

# Исследование теплового поля сетчатки человеческого глаза в зоне лазерного воздействия при численном моделировании на основе решения уравнения теплопроводности в слоистой области

А.В. Раку<sup>1</sup>, А.А. Дегтярев<sup>1</sup>, А.С. Широканев<sup>1,2</sup>, А.С. Кибиткина<sup>1</sup>, Н.Ю. Ильясова<sup>1,2</sup>,  
А.В. Золотарев<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

<sup>2</sup>Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

<sup>3</sup>Самарский государственный медицинский университет, Чапаевская 89, Самара, Россия, 443099

**Аннотация.** В данной статье рассматривается моделирование распространения лазерного излучения в слоистых структурах глазного дна с целью изучения тепловых полей, возникающих в сетчатке и в эпителиальном слое, а также с целью подбора наилучших параметров и поиск факторов, влияющих на лечение. Моделирование температурного распределения в таких труднодоступных тканях является актуальной и важной задачей. В настоящий момент вручную подобранные параметры не обеспечивают достаточную эффективность. Важно понимать, какие температуры достигаются при тех или иных параметрах, чтобы можно было управлять процессом лечения и не убить здоровые клетки. Результаты были получены с помощью численного решения двумерного уравнения теплопроводности в слоистой области с рассчитанным заранее начальным условием и с постоянной температурой на границах области расчета. Для численного решения использовался метод конечных разностей и явная разностная схема, которая при определенных условиях устойчивости показывает адекватные результаты.

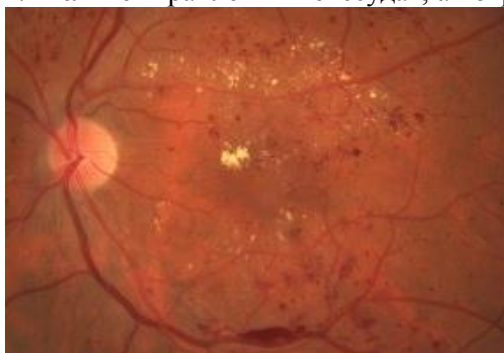
## 1. Введение

Офтальмология считается первой областью медицины в которой нашли применение лазерные технологии [1]. Большое количество разнообразных глазных болезней может быть вылечено путем воздействия лазерным излучением на необходимую область глаза. Но здесь зачастую возникает проблема неточных параметров лечения. Человеческий глаз является одной из наиболее чувствительных к тепловому воздействию частей человеческого тела. Поскольку нет барьера, способного защитить чувствительные ткани от поглощения теплового потока, этот поток может легко взаимодействовать с роговицей. Поверхность глаза должна физиологически справляться с тепловым воздействием окружающей среды [2]. Для того, чтобы прогнозировать осложнения, возникающие при неправильном подборе таких параметров, как, например, мощность источника излучения, может быть использовано математическое моделирование, что

и предлагается в настоящей работе. Одной из болезней, при которых показано лечение путем воздействия лазером, является диабетическая ретинопатия, возникающая у людей, больных сахарным диабетом.

Сахарный диабет – самое распространенное эндокринное заболевание, его осложнения представляют собой одну из серьезнейших медико-социальных проблем современного здравоохранения. Поражение органа зрения при сахарном диабете занимает особое место, поскольку снижение зрения существенно влияет на качество жизни больных. Среди всех клинических проявлений диабетического поражения глаз наибольшую опасность представляет ретинопатия, являющаяся основной причиной прогрессирующего и безвозвратного снижения зрения, и, как следствие, – инвалидизации [3].

Лазерная коагуляция сетчатки является наиболее эффективным методом лечения диабетической ретинопатии и предупреждения слепоты [4, 5]. Диабетическая ретинопатия (ДР) проявляется геморрагиями, микроаневризмами, неравномерностью калибра сосудов сетчатки, отеком сетчатки и т.д. Поражение центральной зоны глазного дна протекает в виде макулярного отека и ишемии макулы [6]. На рисунке 1 представлено изображение сетчатки пациента с диабетической ретинопатией. Желтые вкрапления – экссудат, а покраснение на фоне – отек.



