

# Итерационные алгоритмы совмещения сигналов оптических триангуляционных датчиков для оценки деформации объектов

Р.Р. Диязитдинов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Льва Толстого 23, Самара, Россия, 443010

**Аннотация.** В статье представлены алгоритмы совмещения контуров. Первый контур представляет собой эталонный сигнал (неизношенный объект). Второй объект является выходным сигналом оптического триангуляционного датчика (контур измеряемого объекта). В работе представлен метод совмещения, в основе которого лежит положение, что эталонный сигнал описывается уравнениями линий, а измеренный – последовательностью точек. Процедура совмещения заключается в предварительном разделении контура на фрагменты (подмножества точек контура), каждый из которых относится к соответствующей линии. Параметры совмещения определяются из уравнения, связывающего между собой линии и подмножества точек. В работе представлены несколько итерационных алгоритмов совмещения, которые отличаются исходными данными (типами линий, описывающих эталонный контур). В заключении работы представлены результаты погрешности измерения дефекта на примере износа рельса для существующего алгоритма, который проводит совмещение по контрольным точкам, и для разработанных итерационных алгоритмов.

## 1. Введение

Измерения деформации объектов является актуальной проблемой для предприятий, специализирующихся на контроле изготовления деталей и измерении геометрии протяженных объектов.

Механические способы измерения при помощи штангенциркулей, шупов, калибров и приспособлений на их основе, используются в тех случаях, когда автоматизация невозможна или экономически нецелесообразна.

Для автоматизации процесса измерения деформации объектов получили широкое распространение оптические триангуляционные датчики, которые позволяют формировать контур измеряемого объекта.

Основная задача, решаемая разработчиками алгоритмов для измерения деформации, – это совмещение измеренного контура объекта с эталонным (неизношенным) контуром.

После решения этой задачи, определение деформации как расстояния между контрольными точками (износ) или площади изношенной части являются, как правило, тривиальными задачами.

## 2. Обзор методов совмещения контуров

В настоящее время существует несколько направлений для совмещения контуров.

Одни из первых алгоритмов, который широко применяются до настоящего времени в силу своей простоты, – это совмещение по контрольным точкам.

Контрольные точки представляют собой:

– точки пересечения прямых (например, точка пересечения прямых, образующих прямой угол);

– точки перехода из прямой в выкружку (*примеч.*: выкружка – это вогнутый архитектурный облом, представляющий по очертанию четверть окружности или отрезок кривой, близкой к этой форме [1]) известного радиуса.

Зная координаты точек на контуре измеренного и неизношенного объекта определяются параметры совмещения (угол поворота и смещения на плоскости) через систему уравнений:

$$\begin{cases} v_i = x_i \cdot \cos(\alpha) - y_i \cdot \sin(\alpha) + x_0; \\ w_i = x_i \cdot \sin(\alpha) + y_i \cdot \cos(\alpha) + y_0. \end{cases} \quad (1)$$

где  $(x_i, y_i)$  – координаты контрольных точек неизношенного объекта;  $(v_i, w_i)$  – координаты контрольных точек измеренного объекта;  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  – количество контрольных точек;  $(\alpha, x_0, y_0)$  – параметры совмещения.

Для оценки параметров в ряде случаев можно использовать метод наименьших квадратов [2,3].

Так как формула, связывающая между собой координаты (1), содержит нелинейные тригонометрические функции, то для решения можно использовать метод линеаризации функции – разложение функций синуса и косинуса в ряд Тейлора, ограничившись двумя первыми членами. Данный способ представлен в работе [4].

Как правило, на контуре измеряемых объектов располагается не так много контрольных точек (от 2 до 10 точек), поэтому отсутствие нескольких точек или высокая погрешность измерения отдельных точек, приводит к высокой погрешности оценки параметров совмещения, а и как следствие к высокой погрешности оценки параметров деформации. Также отсутствие необходимого количества контрольных точек может приводить к отсутствию измерений деформации. Этот прием очень распространен на практике: выгоднее не выдавать измерения с высокой погрешностью, а восстанавливать их по соседним измерениям путем аппроксимации или интерполяции.

Другой способ совмещения, также получивший широкое распространение, предназначен для объектов, контур которых описывается кривыми второго порядка (окружности, эллипсы, параболы).

Совмещение в этом случае происходит путем предварительной аппроксимации контуром с известным параметрическим уравнением [4-11]. В этой области получили применение два основных способа оценки параметров:

- используется метод наименьших квадратов;
- используются инварианты, независимые от поворота.

Недостатком этого способа является ограниченное применение, обусловленное специфической формой измеряемого объекта – кривой второго порядка. Также в работе [7] был выявлен еще один серьезный недостаток этого направления. Он заключается в том, что при обработке контура, в котором представлена только часть точек измерений, различные методы аппроксимации дают различные результаты, которые не совпадают с реальным объектом.

