Исследование оптимальности номинальной программы переориентации наноспутника

А.С. Чекашов[1], А.В. Крамлих[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Наноспутники имеют серьезные ограничения по запасу энергии на борту. Поэтому требуется найти такой метод построения номинальной траектории переориентации, который будет оптимально использовать имеющиеся на борту ресурсы. В данной работе рассматривается процесс построения номинальной траектории переориентации наноспутника в плоскости орбиты. Задача построения номинальной траектории переориентации была решена методом обратной задачи динамики и с применением принципа максимума Понтрягина. Было проведено сравнение результатов, полученных при помощи этих двух методов. В результате было замечено, что решение, полученное методом обратной задачи динамики, близко к решению, полученному при помощи принципа максимума Понтрягина. Это позволяет говорить об оптимальности метода обратной задачи динамики.

1. Введение

Для наноспутников (НС), располагающих небольшим количеством энергии на борту, важным является тот фактор, чтобы на процесс переориентации уходило как можно меньше энергии, то есть чтобы процесс переориентации был оптимальным по энергопотреблению. При этом алгоритм, по которому рассчитывается и строится номинальная траектория переориентации, должен быть экономичным в плане затрат вычислительных мощностей, имеющихся на борту НС. Следовательно, метод построения номинальной траектории переориентации нужно выбирать согласно двум условиям, описанным выше.

Одним из таких методов является метод обратной задачи динамики. Главным достоинством является его простота: управление, получаемое в результате решения, является аналитической функцией времени, вид которой зависит от граничных условий и заданного времени процесса переориентации. Однако в работах, посвященных изучению данного метода, не исследуется его оптимальность по какому-либо критерию [1, 2].

Целью данной работы является исследование оптимальности метода обратной задачи динамики применительно к процессу переориентации наноспутника.

2. Описание математической модели и исходные данные

Для описания пространственного движения НС введем траекторную систему координат: центр O находится в центре масс НС, ось $OX_к$ совпадает с вектором скорости НС, ось $OZ_к$ перпендикулярна вектору скорости НС и направлена от поверхности планеты, ось $OY_к$ перпендикулярна плоскости орбиты и дополняет систему до правой (рисунок 1) [3].

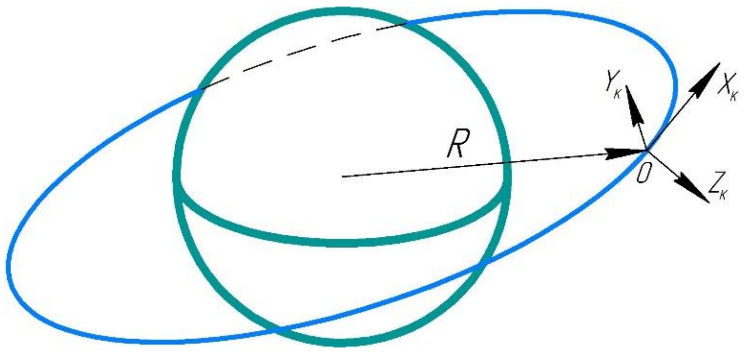

Рисунок 1. Траекторная система координат.

Прежде чем приступить к описанию математической модели, введем некоторые допущения и опишем характеристики НС и параметры его орбиты. Примем, что НС движется по круговой орбите высотой H = 400 км. В качестве маневра для исследования примем разворот НС на 180 градусов в плоскости орбиты. Будем считать, что в начальный момент времени НС вращается с некоторой угловой скоростью. Цель — совместить продольную ось НС с осью $OX_к$ траекторной системы координат. С учетом этого запишем граничные условия:

$$\begin{cases} \alpha(0) = 180 \text{ град}, \dot{\alpha}(0) = 2 \ {}^{\text{град}}\!/_{\text{с}} \\ \alpha(T) = \dot{\alpha}(T) = 0 \end{cases}.$$

Время разворота НС примем четверть витка. Для орбиты высотой 400 км пролет четверти витка занимает T = 1400 с. При таком времени процесс переориентации можно считать быстрым относительно периода движения НС по орбите, поэтому мы можем пренебречь снижением высоты полета вследствие действия возмущающих сил.