**Рисунок 1.** Глазное дно пациента с диабетической ретинопатией.

Попытки смоделировать воздействие лазерного излучения на сетчатку глаза уже проводились ранее многими специалистами. Например, в работе [7] была создана трехмерная модель глаза с тепловым распределением внутри по линии выстрела лазером. В настоящей работе представлено моделирование такого процесса в конкретной области, не принимая во внимание все глазное яблоко. Моделирование производится с целью подбора оптимальных параметров, т.к. вручную подобранные параметры не всегда эффективны или даже опасны.

## **2. Построение двумерной математической модели теплового процесса в области глазного дна с использованием декартовой системы координат**

Математическая модель теплового лазерного воздействия на глаз человека основывается на двумерном уравнении теплопроводности [8] с учетом разрывности коэффициентов, входящих в него:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ k(z, x) \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(z, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость ткани  $\left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \times \text{К}} \right]$ ,  $\rho$  – плотность  $\left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$ ,  $k$  – теплопроводность ткани  $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \times \text{К}}$ . Разрывность коэффициентов вызвана различием в свойствах слоев стекловидного тела, сетчатки и склеры.

Для расчетов необходимо начальное распределение температуры, которое задается функцией  $\psi(z, x)$ . Определим эту функцию, как

$$\psi(z, x) = \frac{e^{-\beta(z)} \beta(z) I(x) \Delta t}{c}, \quad (2)$$

где  $\beta(z)$  – коэффициент поглощения,  $I(x)$  – интенсивность лазерного излучения,  $\Delta t$  – длительность импульса.

В данной работе рассматривался лазер, для которого интенсивность распределяется по закону Гаусса, т.е.

$$I(x) = \frac{P}{2\pi} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}},$$

где  $P$  – мощность лазерного излучения,  $a$  – диаметр лазерного пятна,  $x_0$  – смещение точки выстрела вдоль оси  $x$  относительно центральной точки.

Граничные условия задаются с условием, что температура на краях остается неизменной и равной температуре тела.

Собирая воедино все описанные условия, получаем следующую дифференциальную задачу (3) в слоистой области:

$$\left\{ \begin{array}{l} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k(z, x) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( k(z, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 \leq z \leq L, 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T; \\ u(z, x, 0) = \psi(z, x), \quad 0 \leq z \leq l, 0 \leq x \leq l; \\ u(z, 0, t) = T_c, \quad u(z, l, t) = T_c, \quad 0 \leq z \leq L, 0 \leq t \leq T; \\ u(0, x, t) = T_c, \quad u(L, x, t) = T_c, \quad 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T. \end{array} \right. \quad (3)$$

### 3. Построение разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальную задачу

Для численного решения двумерного уравнения теплопроводности воспользуемся методом конечных разностей [9]. Заменяя область непрерывного изменения аргументов функции  $u(z, x, t)$  равномерной сеткой.

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, i = \overline{0, I}, h_x = \frac{l}{I}; \\ z_j &= ih_z, j = \overline{0, J}, h_z = \frac{L}{J}; \\ t_k &= kh_t, k = \overline{0, K}, h_t = \frac{T}{K}, \end{aligned}$$

где  $h_x$  – шаг разбиения по оси  $x$ ,  $h_z$  – шаг разбиения по оси  $z$  и  $h_t$  – шаг разбиения по времени  $t$ .