В монографии [12] представлен оригинальный способ оценки параметров для замкнутых контуров на цифровых изображениях (координаты точек могут принимать дискретные значения). Контур кодируется последовательностью комплексных чисел. Параметры совмещения определяются путем вычисления скалярного произведения двух векторов, описывающих контуры объектов.

Однако использовать данный способ можно только в том случае, если выполняется два условия:

- контур должен быть замкнутым;
- контур необходимо преобразовывать таким образом, чтобы все координаты точек могли быть описаны целыми числами.

Оба этих ограничения, как правило, нельзя выполнить для измерений, проводимых с использованием оптических триангуляционных датчиков.

В представленной работе предлагается метод совмещения, который является обобщением первого способа совмещения. Он был разработан с целью уменьшения погрешности измерений за счет использования большего количества точек, чем позволят обеспечить алгоритм с определением контрольных точек. Также разработанный метод позволяет уменьшить процент пропусков измерений, которые возникают при отсутствии измерений участков контуров, по которым происходит вычисление контрольных точек.

### 3. Описание предлагаемого метода совмещения

Разработанный метод заключается в следующем: проводится модификация уравнения (1), чтобы его можно было использовать для обработки подмножеств точек:

$$\begin{cases} v_{ij} = x_{ij} \cdot \cos(\alpha) - y_{ij} \cdot \sin(\alpha) + x_0; \\ w_{ij} = x_{ij} \cdot \sin(\alpha) + y_{ij} \cdot \cos(\alpha) + y_0. \end{cases} \quad (2)$$

где  $i$  – номер подмножества точек,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  – количество подмножеств;  
 $j$  – номер точки в подмножестве,  $j = 1, \dots, m_i$ ,  $m_i$  – количество точек в  $i$ -том подмножестве.

Если в уравнении (1)  $(x_i, y_i)$  – это координаты контрольных точек неизношенного объекта, то в уравнении (2)  $(x_{ij}, y_{ij})$  описывают уравнения линий:

$$y_{ij} = f_i(x_{ij}) \quad (3)$$

$f_i(x)$  – аналитическое уравнение  $i$ -той линии, соответствующее  $i$ -тому подмножеству.

Путем преобразований, выражение (2) можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_{ij} = (v_{ij} - x_0) \cdot \cos(\alpha) + (w_{ij} - y_0) \cdot \sin(\alpha); \\ y_{ij} = -(v_{ij} - x_0) \cdot \sin(\alpha) + (w_{ij} - y_0) \cdot \cos(\alpha). \end{cases} \quad (4)$$

Вводя переменные:  $A = \cos(\alpha)$ ,  $B = \sin(\alpha)$ , выражение (4) можно записать как:

$$\begin{cases} x_{ij} = (v_{ij} - x_0) \cdot A + (w_{ij} - y_0) \cdot B; \\ y_{ij} = -(v_{ij} - x_0) \cdot B + (w_{ij} - y_0) \cdot A; \\ A = (1 - B^2)^{1/2} \end{cases} \quad (5)$$

С учетом выражения (3) и (5) оценка неизвестных выражений по методу наименьших квадратов запишется как:

$$F(A, B, x_0, y_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - f_i(x_{ij}))^2 \rightarrow \min \quad (6)$$

$$F(A, B, x_0, y_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left\{ -(v_{ij} - x_0) \cdot B + (w_{ij} - y_0) \cdot A - f_i((v_{ij} - x_0) \cdot A + (w_{ij} - y_0) \cdot B) \right\}^2 \rightarrow \min \quad (7)$$

Итоговое выражение для оценки параметров определяет система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial B} = 0; & \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0; & \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0; & A = (1 - B^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (8)$$

Выражение (7) и (8) могут быть использованы для решения задач совмещения, которые встречаются в реальной жизни.

В формулах (5) и (8) присутствует выражение  $A = (1 - B^2)^{1/2}$ , которое не является тождественным основному тригонометрическому тождеству  $A^2 + B^2 = 1$ . Использование этой формулы означает наложение ограничения, что косинус угла поворота не может принимать

отрицательные значения. В задачах, представленных ниже, положим, что это условие выполняется.

В задачах, где угол может принимать все возможные значения, необходимо рассматривать оба варианта:  $A = (1 - B^2)^{1/2}$  и  $A = -(1 - B^2)^{1/2}$ , а решение об угле поворота необходимо принимать по дополнительной метрике, определяющей расстояние между совмещаемыми контурами.

