

# Исследование погрешности численного моделирования распространения светового импульса в волноводе кругового сечения

А.А. Дегтярев<sup>а</sup>, А.В. Куклева<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

## Аннотация

Рассматривается задача оценки погрешности решения волнового уравнения, записанного с помощью бесконечных рядов Фурье-Бесселя. Разработан алгоритм, корректирующий число элементов в частичной сумме бесконечного ряда, основанный на использовании оценки остатка ряда. Применение алгоритма позволило без потери точности существенно сократить число суммируемых элементов ряда при численном моделировании распространения светового импульса в волноводе кругового сечения.

**Ключевые слова:** волновое уравнение; ряд Фурье-Бесселя; оценка остатка ряда; численное моделирование; световой импульс; вычислительный эксперимент; избыточность слагаемых частичной суммы

## 1. Введение

При разработке прикладной программы для численного моделирования физического процесса важно провести исследование фактической погрешности использованного метода на специальных тестовых задачах. В качестве тестовых примеров обычно используют такие примеры, которые могут быть решены альтернативным методом с достаточно высокой точностью, позволяющей рассчитывать погрешность численного метода [1,2].

Настоящая работа посвящена исследованию погрешности тестовой краевой задачи для волнового уравнения, описывающей процесс распространения светового импульса в волноводе кругового сечения. Для исследования погрешности используется оценка остатка ряда Фурье-Бесселя. Для проверки качества оценки остатка ряда использована методика вычислительного эксперимента, позволяющая определить степень избыточности числа суммируемых элементов ряда, необходимых для достижения требуемой точности [3].

При решении задач численного моделирования распространения светового импульса в среде используются различные математические описания импульса [4-6]. В настоящей работе рассмотрено два варианта описания импульса, различающихся степенью гладкости функции.

## 2. Математическая модель процесса распространения светового импульса в волноводе кругового сечения

Для описания процесса распространения светового импульса будем рассматривать следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{c^2}{n^2} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right), & r \in (0; R], z \in [0; L], t \in [0; T]; \\ E|_{t=0} = 0, & r \in (0; R], z \in [0; L]; \\ \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, & r \in (0; R], z \in [0; L]; \\ E|_{z=0} = \psi(r, t), & r \in (0; R], t \in [0; T]; \\ \left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=L} = 0, & r \in (0; R], t \in [0; T]; \\ E|_{r=R} = 0, & z \in [0; L], t \in [0; T], \end{cases}$$

где  $E$  – напряженность электрического поля,  $c$  – скорость распространения волны в вакууме,  $n$  – коэффициент преломления материала волновода,  $R$  и  $L$  – радиус и длина волновода,  $T$  – длительность процесса распространения волны,  $\psi(r, t)$  – функция, описывающая форму импульса.

Предполагается, что при  $r = R$  волновод ограничен идеально проводящей оболочкой, а среда в начальный момент времени не возмущена.

Далее рассматриваются следующие два варианта задания импульса:

$$\psi_1(r, t) = \varphi(r) \gamma(t) \sin \omega t, \quad \psi_2(r, t) = \varphi(r) \gamma(t) \sin \omega t \sin^2 \omega^* t,$$

где  $\gamma(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; t^*]; \\ 0, & t \in (t^*; T_r], \end{cases}$   $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ ,  $\omega^* = \frac{2\pi c}{\lambda j}$ ,  $t^*$  – длительность импульса на входе в волновод,  $\lambda$  – длина

возмущающей волны в вакууме,  $j$  – целое положительное число. Функция  $\psi_1(r, t)$  является кусочно-гладкой по

переменной  $t$ , так как производная по времени имеет разрывы в точках  $t=0$ ,  $t=t^*$ . Функция  $\psi_2(r,t)$  обладает гладкостью второго порядка по переменной  $t$ .

### 3. Точное решение краевой задачи

Применение метода разделения переменных [5] позволяет получить решение краевой задачи для волнового уравнения можно представить в виде бесконечных рядов Фурье-Бесселя. Например, при описании импульса функцией  $\psi_1(r,t)$  и использовании  $\varphi(r) = J_0(\lambda_1 r)$  решение будет иметь вид:

$$E(r, z, t) = J_0(\lambda_1 r) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin(v_k z) \frac{\omega \sin(\omega_k t)(\hat{\omega}^2 - \omega_k^2) - \omega_k \sin(\omega t)(\hat{\omega}^2 - \omega^2)}{\omega_k(\omega_k^2 - \omega^2)} + \sin(\omega t) \right],$$