В качестве исследуемого НС выберем наноспутник формата CubeSat-3U. На управление накладывается ограничение, обусловленное максимальным моментом, который могут создавать управляющие органы НС. Характеристики НС приведены в таблице 1.

Таблица 1. Массогабаритные и инерционные характеристики НС.

Характеристики НС	Величина
Масса m, кг	2
Поперечный момент инерции I_n, кг·м^2	0.01975
Продольный момент инерции I_x, кг·м^2	0.004
Длина L, м	0.3
Площадь миделя S, м^2	0.01
Запас статической устойчивости Δ	0.06
Максимальный управляющий момент $u_{\max}$, Н·м	$5 \cdot 10^{-6}$

Для исследования плоского движения НС вокруг центра масс будем использовать модель движения в плоскости круговой орбиты. Модель использует ТСК, введенную ранее, и описывает изменение угла атаки динамически симметричного НС под действием гравитационного и аэродинамического моментов [4]:

$$\ddot{\alpha} = \frac{k_a}{I_n}\sin\alpha + \frac{k_g}{I_n}\sin 2\alpha + \frac{u(t)}{I_n}, \tag{1}$$

где $k_a = c_x(\alpha) S_m L q \Delta x$ – коэффициент аэродинамического момента; $c_x(\alpha) = c_{x_0}\left(|\cos\alpha| + \frac{4k}{\pi}|\sin\alpha|\right)$ – коэффициент лобового сопротивления НС, усредненный по углу собственного вращения; k – отношение площади боковой поверхности НС к его характерной площади; L – характерный размер (длина НС); $k_g = \frac{3}{2}(I_n - I_x)\omega^2$ – коэффициент гравитационного момента; I_n – поперечный момент инерции НС; I_x – продольный момент инерции НС; $\omega = \frac{\mu}{R^3}$ – угловая скорость движения НС по орбите; $u(t)$ – управляющий момент.

Так как мы ввели допущение о том, что мы пренебрегаем снижением высоты полета НС, коэффициент гравитационного момента будет оставаться постоянным в течение всего процесса переориентации, а коэффициент гравитационного момента будет зависеть только от текущего угла атаки. Целью является найти такую номинальную траекторию и соответствующий ей управляющий момент $u(t)$, который обеспечит перевод НС из начального положения в конечное за определенный интервал времени Tи будет удовлетворять выбранному критерию оптимальности.

3. Решение задачи построения номинальной траектории переориентации

Решение задачи построение номинальной траектории переориентации проведем при помощи двух методов: метода обратной задачи динамики и принципа максимума Понтрягина.

3.1. Метод обратной задачи динамики

Перепишем уравнение плоского движения в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \alpha_2, & \alpha_1(0) = \alpha_{1_0},\ \alpha_1(T) = \alpha_{1_k} \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{k_a}{I_n}\sin\alpha_1 + \frac{k_g}{I_n}\sin 2\alpha_1 + \frac{u(t)}{I_n}, & \alpha_2(0) = \alpha_{2_0},\ \alpha_2(T) = \alpha_{2_k}\ . \\ |u| \le u_{\max} \end{cases} \tag{2}$$

Управление будем строить на основе полинома третьей степени:

$$P(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3.$$

Здесь коэффициенты c_1, c_2 вычисляются из начальных условий:

$$c_1 = \alpha_{1_0},\ c_2 = \alpha_{2_0},$$

а c_3, c_4 – из конечных условий:

$$P(T) = \alpha_{1_к},\ \frac{dP(T)}{dt} = \alpha_{2_к}.$$

Управляющий момент, получаемый в результате решения данной задачи, запишется в следующем виде:

$$u(t) = I_n\left[2c_3 + 6c_4 t - \left(\frac{k_a}{I_n}\sin\left(P(t)\right) + \frac{k_g}{I_n}\sin\left(2P(t)\right)\right)\right]. \tag{3}$$

Проведем численное моделирование процесса переориентации с параметрами движения и характеристиками наноспутника, приведенными в разделе 2. Результаты моделирования приведены на рисунках 2 и 3.

