U\times U} \bullet (O_{U\times U} \circ 1_{U\times U})$,

$(1_{U\times U} \bullet I_{U\times U}) \circ 0_{U\times U} = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = 1_{U\times U} \bullet (I_{U\times U} \circ 0_{U\times U})$,

$(1_{U\times U} \bullet O_{U\times U}) \circ 0_{U\times U} = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = 1_{U\times U} \bullet (O_{U\times U} \circ 0_{U\times U})$,

$(1_{U\times U} \bullet 0_{U\times U}) \circ 0_{U\times U} = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = 1_{U\times U} \bullet (0_{U\times U} \circ 0_{U\times U})$,

$(1_{U\times U} \bullet 1_{U\times U}) \circ 0_{U\times U} = 0_{U\times U} \neq 1_{U\times U} = 1_{U\times U} \bullet (1_{U\times U} \circ 0_{U\times U})$.

Понятно, что $\langle U_0^U, (\bullet) \rangle$ и $\langle U_0^U, (\circ) \rangle$ - абелевы группы G_2 с нейтральными элементами $O_{U\times U}$ и $I_{U\times U}$, соответственно. Кроме того, $\langle U_0^U \cup \{0_{U\times U}\}, (\cap, \bullet, \circ, ^{-1}, \subseteq, 0_{U\times U}, O_{U\times U}, I_{U\times U}) \rangle$ - ограниченная снизу взаимно ассоциативная структура, $\langle U_0^U \cup \{1_{U\times U}\}, (\cup, \bullet, \circ, ^{-1}, \subseteq, 1_{U\times U}, O_{U\times U}, I_{U\times U}) \rangle$ - ограниченная сверху взаимно ассоциативная структура.

Приведем еще несколько примеров взаимно ассоциативных структур. Как и прежде, будем считать, что $|U| = |\{u_1, u_2\}| = 2$.

Рассмотрим подмножество $F_1 \subseteq U_{+1}^U$, состоящее из частичных и тотальных функций, заданных при помощи графиков: $O_{U\times U} = \{(u_1,u_2),(u_2,u_1)\}$, $I_{U\times U} = \{(u_1,u_1),(u_2,u_2)\}$, $0_{U\times U} = \varnothing$, $f_1 = \{(u_1,u_1)\}$, $f_2 = \{(u_1,u_2)\}$, $f_3 = \{(u_2,u_1)\}$, $f_4 = \{(u_2,u_3)\}$.

Операции $\circ$ и $\bullet$ на множестве F_1 задаются следующими таблицами Кэли.

Таблица 4. Таблица Кэли операции $\circ$ на множестве F_1.

$\circ$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_1	f_2	f_3	f_4
$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_3	f_4	f_1	f_2
$I_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_1	f_2	f_3	f_4
$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$
f_1	f_2	f_1	$0_{U\times U}$	f_1	f_2	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$
f_2	f_1	f_2	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_1	f_2
f_3	f_4	f_3	$0_{U\times U}$	f_3	f_4	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$
f_4	f_3	f_4	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_3	f_4

Таблица 5. Таблица Кэли операции $\bullet$ на множестве F_1.

$\bullet$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_1	f_2	f_3	f_4
$O_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_1	f_2	f_3	f_4
$I_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_3	f_4	f_1	f_2
$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$
f_1	f_1	f_2	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_1	f_2
f_2	f_2	f_1	$0_{U\times U}$	f_1	f_2	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$
f_3	f_3	f_4	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$	f_3	f_4
f_4	f_4	f_3	$0_{U\times U}$	f_3	f_4	$0_{U\times U}$	$0_{U\times U}$

Легко проверить, что $\left\langle F_1,\left(\cap,\bullet,\circ,^{-1},\subseteq,0_{U\times U},O_{U\times U},I_{U\times U}\right)\right\rangle$ - ограниченная снизу взаимно ассоциативная структура.

Также рассмотрим подмножество $F_2 \subseteq U_{+1}^U$, состоящее из тотальных функций, заданных при помощи графиков: $O_{U\times U} = \{(u_1,u_2),(u_2,u_1)\}$, $I_{U\times U} = \{(u_1,u_1),(u_2,u_2)\}$, $g_1 = \{(u_1,u_1),(u_2,u_1)\}$, $g_2 = \{(u_1,u_2),(u_2,u_2)\}$.

Операции $\circ$ и $\bullet$ на множестве F_2 задаются следующими таблицами Кэли.