если  $t \in [0; t^*]$ ;

$$E(r, z, t) = J_0(\lambda_1 r) \sum_{k=0}^{\infty} \sin(v_k z) \left( a_1(t^*) \cos(\omega_k(t-t^*)) + \frac{a_2(t^*)}{\omega_k} \sin(\omega_k(t-t^*)) \right), \text{ если } t \in (t^*; T].$$

При записи данных формул использованы следующие обозначения:

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1}{R}, \quad c_k = \frac{4}{\pi(2k+1)}, \quad v_k = \frac{\pi(2k+1)}{2L}, \quad \omega_k = \frac{c}{n} \sqrt{v_k^2 + \lambda_1^2}, \quad \hat{\omega} = \frac{c}{n} \lambda_1,$$

$$a_1(t) = c_k \left[ \frac{\omega \sin(\omega_k t)(\hat{\omega}^2 - \omega_k^2) - \omega_k \sin(\omega t)(\hat{\omega}^2 - \omega^2)}{\omega_k(\omega_k^2 - \omega^2)} + \sin(\omega t) \right],$$

$$a_2(t) = c_k \omega \left[ \frac{\cos(\omega_k t)(\hat{\omega}^2 - \omega_k^2) - \cos(\omega t)(\hat{\omega}^2 - \omega^2)}{(\omega_k^2 - \omega^2)} + \cos(\omega t) \right].$$

График сечения импульса плоскостью  $r=1$  мкм в процессе его распространения в волноводе представлен на рисунке 1.

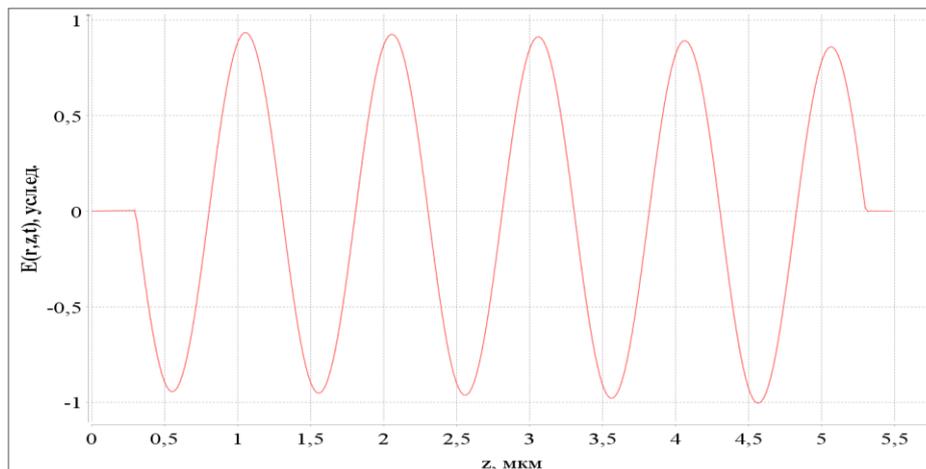


Рис. 1. Моделирование распространения кусочно-гладкого импульса в волноводе, сечение  $r = 1$  мкм.

Для случая гладкого импульса, описываемого функцией  $\psi_2(r,t)$  при  $\hat{\omega} = \frac{\omega}{10}$  и  $\varphi(r) = J_0(\lambda_1 r)$  решение краевой задачи имеет следующий вид:

$$E(r, z, t) = J_0(\lambda_1 r) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\omega_k} \sin(v_k z) (0.5a_3(t) + a_4(t) + a_5(t)) + \sin(\omega t) \sin^2\left(\frac{\omega t}{10}\right) \right], \text{ если } t \in [0; t^*];$$

$$E(r, z, t) = J_0(\lambda_1 r) \sum_{k=0}^{\infty} \sin(v_k z) \left( a_6(t^*) \cos(\omega_k(t-t^*)) + \frac{a_7(t^*)}{\omega_k} \sin(\omega_k(t-t^*)) \right), \text{ если } t \in (t^*; T].$$