#### 4. Примеры задач

Ниже приведены примеры практических задач, для которых были разработаны алгоритмы совмещения:

1) совмещение с контуром, описываемым двумя прямыми линиями (на рисунке 1а представлен пример совмещения с контуром мишени, представляющий собой прямоугольный профиль, на рисунке 1б представлен контур железнодорожного рельса, с которым необходимо совместить контур неизношенного рельса);

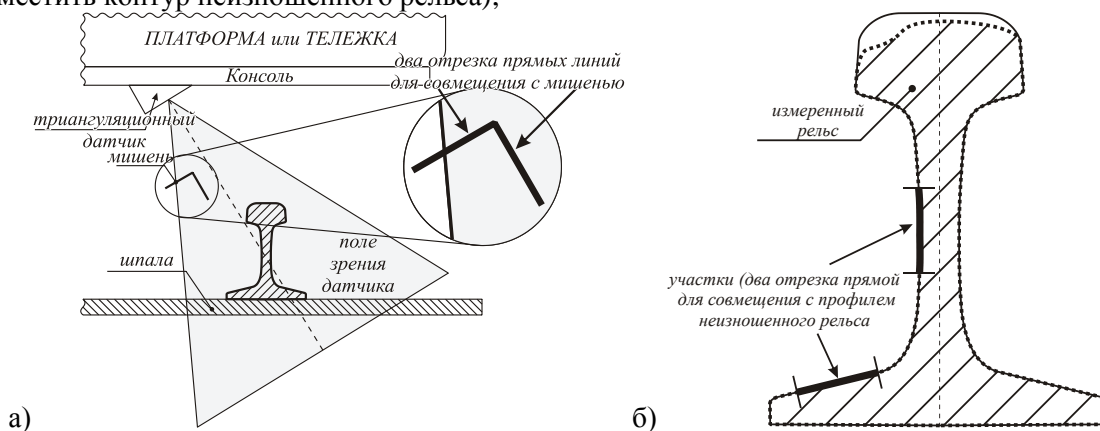


Рисунок 1. Примеры совмещения с контуром, описываемым двумя прямыми линиями.

2) совмещение с контуром, описываемым произвольным количеством прямых линий (на рисунке 2 представлен пример совмещения с контуром бурильной трубы);

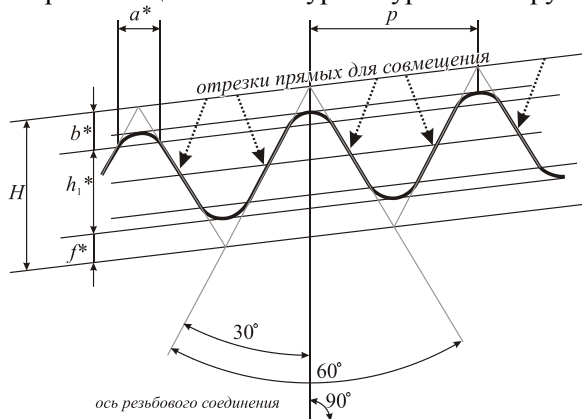
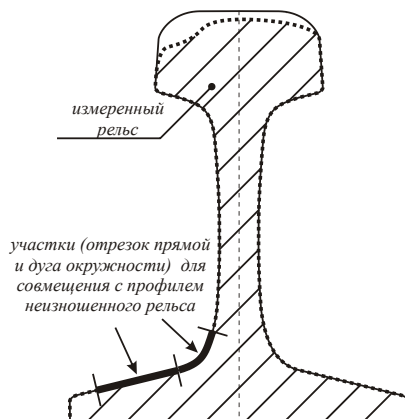


Рисунок 2. Пример совмещения с контуром бурильной трубы, описываемым произвольным количеством прямых линий.

3) совмещение с контуром, описываемым прямой линией и окружностью (на рисунке 3 представлен контур железнодорожного рельса, с которым необходимо совместить контур неизношенного рельса).

Для разработки алгоритмов необходимо, чтобы множество точек, измеренных триангуляционным датчиком, было разбито на подмножества. В работах [13-15] представлены алгоритмы предварительной обработки контуров, которые позволяют разделить исходное

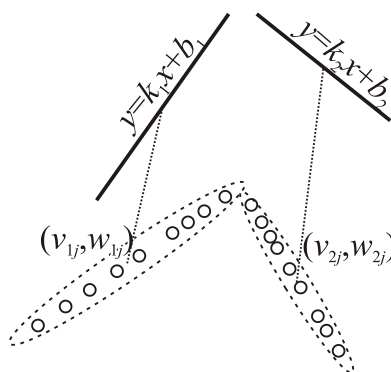
множество точек контура на подмножества по производной и кривизне, вычисленных для каждой точки контура.



**Рисунок 3.** Пример совмещение с контуром, описываемым прямой линией и окружностью.

Пусть будут даны точки на плоскости, соответствующие измеренному профилю.