Таблица 6. Таблица Кэли операции $\circ$ на множестве F_2.

$\circ$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	g_1	g_2
$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	g_1	g_2
$I_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	g_1	g_2
g_1	g_2	g_1	g_1	g_2
g_2	g_1	g_2	g_1	g_2

Таблица 7. Таблица Кэли операции $\bullet$ на множестве F_2.

$\bullet$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	g_1	g_2
$O_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	g_1	g_2
$I_{U\times U}$	$I_{U\times U}$	$O_{U\times U}$	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2	g_1	g_2
g_2	g_2	g_1	g_1	g_2

Как и в предыдущем случае, легко проверить, что $\left\langle F_2,\left(\bullet,\circ,\subseteq,O_{U\times U},I_{U\times U}\right)\right\rangle$ - тривиально упорядоченная неограниченная взаимно ассоциативная структура.

Исходя из соотношений двойственности (37), (38), можем записать:

$$R_1\circ\left(R_2\bullet R_3\right)=\left(R_1\circ R_2\right)\bullet R_3\Leftrightarrow\overline{R}_1\bullet\left(\overline{R}_2\circ\overline{R}_3\right)=\left(\overline{R}_1\bullet\overline{R}_2\right)\circ\overline{R}_3; \tag{55}$$

$$\left(R_2\bullet R_3\right)\circ R_1=R_2\bullet\left(R_3\circ R_1\right)\Leftrightarrow\left(\overline{R}_2\circ\overline{R}_3\right)\bullet\overline{R}_1=\overline{R}_2\circ\left(\overline{R}_3\bullet\overline{R}_1\right). \tag{56}$$

Рассмотрим подмножества $\overline{F_1},\overline{F_2}\subseteq 2^{U\times U}$, состоящие из бинарных отношений, дополнительных к функциям из $F_1,F_2\subseteq U_{+1}^{U}$:

$$\overline{F_1}=\left\{O_{U\times U},I_{U\times U},1_{U\times U},\overline{f_1},\overline{f_2},\overline{f_3},\overline{f_4}\right\};\ \overline{F_2}=\left\{O_{U\times U},I_{U\times U},\overline{g_1},\overline{g_2}\right\}.$$

На основании (55), (56) можем заключить, что $\left\langle\overline{F_1},\left(\cup,\bullet,\circ,^{-1},\subseteq,1_{U\times U},O_{U\times U},I_{U\times U}\right)\right\rangle$, $\left\langle\overline{F_2},\left(\bullet,\circ,\subseteq,O_{U\times U},I_{U\times U}\right)\right\rangle$ - упорядоченные взаимно ассоциативные структуры.

Заметим, что рассмотренные взаимно ассоциативные структуры не являются ограниченными и решеточно упорядоченными.

5. Заключение

В работе рассмотрены алгебраические структуры, построенные на основе булева изоморфизма упорядоченных полугрупп бинарных отношений и изучены их свойства. Полученные результаты могут найти применение в теории графов, теории автоматов, теоретической информатике и в смежных с ними областях.

6. Литература

[1] Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М.: Мир, 1972.

[2] Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – М.: Наука, 1984.– 568 с.

[3] Фукс, Л. Частично упорядоченные алгебраические системы / Л. Фукс. – М.: Мир, 1965.– 342 с.

[4] Ершов, А.П. Абстрактная вычислимость в алгебраических системах // Материалы Междунар. симпоз. «Алгоритмы в современной математике и ее приложениях» в 2-х ч., Ургенч, 16–22 сент. 1979. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982. – Ч. 2. – С. 194-299.

[5] Махортов, С.Д. Алгебраическая система на решетке типов для верификации и рефакторинга / С.Д. Махортов, М.Д Шурлин // Труды тринадцатой национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2012 в 2-х т., 16–20 октября 2012, Белгород, Россия. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2012. – Т. 1. – С. 51-58.

Dual ordered structures of binary relations

V.P. Tsvetov[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoye shosse, 34, Samara, Russia, 443086

Abstract. The theory of ordered structures like a lattice ordered semigroups is applied to graphs and automatons as well as to coding, programming and artificial intelligence. In this paper an algebraic structure of binary relations with the set of operations of Boolean algebra and inverse and composition is considered. It is defined a dual semigroup to the binary relations semigroup, and then the general properties of dual operations are studied.

Keywords: binary relations, ordered semigroups, ordered structures, Boolean algebra, Boolean isomorphism.