В последних формулах использованы следующие обозначения:

$$a_3(t) = \frac{\hat{\omega}^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_k^2} (\omega \sin \omega_k t - \omega_k \sin \omega t),$$

$$a_4(t) = 5 \frac{0.16\omega^2 - 0.25\hat{\omega}^2}{16\omega^2 - 25\omega_k^2} \left( 4\omega \sin \omega_k t - 5\omega_k \sin \frac{4}{5}\omega t \right), \quad a_5(t) = 5 \frac{0.36\omega^2 - 0.25\hat{\omega}^2}{36\omega^2 - 25\omega_k^2} \left( 6\omega \sin \omega_k t - 5\omega_k \sin \frac{6}{5}\omega t \right),$$

$$a_6(t) = \frac{c_k}{\omega_k} (0.5a_3(t^*) + a_4(t^*) + a_5(t^*)) + c_k \sin(\omega t) \sin^2\left(\frac{\omega t}{10}\right),$$

$$a_7(t) = \frac{c_k}{\omega_k} (0.5a_3(t^*) + a_4(t^*) + a_5(t^*)) + c_k \left( \sin(\omega t) \sin^2\left(\frac{\omega t}{10}\right) \right),$$

$\mu_1$  – корень уравнения  $J_0(\mu R) = 0$ .

Процесс распространения кусочно-гладкого импульса представлен на рисунке 2.

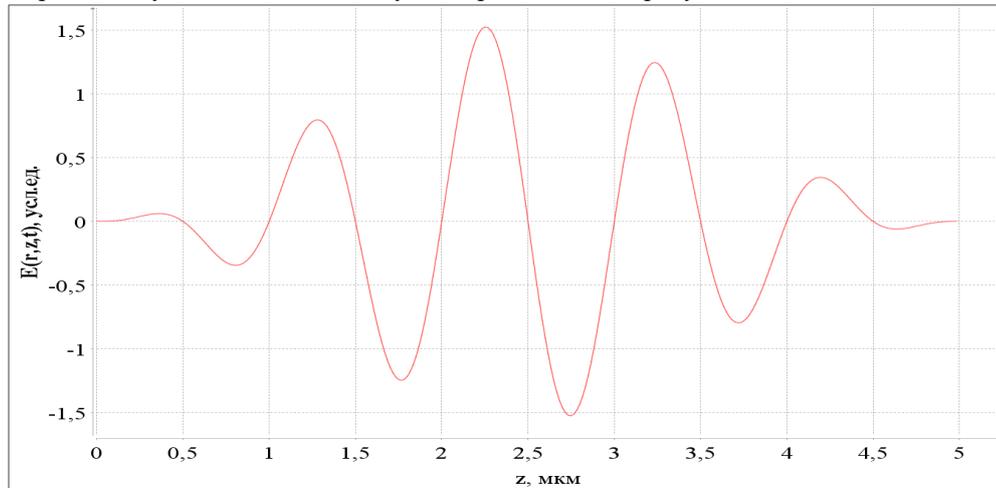


Рис.2. Моделирование распространения гладкого импульса в волноводе, сечение при  $r = 1$  МКМ.

#### 4. Контроль погрешности усечения рядов

Компьютерная программа, моделирующая процесс распространения импульса предполагает усечение бесконечных рядов, представленных выше.

Если удастся получить оценку остатка ряда  $E(r, z, t) = \sum_{k=1}^N u_k(r, z, t)$  в виде

$$|R_N| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(r, z, t) \right| \leq \Phi(N),$$

где  $\Phi(N)$  – положительная монотонно убывающая при  $N \rightarrow +\infty$  функция, то эту оценку можно использовать с целью контроля погрешности усечения. Для этого следует найти число  $N(\varepsilon)$ , являющееся наименьшим значением  $N$ , удовлетворяющим неравенству  $\Phi(N) \leq \varepsilon$ , и для приближенного вычисления значений функции  $E(x, z, t)$  использовать

частичную сумму  $E_{N(\varepsilon)} = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} e_n(x, z, t)$ .

В этом случае фактическая погрешность вычисленного значения функции  $E$  в выбранной точке не превзойдет требуемого уровня  $\varepsilon$ , то есть

$$\varepsilon_{\text{факт}} = |E - E_{N(\varepsilon)}| = |R_{N(\varepsilon)}| \leq \Phi(N(\varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

Для рассмотренных выше двух способов задания светового импульса были получены оценки остатков соответствующих рядов при следующих значениях  $t^*$  и  $w^*$ :

$$w^* = \frac{\pi c}{5\lambda}, \quad t^* = \frac{10\lambda}{c}.$$

Для случая кусочно-гладкого импульса, описываемого функцией  $\psi_1(r, t)$ , оценка имеет следующий вид:

$$|E_N(r, z, t)| \leq \frac{8Ln}{\pi(2N+1)} \left( \frac{1.003}{\lambda} + \frac{2nL(\omega^2 - \hat{\omega}^2)}{\pi^2 c^2 \left(3 + 2N - \frac{4nL}{\lambda}\right)} \right),$$

а для случая гладкого импульса, описываемого функцией  $\psi_2(r, t)$ , оценка получена в виде:

$$|E_N(r, z, t)| \leq \frac{0.16n^2 L^2 \omega^2}{c^2 \pi^3 (2N+1)^2}.$$

Следует отметить, что записанные выше оценки погрешности усечения бесконечных рядов являются равномерными по всем независимым переменным.