В качестве критерия оценки энергии, затрачиваемой на переориентацию НС, примем интеграл от функции управляющего момента $u(t)$. В данном случае он будет равен

$$E = \int_0^T u(t)dt = 1{,}261\cdot 10^{-3}\ \text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}.$$

Преимуществами метода обратной задачи динамики является его простота и то, что он дает зависимость управляющего момента от времени в аналитическом виде, что упрощает построение номинальной траектории переориентации для различных граничных условий. Основным же ее недостатком является то, что отсутствуют какие-либо сведения об оптимальности решения. Для оценки оптимальности решения, полученного при помощи данного метода, проведем построение номинальной траектории переориентации при помощи метода, решение по которому будет считаться оптимальным.

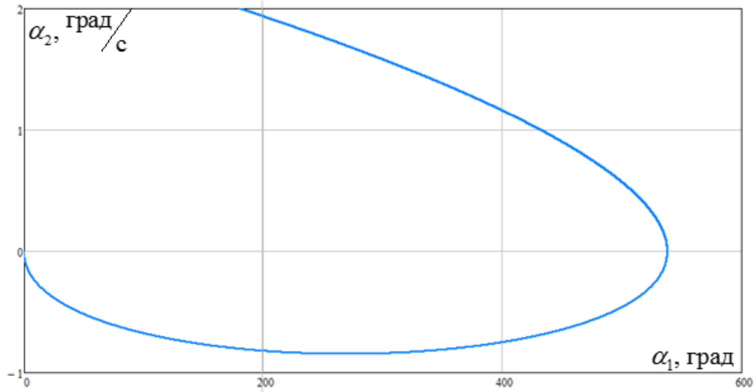

Рисунок 2. Фазовая траектория системы (2).

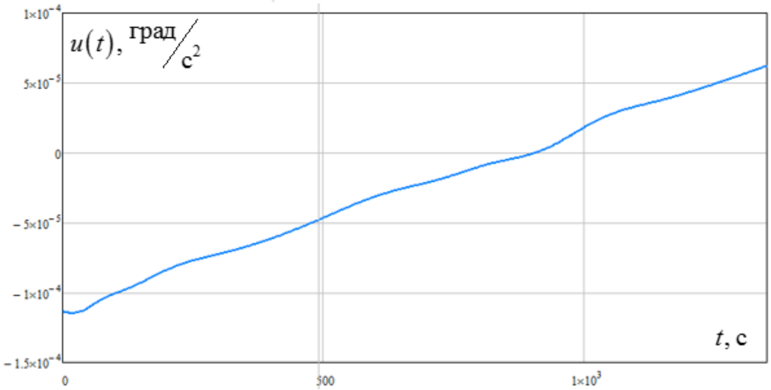

Рисунок 3. Зависимость управления от времени.

3.2. Решение с применением принципа максимума Понтрягина

Вновь перепишем исходную систему уравнений движения и добавим к ней функционал, минимизирующий затраты на управление:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \alpha_2, & \alpha_1(0) = \alpha_{1_0},\ \alpha_1(T) = \alpha_{1_k} \\ \dot{\alpha}_2 = \dfrac{k_a}{I_n}\sin\alpha_1 + \dfrac{k_g}{I_n}\sin 2\alpha_1 + \dfrac{u(t)}{I_n}, & \alpha_2(0) = \alpha_{2_0},\ \alpha_2(T) = \alpha_{2_k}\,. \\ I(u) = \dfrac{1}{2}\int_0^T u(t)^2\,dt \to \min \end{cases} \tag{4}$$

Запишем гамильтониан для данной системы:

$$H(\alpha, \psi, t) = \alpha_2\psi_1 + \left(k_a \sin\alpha_1 + k_g \sin 2\alpha_1 + u(t)\right)\frac{\psi_2}{I_n} - \frac{u(t)^2}{2}.$$

Выпишем часть гамильтониана, зависящую от управления:

$$H(u) = \frac{\psi_2}{I_n}u(t) - \frac{u(t)^2}{2}.$$

Отсюда видно, что гамильтониан будет изменяться в зависимости от управления по квадратичному закону, а максимум его будет достигаться в том случае, когда

$$u(t) = \psi_2,$$

то есть в результате решения краевой задачи сопряженная переменная ψ_2 будет представлять собой функцию управления в зависимости от времени.