Точки образуют две совокупности с координатами  $(v_{1j}, w_{1j})$  и  $(v_{2j}, w_{2j})$ , лежащие на различных отрезках прямых. Совокупность точек  $(v_{1j}, w_{1j})$  соответствует уравнению  $y = k_1x + b_1$  эталонного профиля, а  $(v_{2j}, w_{2j})$  – уравнению  $y = k_2x + b_2$ . Задача совмещения – найти такое преобразование, после которого точки  $(v_{1j}, w_{1j})$  будут лежать на прямой  $y = k_1x + b_1$ , а  $(v_{2j}, w_{2j})$  – на  $y = k_2x + b_2$  (см. рисунок 4).



**Рисунок 4.** К задаче совмещения точек с отрезками двух прямых.

Согласно вышеописанному, можно записать:

$$\begin{pmatrix} v_{1j} \\ w_{1j} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & x_0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ y_{1j} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} v_{2j} \\ w_{2j} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & x_0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{2j} \\ y_{2j} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $y_{1j} = k_1x_{1j} + b_1$ ,  $y_{2j} = k_2x_{2j} + b_2$ .

Рассмотрим выражение (9), из него можно выразить:

$$x_{1j} = \cos(\alpha)(v_{1j} - x_0) + \sin(\alpha)(w_{1j} - y_0) \quad (11)$$

$$y_{1j} = -\sin(\alpha)(v_{1j} - x_0) + \cos(\alpha)(w_{1j} - y_0) \quad (12)$$

Перепишем систему уравнений (11) и (12), заменив  $A = \cos(\alpha)$ ,  $B = \sin(\alpha)$ ,  $A^2 + B^2 = 1$ .

$$x_{1j} = A(v_{1j} - x_0) + B(w_{1j} - y_0) \quad (13)$$

$$y_{1j} = -B(v_{1j} - x_0) + A(w_{1j} - y_0) \quad (14)$$

Подставим найденные выражения в уравнение прямой  $y_{1j} - k_1 x_{1j} + b_1 = 0$ , и для определения неизвестных параметров  $(\alpha, x_0, y_0)$  воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$F(A, B, x_0, y_0) = \sum_{j=1}^{m1} \left\{ \left[ -B(v_{1j} - x_0) + A(w_{1j} - y_0) \right] - k_1 \left[ A(v_{1j} - x_0) + B(w_{1j} - y_0) \right] + b_1 \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (15)$$

где  $m1$  – количество точек в подмножестве.

В соответствии с (8) можно записать следующие уравнения:

$$\frac{\partial F(A, B, x_0, y_0)}{\partial B} = N1 \cdot B + M1 = 0; \quad \frac{\partial F(A, B, x_0, y_0)}{\partial x_0} = N2 \cdot x_0 + M2 = 0;$$

$$\frac{\partial F(A, B, x_0, y_0)}{\partial y_0} = N3 \cdot y_0 + M3 = 0; \quad A = (1 - B^2)^{1/2},$$

где 
$$N1 = 2 \sum_{j=1}^{m1} (v_{1j} - x_0 + k_1(w_{1j} - y_0)) \cdot (b_1 - B(w_{1j} - y_0) + A \cdot k_1(v_{1j} - x_0))$$

$$M1 = 2 \sum_{i=1}^n (v_{1j} - x_0 + k_1(w_{1j} - y_0))^2,$$

$$N2 = -2 \sum_{i=1}^n (B + A \cdot k_1) \cdot (b_1 + B \cdot v_{1j} - A(w_{1j} - y_0) + k(A \cdot v_{1j} + B(w_{1j} - y_0))),$$

$$M2 = 2 \sum_{i=1}^n (B + A \cdot k_1)^2,$$

$$N3 = 2 \sum_{i=1}^n (A - B \cdot k_1) \cdot (b_1 - A \cdot r_i + B(p_i - x_0) + k(B \cdot r_i + A(p_i - x_0))),$$

$$M3 = 2 \sum_{i=1}^n (A - B \cdot k_1)^2.$$

Таким образом, система уравнений запишется как:

$$\begin{cases} N1 \cdot B + M1 = 0; \\ N2 \cdot x_0 + M2 = 0; \\ N3 \cdot y_0 + M3 = 0; \\ A = (1 - B^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (16)$$

При выводе этой системы учитывалась только точки  $(v_{1j}, w_{1j})$ . С учетом  $(v_{2j}, w_{2j})$ , выражение (16) переписывается как:

$$F(A, B, x_0, y_0) = \sum_{j=1}^{m1} \left\{ \left[ -B(v_{1j} - x_0) + A(w_{1j} - y_0) \right] - k_1 \left[ A(v_{1j} - x_0) + B(w_{1j} - y_0) \right] + b_1 \right\} + \\ + \sum_{j=1}^{m2} \left\{ \left[ -B(v_{2j} - x_0) + A(w_{2j} - y_0) \right] - k_2 \left[ A(v_{2j} - x_0) + B(w_{2j} - y_0) \right] + b_2 \right\} \rightarrow \min \quad (17)$$