## 5. Методика уточнения количества суммируемых элементов ряда с помощью вычислительного эксперимента

Предложенные оценки не являются идеальными, так как они получены с использованием строгих неравенств, а также они равномерны по всем независимым переменным. Именно поэтому использование оценок приводит к суммированию большего количества элементов, чем необходимо для достижения требуемой точности. В этом случае целесообразно применить методику, которая уменьшает степень избыточности слагаемых в частичной сумме, и при этом гарантирует достижение требуемой точности [3].

Пусть  $N$  некоторое натуральное число, удовлетворяющее неравенству  $N \leq N(\varepsilon_1)$ , где  $\varepsilon_1 < \varepsilon$ , а число  $N(\varepsilon_1)$  найдено по правилу, описанному в пункте 4. Тогда для частичной суммы  $E_N$  фактическая погрешность будет удовлетворять неравенству:  $\varepsilon_{\text{факт}}(N) = |E - E_N| \leq |E - E_{N(\varepsilon_1)}| + |E_{N(\varepsilon_1)} - E_N|$ .

Изменяя  $N$  в пределах  $N(\varepsilon_1) \geq N \geq 1$ , найдем наименьшее значение  $N(\varepsilon_2)$ , при котором выполняется неравенство  $|E_{N(\varepsilon_1)} - E_N| \leq \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$ .

При таком выборе  $\varepsilon_2$  и обеспечении справедливости предыдущего неравенства, фактическая погрешность  $\varepsilon_{\text{факт}}(N(\varepsilon_2))$  не превзойдет величины  $\varepsilon$ .

Таким образом, для уменьшения числа слагаемых в частичной сумме, необходимо:

1) Задать число  $\varepsilon_1 < \varepsilon$  и затем найти значение  $N(\varepsilon_1)$ , являющееся наименьшим значением  $N$ , удовлетворяющим неравенству  $\Phi(N) \leq \varepsilon_1$ .

2) Меняя переменную  $N$  от значения  $N(\varepsilon_1)$  в сторону уменьшения, найти наименьшее ее значение, удовлетворяющее неравенству  $|E_{N(\varepsilon_1)} - E_N| \leq \varepsilon_2$ . Полученное значение принимается за  $N(\varepsilon_2)$ .

3) Меняя с заданным шагом значения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  так, чтобы  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ , вновь выполнить этапы 1) и 2).

4) Из всех значений  $N(\varepsilon_2)$ , полученных на этапе 3), выбрать наименьшее.

В результате применения данного алгоритма можно ожидать, что число суммируемых элементов  $N(\varepsilon_2)$  в частичной сумме существенно сократится по сравнению с числом  $N(\varepsilon)$  при сохранении гарантий по точности, то есть  $\varepsilon_{\text{факт}}(N(\varepsilon_2)) \leq \varepsilon$ .

В таблицах 1 и 2 приведены результаты вычислительных экспериментов, направленных на уменьшение числа слагаемых частичной суммы. Вычисления проводились при следующих значениях параметров:

$$\lambda = 1 \text{ мкм}, n = 1, L = 7 \text{ мкм}, R = 5 \text{ мкм}, c = 3 \cdot 10^{14} \text{ мкм/с}, r = 1 \text{ мкм}, z = 1 \text{ мкм}, \tilde{t} = \frac{tc}{n} \text{ мкм}.$$

Значения величины  $\varepsilon$  задавались в долях от максимального значения амплитуды волны.

Из таблиц видно, что число слагаемых, полученное с помощью равномерных оценок, для усечения соответствующих рядов позволяет получить лишь грубые значения длин частичных сумм. Эти значения многократно превышают величины, полученные в результате применения изложенного выше алгоритма. Как видно из таблицы 1, для вычисления напряженности электрического поля в зонах переднего и заднего фронтов волны требуется намного большее количество слагаемых, например, в диапазоне  $1.7 \text{ мкм} \leq t \leq 5.1 \text{ мкм}$  достаточно порядка 4086 слагаемых для достижения точности  $10^{-5}$ , в то время как в диапазоне  $0.9 \text{ мкм} \leq t \leq 1.1 \text{ мкм}$  требуется 377122 слагаемых. Такой рост количества слагаемых является следствием слабых разрывов функции  $\psi_1(r, t)$ , существенно замедляющих сходимость ряда.