Заменяя производные разностными аналогами на сетке, запишем явную разностную схему для задачи (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} c_j \rho_j \frac{u_{j,i}^{k+1} - u_{j,i}^k}{h_t} = \frac{1}{h_z} \left( k_{j+1,i} \frac{u_{j+1,i}^k - u_{j,i}^k}{h_z} - k_{j,i} \frac{u_{j,i}^k - u_{j-1,i}^k}{h_z} \right) + \frac{1}{h_x} \left( k_{j,i+1} \frac{u_{j,i+1}^k - u_{j,i}^k}{h_x} - k_{j,i} \frac{u_{j,i}^k - u_{j,i-1}^k}{h_x} \right), \\ i = \overline{1, I-1}, j = \overline{1, J-1}, k = \overline{1, K-1} \\ u_{i,j}^0 = \psi_{i,j}, i = \overline{0, I}, j = \overline{0, J}; \\ u_{0,j}^k = 0, u_{I,j}^k = 0, j = \overline{0, J}, k = \overline{0, K-1}; \\ u_{i,0}^k = 0, u_{i,J}^k = 0, i = \overline{0, I}, k = \overline{0, K-1} \end{array} \right. \quad (4)$$

### 4. Алгоритм решения разностной схемы

Разностная схема (4) представляет из себя системы линейных уравнений, допускающих возможность рекуррентного вычисления сеточного решения  $u_{j,i}^k$  для  $k = \overline{1, K-1}$  по явной формуле

$$u_{j,i}^{k+1} = \frac{h_t}{c_j \rho_j} \left[ \frac{1}{h_z} \left( k_{j+1,i} \frac{u_{j+1,i}^k - u_{j,i}^k}{h_z} - k_{j,i} \frac{u_{j,i}^k - u_{j-1,i}^k}{h_z} \right) + \frac{1}{h_x} \left( k_{j,i+1} \frac{u_{j,i+1}^k - u_{j,i}^k}{h_x} - k_{j,i} \frac{u_{j,i}^k - u_{j,i-1}^k}{h_x} \right) \right] + u_{j,i}^k.$$

Для того чтобы рассчитать матрицу решений  $u_{j,i}^k$  необходимо [10]

- при  $k = 1$  рассчитать решение  $u_{j,i}^k$ ,  $j = \overline{1, J-1}$ ,  $i = \overline{1, I-1}$  на втором временном слое, используя начальное условие  $u_{j,i}^0 = \psi_{i,j}$ ,

- каждый раз увеличивая  $k$  на единицу и используя все ту же формулу, рассчитать значения  $u_{j,i}^k$  на текущем временном слое через значение  $u_{j,i}^k$ , найденное на предыдущем временном слое  $k - 1$  до тех пор, пока  $k$  не станет равным  $K - 1$ .

Массив коэффициентов заполняется на основе загружаемого изображения размером 50 на 50 пикселей. В зависимости от значения яркости пикселя, элементу матрицы на позиции этого пикселя присваивается одно из трех значений. В дальнейших расчетах используются матрицы коэффициентов, заполненные таким способом.

## 5. Результаты численного моделирования лазерного воздействия на глазное дно человека

Для заполнения матриц коэффициентов использовалось изображение сетчатки реального пациента, полученное на основе оптического томографа. Рисунок 2 – изображение части глазного дна в сечении, на котором отчетливо видна слоистая структура:

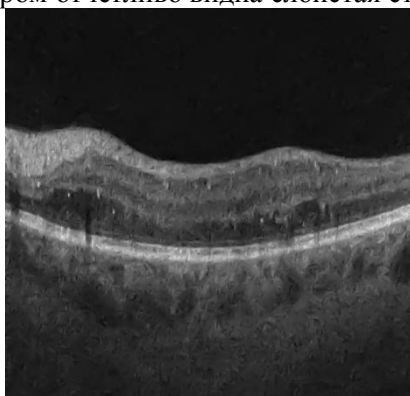


Рисунок 2. Изображение сетчатки глаза, полученное с помощью ОКТ.

При моделировании использовались следующие параметры: время наблюдения – 0.2 с, толщина лазерного пятна – 0.1 мм, мощность лазера – 0.14 Вт и длительность импульса – 0.03 с.