Запишем уравнения для сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial \alpha_1} = -\dfrac{\psi_2}{I_n}\left(k_a \cos\alpha_1 + 2k_g \sin 2\alpha_1\right) \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial \alpha_2} = -\psi_1 \end{cases}.$$

Составим систему канонических уравнений

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = \alpha_2, & \alpha_1(0) = \alpha_{1_0},\ \alpha_1(T) = \alpha_{1_k} \\ \dot{\alpha}_2 = \dfrac{k_a}{I_n}\sin\alpha_1 + \dfrac{k_g}{I_n}\sin 2\alpha_1 + \dfrac{\psi_2}{I_n}, & \alpha_2(0) = \alpha_{2_0},\ \alpha_2(T) = \alpha_{2_k} \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial \alpha_1} = -\dfrac{\psi_2}{I_n}\left(k_a \cos\alpha_1 + 2k_g \sin 2\alpha_1\right) \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial \alpha_2} = -\psi_1 \end{cases}. \quad (5)$$

Решим данную краевую задачу. Результаты решения приведены на рисунках 4 и 5.

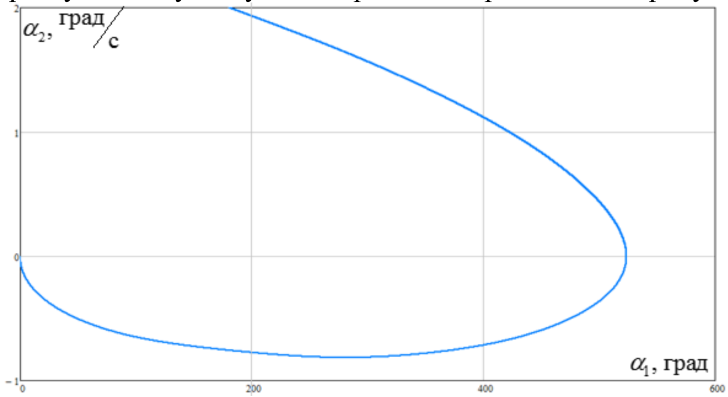

Рисунок 4. Фазовая траектория системы (5).

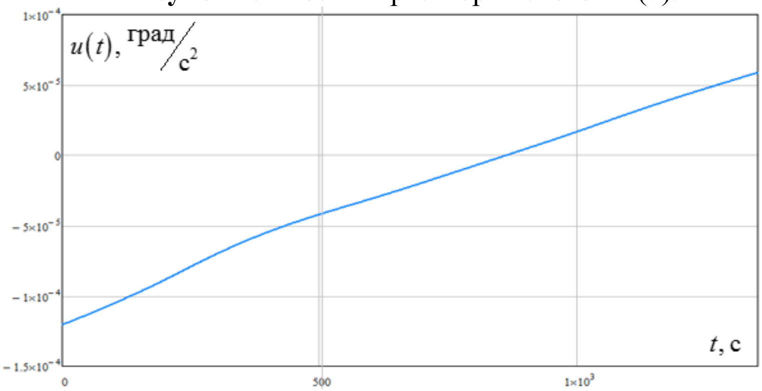

Рисунок 5. Зависимость сопряженной переменной ψ_2 от времени.

Рассчитаем интеграл от функции управления:

$$E = \int_0^T u(t)\,dt = 1{,}232 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

4. Сравнение результатов

Сравним результаты решений, полученных при помощи метода обратной задачи динамики (ОЗД) и принципа максимума Понтрягина (ПМП). Сравнение фазовых траекторий приведено на рисунке 6, сравнение управляющих функций – на рисунке 7.