Соответственно выражение для коэффициента:

$$N1 = 2 \sum_{j=1}^{m1} (v_{1j} - x_0 + k_1(w_{1j} - y_0)) \cdot (b_1 - B(w_{1j} - y_0) + A \cdot k_1(v_{1j} - x_0)) + \\ + 2 \sum_{j=1}^{m2} (v_{2j} - x_0 + k_2(w_{2j} - y_0)) \cdot (b_2 - B(w_{2j} - y_0) + A \cdot k_2(v_{2j} - x_0))$$

Аналогичным образом изменяются формулы для  $M1, N2$  и т.д.

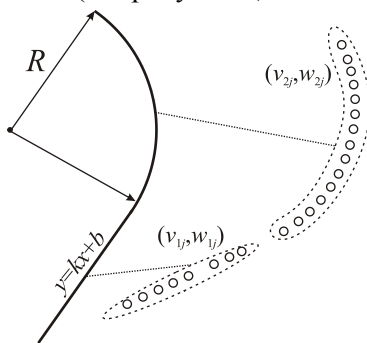
Система уравнений (16) решается итерационным способом, а алгоритм оценивания имеет следующий вид:

1. Задается первоначальное приближение:  $x_0, y_0, B, A = \sqrt{1 - B^2}$ .
2. По координатам  $(v_{1j}, w_{1j}), (v_{2j}, w_{2j})$  и параметрам  $(k_1, b_1), (k_2, b_2), (A, B, x_0, y_0)$  рассчитываются  $N1, N2, N3, M1, M2, M3$ .
3. Рассчитывается:  $B' = -\frac{M1}{N1}, x_0' = -\frac{M2}{N2}, y_0' = -\frac{M3}{N3}, A' = (1 - (B')^2)^{1/2}$ .
4. Присваиваем:  $A = A', B = B', x_0 = x_0', y_0 = y_0', \alpha = \arcsin(B)$ .
5. Переходим к шагу №2.

Количество переходов от шага №2 к шагу №5 определяет количество итераций.

По аналогии с обработкой двух подмножеств точек, лежащих на различных прямых линиях, алгоритм может быть расширен на три и большее количество подмножеств.

Задача совмещения с контуром, описываемым прямой линией и окружностью можно сформулировать следующим образом: совокупность точек  $(v_{1j}, w_{1j})$  лежит на отрезке прямой  $y = kx + b$ , а совокупность точек  $(v_{2j}, w_{2j})$  – на дуге окружности, описываемой уравнением  $x^2 + y^2 = R^2$ , где  $R$  – радиус окружности (см. рисунок 5).



**Рисунок 5.** К задаче совмещения контура по прямой линии и окружности.

С целью упрощения вывода алгоритма центр окружности был помещен в точку  $(0,0)$ . В этом случае уравнение окружности запишется как  $x^2 + y^2 = R^2$ , где  $R$  – радиус окружности.

Подставим в уравнение окружности выражения:

$$x_{2j} = \cos(\alpha)(v_{2j} - x_0) + \sin(\alpha)(w_{2j} - y_0), \quad (18)$$

$$y_{2j} = -\sin(\alpha)(v_{2j} - x_0) + \cos(\alpha)(w_{2j} - y_0) \quad (19)$$

После раскрытия скобок и упрощений в уравнении будет отсутствовать параметр  $\alpha$ :

$$(v_{2j} - x_0)^2 + (w_{2j} - y_0)^2 = R^2 \quad (20)$$

Отметим также еще одну особенность в сравнении с предыдущим алгоритмом. Все три параметра  $(\alpha, x_0, y_0)$  в первом алгоритме были связаны между собой, поэтому параметры нельзя оценивать по отдельности друг от друга.

В рассматриваемом же случае возможна только их отдельная оценка, так как уравнение окружности (формула 20) не зависит от угла  $\alpha$ , а уравнение прямой не связано с параметрами  $x_0, y_0$ , так как можно найти бесконечное количество решений, связывающих между собой  $(\alpha, x_0, y_0)$ .

Соответственно, по уравнению окружности проводится оценка  $x_0, y_0$ , а при фиксированных значениях  $x_0, y_0$  по уравнению прямой проводится оценка угла поворота  $\alpha$ .