Проведя с помощью явной схемы расчеты, получим следующие результаты для различных значений коэффициента поглощения, представленные на рисунках 3, 4, 5.

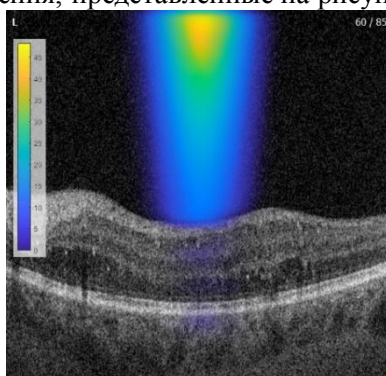
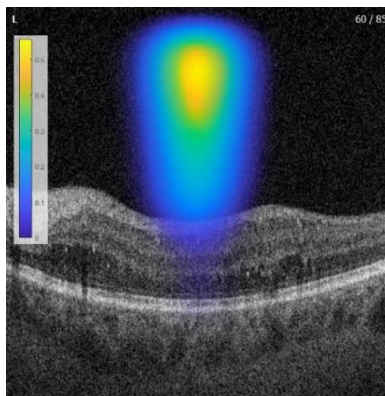


Рисунок 3. Распределение температуры при воздействии лазером на сетчатку глаза при  $\beta_1 = 1 \frac{1}{\text{см}}$ ,

$$\beta_2 = 4 \frac{1}{\text{см}}, \beta_3 = 3 \frac{1}{\text{см}} \text{ в момент времени } t = 0 \text{ с}.$$

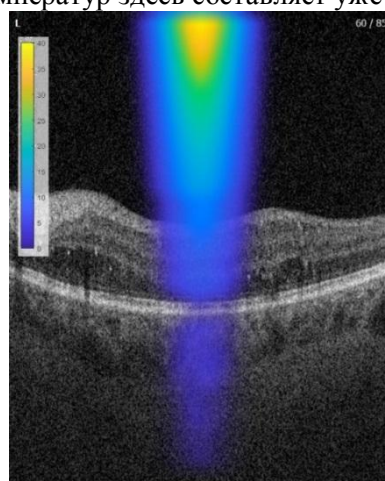
На рисунке 3 видно, что из-за высокого коэффициента поглощения в области сетчатки, тепло не проходит в глубокие слои и практически полностью угасает уже на сетчатке, не проходя в эпителиальный слой. В самой горячей области разница температур составляет примерно 50 К.



**Рисунок 4.** Распределение температуры при воздействии лазером на сетчатку глаза при

$$\beta_1 = 1 \frac{1}{\text{см}}, \beta_2 = 4 \frac{1}{\text{см}}, \beta_3 = 3 \frac{1}{\text{см}} \text{ в момент времени } t = 0.1 \text{ с}.$$

На рисунке 4 изображено температурное распределение после окончания импульса, т.е. в процессе остывания. Разница температур здесь составляет уже порядка 0.5 К.



**Рисунок 5.** Распределение температуры при воздействии лазером на сетчатку глаза при

$$\beta_1 = 0.5 \frac{1}{\text{см}}, \beta_2 = 2 \frac{1}{\text{см}}, \beta_3 = 1 \frac{1}{\text{см}} \text{ в момент времени } t = 0 \text{ с}.$$

В качестве эксперимента также было рассчитано решение при меньших значениях коэффициента поглощения. На рисунке 5 представлен результат такого расчета. Как можно заметить, при воздействии лазером на сетчатку при относительно небольшом коэффициенте поглощения, тепло проникает в глубокие слои, вызывая критическое повышение температуры.

## 6. Заключение

В ходе выполнения данной работы осуществлена постановка краевой задачи распространения тепла в слоистой области для двумерного случая. Для численного решения краевой задачи была построена простейшая явная схема.

