

# Эффект Холла для пучков с круговой поляризацией

В.Д. Зайцев  
Самарский национальный  
исследовательский университет им.  
академика С.П. Королева  
Самара, Россия  
zaicev-vlad@yandex.ru

С.С. Стафеев  
Самарский национальный  
исследовательский университет им.  
академика С.П. Королева  
Самара, Россия  
sergey.stafeev@gmail.com

В.В. Котляр  
Институт систем обработки  
изображений – филиал Федерального  
научно-исследовательского центра  
«Кристаллография и фотоника» РАН  
Самара, Россия  
kotlyar@ipsiras.ru

**Аннотация** — Используя уравнения Ричардса–Вольфа, мы теоретически рассмотрели фокусировку света с круговой поляризацией плоскими дифракционными линзами. Мы обнаружили, что в фокусе циркулярно поляризованного лазерного пучка наблюдаются круги разного радиуса с центром на оптической оси, где векторы поляризации вращаются в противоположных направлениях. Этот эффект можно назвать радиальным спиновым эффектом Холла, так как свет с разным знаком спина в фокусе имеет место на разных световых кольцах с одним центром на оптической оси.

**Ключевые слова**— эффект Холла круговая поляризация, уравнения Ричардса–Вольфа, острая фокусировка света.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Острая фокусировка обращает на себя внимание исследователей ввиду различных эффектов, которые не проявляются (либо проявляются незначительно) при фокусировке света линзами с малыми числовыми апертурами. Например, в фокусе можно наблюдать сложные картины поперечных потоков энергии [1–4], конверсию поляризации [5–7], а при рассмотрении интенсивности в фокусе можно наблюдать фокусные пятна различной формы [8–10].

В данной работе, применяя подход Ричардса–Вольфа, теоретически рассмотрена фокусировка света с круговой поляризацией плоскими дифракционными линзами. При острой фокусировке света были обнаружены круги разного радиуса с центром на оптической оси, где векторы поляризации вращаются в противоположных направлениях – так называемый эффект Холла.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Поле вблизи острого фокуса может быть описано с помощью интеграла Ричардса–Вольфа [5]:

$$\mathbf{U}(\rho, \psi, z) = -\frac{if}{\lambda} \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} B(\theta, \varphi) T(\theta) \mathbf{P}(\theta, \varphi) \times \exp\{ik[\rho \sin \theta \cos(\varphi - \psi) + z \cos \theta]\} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (1)$$

где  $\mathbf{U}(\rho, \psi, z)$  — напряжённость электрического или магнитного поля,  $B(\theta, \varphi)$  — амплитуда электрического или магнитного поля в выходном зрачке широкоапертурной оптической системы ( $\theta$  — полярный угол,  $\varphi$  — азимутальный),  $T(\theta)$  — функция аподизации линзы,  $f$  — фокусное расстояние,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны (в моделировании считалась равной 633 нм),  $\theta_0$  — максимальный полярный угол, определяемый числовой апертурой линзы ( $NA = \sin \theta_0$ ),  $\mathbf{P}(\theta, \varphi)$  — вектор поляризации, для напряжённости электрического и магнитного полей имеющий вид:

$$\mathbf{P}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \cos \varphi \end{bmatrix} a(\theta, \varphi) + \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \varphi (\cos \theta - 1) \\ 1 + \sin^2 \varphi (\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \sin \varphi \end{bmatrix} b(\theta, \varphi), \quad (2)$$

где  $a(\theta, \varphi)$  и  $b(\theta, \varphi)$  — функции, описывающие состояние поляризации  $x$ - и  $y$ -компонент напряжённости фокусируемого пучка.

Так как интенсивность и осевой поток энергии для света с левой и правой круговой поляризацией одинаковы, то будем рассматривать только одну правую поляризацию, вектор Джонса для которой имеет вид:

$$\mathbf{E}_R = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \frac{A(\theta)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $A(\theta)$  — начальная амплитуда поля, зависящая только от полярного угла.

Проекции вектора напряжённости электрического поля вблизи фокуса для начального поля (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{x,R} &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (I_{0,0} + e^{2i\varphi} I_{2,2}), \\ E_{y,R} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{0,0} - e^{2i\varphi} I_{2,2}), \\ E_{z,R} &= -\sqrt{2} e^{i\varphi} I_{1,1}. \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$I_{\nu,\mu} = \left(\frac{\pi f}{\lambda}\right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{3-\nu} \left(\frac{\theta}{2}\right) \times T(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_{\mu}(x) d\theta, \quad (5)$$

где,  $x = kr \sin \theta$ ,  $J_{\mu}(x)$  — функция Бесселя первого рода.

Из уравнений (4) видно, что отдельные поперечные составляющие интенсивности ненулевые на оси и несимметричны относительно азимутального угла  $\varphi$ , в то время как продольная составляющая интенсивности имеет вид симметричного кольца с нулем при  $r = 0$ .

Из (4) можно получить распределение интенсивности в фокусе для начального поля (3):

$$I_R(r, z=0) = I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{1,1}^2. \quad (6)$$

Из (6) видно, что фокусное пятно для света с круговой поляризацией (3) имеет круглую форму, так

как распределение интенсивности (6) зависит только от радиальной переменной  $r$ . Из уравнения (6) видно, что такой же подход может быть применен и для круговой поляризации.