Для вывода выражения для оценки  $x_0, y_0$  рассмотрим следующий пример. Для оценки центра окружности достаточно иметь три точки:  $(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_3)$ . Подставим их в выражение (12) и запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} (v_1 - x_0)^2 + (w_1 - y_0)^2 = R^2; \\ (v_2 - x_0)^2 + (w_2 - y_0)^2 = R^2; \\ (v_3 - x_0)^2 + (w_3 - y_0)^2 = R^2. \end{cases} \quad (21)$$

Приравняем уравнение 1 и 2, 1 и 3 системы (21), получим:

$$\begin{cases} (v_1 - x_0)^2 + (w_1 - y_0)^2 = (v_2 - x_0)^2 + (w_2 - y_0)^2; \\ (v_1 - x_0)^2 + (w_1 - y_0)^2 = (v_3 - x_0)^2 + (w_3 - y_0)^2. \end{cases} \quad (22)$$

Приведем выражение (22) к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_0(v_1 - v_2) + 2 \cdot y_0(w_1 - w_2) = (v_1^2 - v_2^2) + (w_1^2 - w_2^2); \\ 2 \cdot x_0(v_1 - v_3) + 2 \cdot y_0(w_1 - w_3) = (v_1^2 - v_3^2) + (w_1^2 - w_3^2). \end{cases} \quad (23)$$

По методу наименьших квадратов можно записать:

$$g(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N (x_0 \cdot dv_{ij} + y_0 \cdot dw_{ij} + dvw_{ij})^2, \quad (24)$$

где  $dv_{ij} = v_i - v_j$ ,  $dw_{ij} = w_i - w_j$ ,  $dvw_{ij} = 0,5 \cdot [(v_i^2 - v_j^2) + (w_i^2 - w_j^2)]$ ,  $N$  – количество точек (примеч.: точки  $(v_i, w_i)$ ,  $(v_j, w_j)$  принадлежат подмножеству  $(v_{2j}, w_{2j})$ , а  $N = m/2$ ).

Решение выражения (24):

$$\begin{cases} \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x_0} = 0, \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y_0} = 0; \end{cases} \begin{cases} x_0 \cdot A11 + y_0 \cdot A12 = B1, \\ x_0 \cdot A21 + y_0 \cdot A22 = B2; \end{cases} \quad (25)$$

$$x_0 = \frac{B1 \cdot A22 - B2 \cdot A21}{A11 \cdot A22 + A12 \cdot A21}, y_0 = \frac{B2 \cdot A11 - B1 \cdot A12}{A11 \cdot A22 + A12 \cdot A21},$$

где  $A11 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N dv_{ij}^2$ ,  $A12 = A21 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N dv_{ij} dw_{ij}$ ,  $A22 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N dw_{ij}^2$ ,  $B1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N dv_{ij} \cdot dvw_{ij}$ ,

$$B2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N dw_{ij} \cdot dvw_{ij}.$$

При известных значениях  $(x_0, y_0)$  можно оценить угол поворота  $\alpha$ . Запишем уравнение, связывающее между собой координаты точек  $(v_{1j}, w_{1j})$  и прямую  $y = kx + b$ .

$$k[\cos(\alpha)(v_{1j} - x_0) + \sin(\alpha)(w_{1j} - y_0)] + b - [-\sin(\alpha)(v_{1j} - x_0) + \cos(\alpha)(w_{1j} - y_0)] = 0$$

Введем обозначение:

$$cv_{1j} = v_{1j} - x_0, cw_{1j} = w_{1j} - y_0.$$

А тригонометрические функции разложим в ряд:

$$\cos(\alpha) \approx 1 - 0,5\alpha^2, \sin(\alpha) \approx \alpha.$$

Получим:

$$k[(1 - 0,5\alpha^2) \cdot cv_{1j} + \alpha \cdot cw_{1j}] + b - [-\alpha \cdot cv_{1j} + (1 - 0,5\alpha^2) \cdot cw_{1j}] = 0$$

По методу наименьших квадратов получим:

$$g(\alpha) = \sum_{i=1}^{m1} \left\{ k[(1 - 0,5\alpha^2) \cdot cv_{1j} + \alpha \cdot cw_{1j}] + b - [-\alpha \cdot cv_{1j} + (1 - 0,5\alpha^2) \cdot cw_{1j}] \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (26)$$

где  $m1$  – количество точек.

Решение уравнения (26):

$$\frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha} = 0, L0 + L1 \cdot \alpha + L2 \cdot \alpha^2 + L3 \cdot \alpha^3 = 0, \quad (27)$$



$$\text{где } L0 = 2 \sum_{i=1}^{m1} (cv_{1j} + cw_{1j} \cdot k) \cdot (b - cw_{1j} + cv_{1j} \cdot k),$$

$$L1 = 2 \sum_{i=1}^{m1} (cr_i + cp_i \cdot k) \cdot (b - cr_i + cp_i \cdot k) + (cp_i + cr_i \cdot k)^2,$$

$$L2 = 2 \sum_{i=1}^{m1} \left\{ (cv_{1j} + cw_{1j} \cdot k) \cdot (cw_{1j} - cv_{1j} \cdot k) + \left( \frac{cw_{1j}}{2} + \frac{cv_{1j}}{2} \cdot k \right) \cdot (cv_{1j} + cw_{1j} \cdot k) \right\},$$

$$L3 = 2 \sum_{i=1}^{m1} \left( \frac{cw_{1j}}{2} - \frac{cv_{1j}}{2} \cdot k \right) \cdot (cw_{1j} - cv_{1j} \cdot k).$$

Уравнение третьей степени решается в радикалах. Только один из корней будет являться вещественным числом, а два других – комплексными числами.