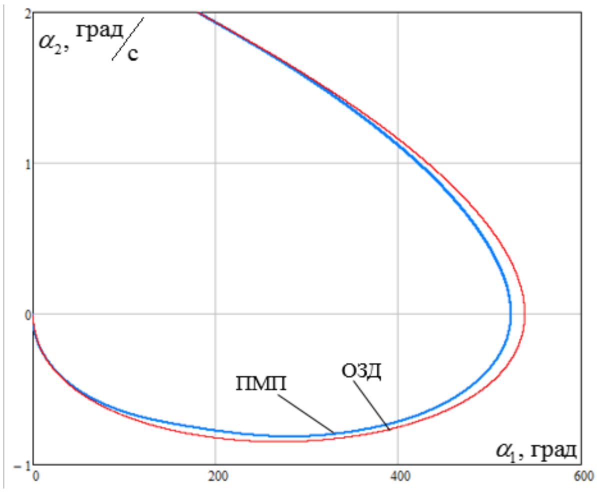

Рисунок 6. Сравнение фазовых траекторий.

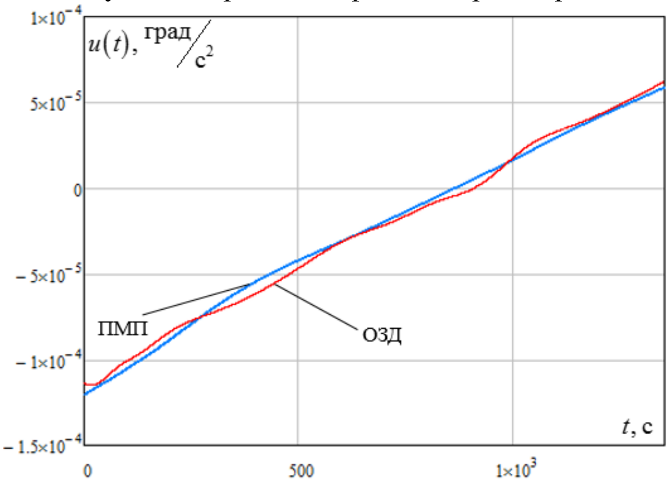

Рисунок 7. Сравнение управляющих функций.

Как видно из данных рисунков, кривая управляющего момента, полученная из решения ОЗД, лежит близко к кривой, полученной по ПМП. Из этого можно сделать вывод, что управление, полученное в результате решения ОЗД, является близким к оптимальному по критерию минимума затрат на управление. Разница по величине между критериями оптимальности для двух методов составляет

$$\Delta = \frac{E_{ОЗД} - E_{ПМП}}{E_{ОЗД}} \cdot 100\% = \frac{1{,}261 - 1{,}232}{1{,}261} \cdot 100\% = 2{,}3\%.$$

5. Заключение

Целью данной работы было исследование оптимальности метода обратной задачи динамики по какому-либо критерию применительно к процессу построения номинальной траектории переориентации наноспутника. В результате было выяснено, что решение с использованием метода ОЗД является близким к оптимальному по критерию минимума затрат на управление. С учетом того, что решение ОЗД не требует решения краевой задачи, можно сказать, что использование метода ОЗД является целесообразным.

6. Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-79-20215).

7. Литература

[1] Голубев, А.Е. Решение терминальной задачи управления для аффинной системы при помощи многочленов / А.Е. Голубев, А.П. Крищенко // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – Т. 2.
[2] Велищанский, М.А. Квазиоптимальная переориентация космического аппарата / М.А. Велищанский, А.П. Крищенко, С.Б. Ткачев // Механика твердого тела, 2002.
[3] Аппазов, Р.Ф. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли / Р.Ф. Аппазов, О.Г. Сутин – М.: Наука, 1987. – 440 с.
[4] Белецкий, В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс – М.: Наука, 1965. – 416 с.

Research of optimality of the nanosatellite nominal reorientation trajectory

A.S. Chekashov[1], A.V. Kramlikh[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. Nanosatellites have serious limitations on the onboard energy. Therefore, it is necessary to find a method of constructing a nominal reorientation trajectory that will optimally use the resources available onboard. In this paper the process of constructing of nominal reorientation trajectory in the plane of nanosatellite orbit is considered. The problem of constructing a nominal reorientation trajectory was solved using the inverse dynamic problem method and Pontryagin maximum principle. A comparison of the results obtained using these two methods was made. As a result, it was noted that the solution obtained by the inverse dynamic problem method is close to the solution obtained using the Pontryagin maximum principle. This allows to speak about the optimality of the inverse dynamics problem method.