Для случая описания импульса гладкой функцией  $\psi_2(r, t)$  неравномерность распределения значений  $N(\varepsilon_2)$  для различных  $\tilde{t}$  оказывается весьма незначительной.

## 6. Заключение

Разработан и программно реализован алгоритм, обеспечивающий корректировку длины частичной суммы бесконечного ряда, полученного в ходе решения краевой задачи для волнового уравнения. Для практического применения алгоритма принципиально важным является предварительное получение оценки сверху остатка ряда Фурье, определяющего решение краевой задачи.

Применения разработанного алгоритма для конкретных рядов, описывающих распространения импульса в волноводе кругового сечения позволило многократно (от 3 до 1500 и более раз для кусочно-гладкого импульса и от 2 до 5 раз для случая гладкого импульса) сократить длину частичной суммы ряда.

**Таблица 1.** Зависимость числа слагаемых  $N(\varepsilon)$  и  $N(\varepsilon_2)$  от координаты  $\tilde{t}$  при различных значениях  $\varepsilon$  для кусочно-гладкого импульса

импульса					
$\varepsilon$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$N(\varepsilon)$	131	1019	9844	98079	980434
$\tilde{t}, \text{мкм}$	$N(\varepsilon_2)$				
0.9	13	48	231	3116	9906
0.999	37	306	1241	6774	26632
0.99999	37	312	3072	35599	126836
1	37	312	3075	37713	377122
1.00001	37	312	3072	35599	126836
1.001	37	306	1241	6774	26633
1.1	16	68	320	3119	9906
1.7	19	34	124	1286	4086
2.5	15	32	96	928	984
4	13	25	66	612	643
5.1	16	30	75	649	1436
5.9	17	28	324	3116	3258
5.999	47	355	1262	6422	9906
5.99999	47	466	4672	35599	26632
6	47	467	4672	37713	126836
6.00001	47	465	4671	35599	377122
6.001	47	383	1461	6423	126836
6.1	17	30	360	3119	26634

**Таблица 2.** Зависимость числа слагаемых  $N(\varepsilon)$  и  $N(\varepsilon_2)$  от координаты  $\tilde{t}$  при различных значениях  $\varepsilon$  для гладкого импульса

$\varepsilon$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$N(\varepsilon)$	21	36	113	357	1128
$\tilde{t}, \text{мкм}$	$N(\varepsilon_2)$				
0.9	15	18	28	62	132
0.999	15	18	28	61	136
0.99999	14	17	28	62	126
1	15	18	27	67	141
1.000001	10	21	37	91	186
1.001	10	22	42	101	211
1.1	15	17	33	61	132
1.7	10	17	37	81	181
2.5	13	15	26	67	146
4	15	22	46	101	216

## Литература

- [1] Feng, X. A high-order compact scheme for the one-dimensional Helmholtz equation with a discontinuous coefficient / X. Feng // International Journal of Computer Mathematics. – 2012. – Vol. 1. – P. – 1-7.
- [2] Дегтярев, А.А. Исследование погрешности разностного решения однонаправленного уравнения Гельмгольца методом вычислительного эксперимента / А.А. Дегтярев, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2012. – Т.36, №1. – С. 36-45. – ISSN 0134-2452.
- [3] Дегтярев А.А. Оценка погрешности решения волнового уравнения в задаче моделирования распространения светового импульса в планарном волноводе / А.А. Дегтярев, М.О. Праслова // Материалы Международной конференции молодёжной школы «Информационные технологии и нанотехнологии», 17.05-19.05.2016 г., Самара, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 2016 г., С. 852-859.
- [4] Котляр, В.В. Моделирование распространения короткого двумерного импульса света / В.В. Котляр, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2012. – Т.36. №2. – С.158-164. – ISSN 0134-2452.
- [5] Котляр, В.В. Моделирование предвестников Зоммерфельда и Бриллюэна в среде с частотной дисперсией на основе разностного решения волнового уравнения / В.В. Котляр, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2013. – Т.37. №2. – С.146-154. – ISSN 0134-2452.
- [6] Fuchs, U. Ultra-short pulse propagation in complex optical system / U. Fuchs, U. Zeitner and A. Tunnermann // Optics Express. – 2005. – Vol.13, Issue 10. – P.3852-3861.
- [7] Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука. 1972. – 736с.