Если угол более  $10^\circ$ , то необходима итерационная процедура.

Итоговый алгоритм для оценки угла  $\alpha$  выглядит следующим образом:

1. Выбирается первоначальное значение угла поворота  $\alpha_k$ ,  $k = 0$ .
2. Рассчитывается матрица поворота:

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) \\ -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{bmatrix}.$$

3. Рассчитываются координаты точек с учетом поворота:

$$\begin{bmatrix} cv_{1j} \\ cw_{1j} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} v_{1j} - x0 \\ w_{1j} - x0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_k) & \sin(\alpha_k) \\ -\sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{1j} - x0 \\ w_{1j} - x0 \end{bmatrix}$$

4. Рассчитываются переменные  $L0$ ,  $L1$ ,  $L2$ ,  $L3$  по формулам, представленным выше.
5. Рассчитываются корни уравнения (27).
6. Из корней уравнения выбирается один корень  $\alpha$ , который является вещественным числом.
7. Рассчитывается уточненный угол:

$$k = k+1, \alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha.$$

8. Перейти к шагу №2.

Количество переходов определяет количество итераций. Выход из процедуры происходит по критерию:  $|\alpha_k - \alpha_{k-1}| < thr$ , где  $thr$  – порог. При моделировании использовался порог равный  $10^{-9}$  рад.

## 5. Численное моделирование

Основная цель, ради которой решалась задача совмещения, – это определение деформации объекта. Ниже приведена методика определения деформации рельса по боковому износу [16] – расстоянию между точкой на неизношенном рельсе и измеренном рельсе на заглублении 13 мм ниже поверхности катания (см. рисунок 6).

Для определения точности измерения параметра бокового износа была использована модель профиля рельса с изношенной головкой и известным значением бокового износа.

К каждой координате точки данного профиля по абсциссе и ординате добавлялась помеха с гауссовым распределением и заданным среднеквадратичным отклонением (СКО).

Согласно выше описанным алгоритмам проводилось совмещение с неизношенным профилем рельсом и вычислялся боковой износ.

Вычисленное значение бокового износа сравнивалось с действительным значением. Результатом сравнения является среднеквадратичная величина (СКВ).

В работе приведены результаты измерений трех способов:

– по двум контрольным точкам, определенным как точки перехода с головки рельса на шейку;

– по двум отрезкам прямых (см. рисунок 1б);

– по отрезку прямой и окружности (см. рисунок 3).

Результаты погрешностей измерений представлены на рисунке 7.

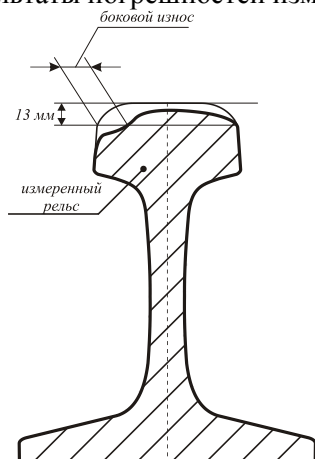


Рисунок 6. Боковой износ.

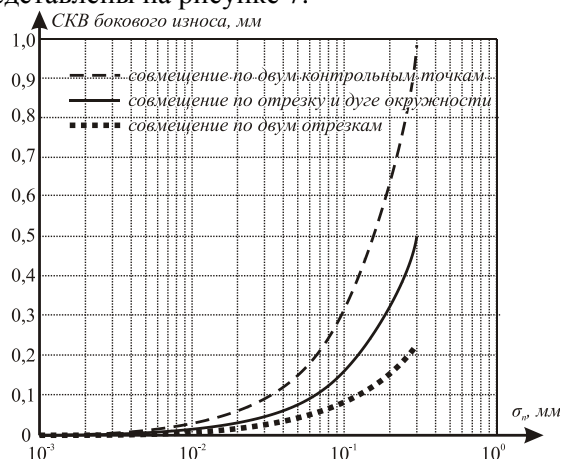


Рисунок 7. Зависимость СКВ бокового износа от шума.

## 6. Заключение

В работе представлены итерационные алгоритмы совмещения сигналов оптических триангуляционных датчиков для оценки деформации объектов.