Рассмотрим поведение поляризации в окрестности острого фокуса для этого случая. Непосредственно в плоскости фокуса при  $z=0$  поляризация остается линейной. Состояние поляризации можно охарактеризовать вектором Стокса или спиновым угловым моментом. Наличие круговой поляризации в поперечном сечении пучка показывает третья компонента вектора Стокса  $s_3$  или продольная компонента  $SAM_z$  спинового углового момента (СУМ), они равны друг другу и равны:

$$SAM_z = s_3 = 2\text{Im}(E_x^* E_y). \quad (7)$$

С помощью формул (4) можно показать, что непосредственно в фокусе:

$$SAM_z = I_{0,0}^2 - I_{2,2}^2. \quad (8)$$

Из уравнения (8) видно, что есть области, где продольная компонента спинового углового момента меняет знак. Вблизи оптической оси  $SAM_z$  положительная, так как  $I_{0,0}^2 > I_{2,2}^2$ . А на окружности некоторого радиуса, когда выполняется условие  $I_{0,0}^2 < I_{2,2}^2$  продольная компонента вектора плотности спина  $SAM_z$  становится отрицательной. Таким образом, в плоскости фокуса должна наблюдаться смена направления вращения круговой поляризации: вблизи оптической оси остается начальная правая круговая поляризация (3), а на некотором удалении от оптической оси появляется световое кольцо с левой круговой поляризацией. Этот эффект можно назвать радиальным спиновым эффектом Холла, так как свет с разным знаком спина в фокусе имеет место на разных световых кольцах с одним центром на оптической оси.

Отметим также, что на некотором расстоянии от плоскости фокуса можно считать, что  $e^{ikz \cos \theta} \approx 1 + ikz \cos \theta$ , тогда уравнение (5) можно представить в виде

$$I_{v,\mu} = Ir_{v,\mu} + ikz Ii_{v,\mu}, \quad (9)$$

где

$$Ir_{v,\mu} = \left( \frac{\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{v+1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-v} \left( \frac{\theta}{2} \right) \times T(\theta) A(\theta) J_\mu(x) d\theta, \quad (10)$$

$$Ii_{v,\mu} = \left( \frac{\pi f}{\lambda} \right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{v+1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-v} \left( \frac{\theta}{2} \right) \times T(\theta) A(\theta) \cos \theta J_\mu(x) d\theta. \quad (11)$$

Тогда, вместо (8) можно записать:

$$SAM_z = (Ir_{0,0}^2 - Ir_{2,2}^2) + (kz)^2 (Ii_{0,0}^2 - Ii_{2,2}^2). \quad (12)$$

Из уравнения (12) видно, что до фокуса и после фокуса картина СУМ одинаковая, и разница от распределения в фокусе в том, что первое световое кольцо с отрицательным СУМ ( $SAM_z < 0$ ) будет иметь больший радиус, чем в фокусе.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя уравнения Ричардса-Вольфа, теоретически рассмотрена фокусировка света с круговой поляризацией плоскими дифракционными линзами. Показано, что в фокусе циркулярно поляризованного оптического пучка образуются круговые области разного радиуса с центром на оптической оси с чередующимися направлениями вращения вектора поляризации (по часовой стрелке и против часовой стрелки). Такое зависящее от радиуса разделение противоположно направленных «спинов» является проявлением радиального спинового эффекта Холла в фокусе. Потенциальные области применения следующие: фокус с плоской вершиной может найти применение в микроскопии для получения однородного поля зрения, тогда как эффект Холла с радиальным вращением можно использовать для установки поглощающих микрочастиц в противоположное положение. одноручное вращение за счет частичной передачи им спинового углового момента света.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-22-00265.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kotlyar, V.V. Tight focusing with a binary microaxicon / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, L. O'Faolain // Optics Letters – 2011. – Vol. 36(16). – P. 3100-3102
- [2] Volotovskiy, S.G. Influence of Vortex Transmission Phase Function on Intensity Distribution in the Focal Area of High-Aperture Focusing System / S.G. Volotovskiy, N.L. Kazanskiy, S. N. Khonina // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). – 2011. – Vol. 20(1). – P. 23-42.
- [3] Dorn, R. Sharper Focus for a Radially Polarized Light Beam / R. Dorn, S. Quabis, G. Leuchs // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 91. – P. 233901.
- [4] Grosjean, T. Longitudinally polarized electric and magnetic optical nano-needles of ultra high lengths / T. Grosjean, I. Gauthier // Opt. Commun. – 2013. – Vol. 294. – P. 333-337.
- [5] Guan, J. Transversely polarized sub-diffraction optical needle with ultra-long depth of focus / J. Guan, J. Lin, C. Chen, Y. Ma, J. Tan, P. Jin // Opt. Commun. – 2017. – Vol. 404. – P.118-123.
- [6] Yu, Y. Engineering of multi-segmented light tunnel and flattop focus with designed axial lengths and gaps / Y. Yu, H. Huang, M. Zhou, Q. Zhan // Opt. Commun. – 2018. – Vol. 407. – P. 398-401.
- [7] Zheng, C. Characterization of the focusing performance of axial line-focused spiral zone plates / C. Zheng, S. Su, H. Zang, Z. Ji, Y. Tian, S. Chen, K. Mu, L. Wei, Q. Fan, C. Wang, X. Zhu, C. Xie, L. Cao, E. Liang // Appl. Opt. – 2018. – Vol. 57(14). – P. 3802-3807.
- [8] Lin, J. Generation of longitudinally polarized optical chain by 4  $\pi$  focusing system / J. Lin, R. Chen, P. Jin, M. Cada, Y. Ma // Opt. Commun. – 2015. – Vol. 340. – P. 69-73.
- [9] Yu, Y. Generation of uniform three-dimensional optical chain with controllable characteristics / Y. Yu, Q. Zhan // J. Opt. – 2015. – Vol. 17(10). – 105606.
- [10] Xiaoqiang, Z. Focusing properties of cylindrical vector vortex beams / Z. Xiaoqiang, C. Ruishan, W. Anting // Opt. Commun. – 2018. – Vol. 414. – P. 10-15.