В настоящей работе в качестве слоистой области были выбраны сетчатка глаза человека, эпителиальный слой за ней и склера, поскольку задача моделирования теплового процесса в человеческом глазу при воздействии лазерного излучения является крайне актуальной на сегодняшний день. На основании полученных результатов можно примерно оценить насколько

глубоко тепло проникает в слои, вызывает ли оно критическое повышение температуры. Толщина температурного поля позволяет примерно понять, насколько большой коагулят будет получен при воздействии лазером с подобранными параметрами. Можно заметить, что при небольшом коэффициенте поглощения тепло проникает в глубокие слои и может вызвать необратимые изменения в этих слоях. Данные, полученные на основании решения уравнения, являются полезными и математическое моделирование позволяет оценивать результаты теплового воздействия на чувствительные слои глаза.

## 7. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-31-90160, № 19-29-01135, № 18-37-00418 и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания Самарского университета и ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН.

## 8. Литература

- [1] Аверьянов, Д.А. Оптическая когерентная томография / Д.А. Аверьянов, С.А. Алпатов, В.В. Букина – Иркутск: РИО ГУ НЦ ПВХ ВСНЦ СО РАМН, 2010. – 112 с.
- [2] Svetkovic, M. FDTD computation of the temperature distribution induced into a human eye by a pulsed laser / M. Svetkovic, D. Poljak, A. Peratta // Progress In Electromagnetics Research. – 2011. – Vol. 120. – P. 403-421.
- [3] Кутимова, Е.Ю. Диабетическая ретинопатия. Роль амбулаторно-поликлинического звена в ранней диагностике. Лечение. Прогнозы / Е.Ю. Кутимова, В.Г. Кутимова // Медицина. – 2016. – Т. 21, № 2. – С. 573-577.
- [4] Скоробогатова, Е.С. Инвалидность по зрению вследствие сахарного диабета – М.: Медицина, 2003. – С. 89-102.
- [5] Fong, D.S. Retinopathy in Diabetes / D.S. Fong, L. Aiello, T.W. Gardner // Diabetes Care. – 2004. – Vol. 27. – P. 84-87.
- [6] Duh, E.J. Diabetic retinopathy // Humana Press, a part of Springer Science + Business Media, LLC, 2008. – 500 p.
- [7] Seyyed, A.M. Temperature Distribution Simulation of the Human Eye Exposed to Laser Radiation / A.M. Seyyed, R.J. Mahdi, A. Maryam // Journal of Lasers in Medical Sciences. – 2013. – Vol. 4(4). – P. 175-181.
- [8] Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учебное пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский – М.: МГУ, 1999. – С. 585-628.
- [9] Хватцев, А.А. Дифференциальные уравнения в частных производных: учеб. пособие / А.А. Хватцев, И.А. Строчков – Псков : Изд-во Псков. гос. ун-та, 2016. – 80 с.
- [10] Дегтярев, А.А. Примеры построения и исследования разностных схем // Электронное учебное пособие, 2011. – 54 с.

## Study of the thermal field of the retina of the Human eye in the laser exposure zone during numerical simulation based on the solution of the heat equation in the layered region

A.V. Raku<sup>1</sup>, A.A. Degtyarev<sup>1</sup>, A.S. Shirokanov<sup>1,2</sup>, A.S. Kibitkina<sup>1</sup>, N.U. Ilyasova<sup>1,2</sup>,  
A.V. Zolotarev<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

<sup>2</sup>Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

<sup>3</sup>Samara State Medical University, Chapaevskaya str. 89, Samara, Russia, 443099

**Abstract.** In this article, modeling of the propagation of laser radiation in the layered structures of the fundus is available in order to study the thermal fields arising in the retina and epithelial layer, as well as to achieve the best parameters and search for factors that affect treatment. Modeling the temperature distribution in such hard-to-reach tissues is a necessary and necessary task. In sufficient efficiency. It must be understood that the temperature can be achieved with certain parametric parameters. The results were obtained using numerical solutions. For quantitative solutions, the finite difference method and explicit difference schemes were used.