Алгоритмы были разработаны на основе метода совмещения, связывающего между собой точки контура измеренного объекта и образ неизношенного объекта, описываемого уравнениями линий. Задача совмещения сводится к итерационному решению уравнения, в котором неизвестными параметрами являются параметры совмещения: угол поворота и смещения вдоль абсциссы и ординаты.

Проведенное численное моделирование показало, что разработанные алгоритмы характеризуются меньшей погрешностью измерений, чем алгоритм совмещения по двум контрольным точкам.

Разработанные алгоритмы могут быть использованы в качестве резервного решения задачи совмещения, если основная процедура совмещения не может быть использована. Такой подход позволяет повысить очень важный технико-эксплуатационный параметр – живучесть системы измерений.

## 7. Литература

- [1] Орт, А. Словарь строительных терминов / А. Орт, Р. Фалтинский – СПб.: Штандарт, 2009. – 320 с.
- [2] Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье – М.: Физмалит, 1961. – 824 с.
- [3] Кассандрова, О.Н. Обработка результатов наблюдений / О.Н. Кассандрова, В.В. Лебедев – М.: Наука, 1970 – 104 с.
- [4] Дязитдинов, Р.Р. Оценка поворота и смещения при совмещении двумерных сигналов триангуляционного сканера / Р.Р. Дязитдинов // XI Международная конференция. Оптические технологии в телекоммуникациях. – 2013. – С. 51-53.
- [5] Bookstein, F.L. Fitting Conic Sections to Scattered Data / F.L. Bookstein // Computer Graphics and Image Processing. – 1979. – Vol.9. – P. 56-71.
- [6] Ellis, T. Ellipse Detection and Matching With Uncertainty / T. Ellis, A. Abbood, B. Brillault // Image and Vision Computing. – 1992. – Vol. 2. – P. 271-276.
- [7] Gander, W. Least-Square Fitting of Circles and Ellipses / W. Gander, G.H. Golub, R. Strebler // BIT. – 1994. – Vol. 34. – P. 558-578.
- [8] Rosin, P.L. A Note on the Least Squares Fitting of Ellipses / P.L. Rosin // Pattern Recognition Letters. – 1994. – Vol.14. – P. 799-808.
- [9] Rosin, P.L. Nonparametric Segmentation of Curves Into Various Representations / P.L. Rosin, G.A. West // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1995. – Vol. 12. – P. 1140-1153.

- [10] Sampson, P.D. Fitting Conic Sections to Very Scattered Data: An Iterative Refinement of the Bookstein Algorithm / P.D. Sampson // Computer Graphics and Image Processing. – 1982. – Vol. 18. – P. 97-108.
- [11] Fitzgibbon, A. A buyer's guide to conic fitting / A. Fitzgibbon, R. Fisher // BMVC. – 1995. – Vol. 9(7). – P. 513-522.
- [12] Фурман, Я.А. Введение в контурный анализ; приложения к обработке изображений и сигналов / Я.А. Фурман, А.К. Передреев, А.А. Роженцов, Р.Г. Хафизов, И.Л. Егоршина, А.Н. Леухин – М.: Физмалит, 2003. – 592 с.
- [13] Васин, Н.Н. Обработка данных оптических триангуляционных сканеров для измерения профилей рельсов / Н.Н. Васин, Р.Р. Диязитдинов // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 6. – С. 1054-1061. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-6-1054-1061.
- [14] Диязитдинов, Р.Р. Оценивание параметров положения контура кривой в профильной системе / Р.Р. Диязитдинов // Инфокоммуникационные технологии. – 2014. – Т. 12, № 2. – С. 70-73.
- [15] Диязитдинов, Р.Р. Совмещение профиля резьбы бурильной трубы с эталонным профилем / Р.Р. Диязитдинов // Инфокоммуникационные технологии. – 2016. – Т. 14, № 1. – С. 59-63.
- [16] ГОСТ 51685-2013. Рельсы железнодорожные. Общие технические условия, 2013. – 101 с.

## Iterative Algorithm of Optical Triangulation Sensors Signals Superposition for Measuring Solid Deformation

R.R. Diyazitdinov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, L. Tolstoy str. 23, Samara, Russia, 443010

**Abstract.** The article described the algorithms for counter superposition. The first counter is etalon signal. The first counter output signal of optical triangulation sensor (measured object counter). The counter superposition method was developed on hypothesis that etalon counter consists of line equations and measured counter consists of points sequence. The superposition include two processing stage. The first stage is dividing source sequence point on point subsequences. The second stage is making equation that links line equations with point subsequences. The superposition parameters are calculated from this equation. The article was shown several iterative algorithms which differs source data (the line types for etalon signal). The error measuring of solid deformation was shown at example side wear railway rail. The developing superposition algorithms were compared with superposition by control points.