К задаче оптимального распределения физического ресурса управления для сепаратных динамических систем

Ю.Н. Горелов[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Рассматривается задача оптимального распределения ограниченного скоростью расхода ресурса управления между сепаратными объектами управления. В качестве ресурса, необходимого для создания управляющих воздействий, рассматриваются энергетический – в виде мгновенной мощности – и материальный – в виде скорости расхода «топлива» – ресурсы управления. Приведены примеры решения этой задачи на фиксированном интервале для системы с объектами управления – двойными интеграторами, локальные цели управления для которых задаются граничными условиями общего вида. По результатам решения указанных задач выявлены основные особенности оптимального распределения ресурса управления в зависимости от его вида и отмечено, что рассмотренные задачи управления можно отнести к классу смешанных задач по А.М. Летову.

1. Введение

В [1] отмечается, что решение проблем создания эффективных систем управления различными объектами и процессами управления возможно с максимальным использованием физических моделей и переменных, а также с учетом реальных физических ограничений (энергетических, информационных, материальных и иных), играющих существенную роль в задачах управления, когда возникает необходимость распределения каких-либо «ресурсов управления». Еще одним таким примером являются так называемые смешанные задачи оптимального управления [2] (см. С.193–194), в которых предполагалось строгое разделение ресурсов управления при решении независимых по постановке вариационных задач для одного и того же объекта (например, в задаче о прилунении космического аппарата [2]), что носит волевой характер и не отвечает духу двух независимых задач: задачи программирования оптимальных траекторий и задачи синтеза законов обратной связи. В связи с этим цель настоящей статьи – постановка задачи распределения физического ресурса управления определенного вида между сепаратными (независимыми) объектами управления, которые используют этот ресурс для создания управляющих воздействий при одновременном решении ими парциальных задач управления. В качестве ресурсов управления здесь будут рассматриваться энергетические и материальные ресурсы, скорость расходования которых ограничена: в первом случае – это текущая мощность источника энергетического ресурса (затрачиваемой на создание управляющих воздействий), а во втором случае – скорость расходования материального ресурса в виде некоторого «топлива», скорость расходования которого пропорциональна создаваемым за счет его затрат управляющим воздействиям на объект управления.

2. Постановка задачи

Рассмотрим двухточечную граничную задачу для k-го объекта управления ($k = 1, 2, \ldots, N$, $N \geq 2$)

$$\frac{d\boldsymbol{x}_k}{dt} = \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), \quad (1)$$

где $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ – вектор переменных состояния, $\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^{m_k}$ – вектор управляющих параметров, $\boldsymbol{f}_k : \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}^{n_k}$, с граничными условиями общего вида в качестве целевых условий k-й парциальной задачи управления:

$$\boldsymbol{x}_k(t_0) = \boldsymbol{x}_{k0}; \ \boldsymbol{x}_k(t_f) = \boldsymbol{x}_{kf}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{x}_{k0}$, $\boldsymbol{x}_{kf}$ – начальные и конечные состояния k-го объекта управления (1). На управляющие параметры в (1) накладывается ограничение:

$$\boldsymbol{u}_k \in \boldsymbol{U}_k \subset \mathbb{R}^{m_k}, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{U}_k$ – компактное множество. Ограничения (3) в прикладных задачах в модели (1), как правило, определяются ограничениями на допустимые значения управляющих воздействий на объект управления. В k-й задаче (1) – (3) требуется найти любую допустимую программу управления $\boldsymbol{u}_k(t) \in \boldsymbol{U}_k$, $\forall t \in [t_0, t_f]$, которая обеспечивает выполнение граничных условий (2), то есть достигается соответствующая цель управления. Если решение задачи (1) – (3) является неединственным, то ее можно переформулировать как задачу оптимального управления, в которой требуется минимизировать некоторый функционал $J_k = J_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)$, что также может служить целью управления, но более общей в сравнении с локальной целью (2). Функционал J_k, как правило, выбирается исходя из требования минимизации суммарных расходов каких-либо физических ресурсов, затраты которых связаны с необходимостью создания управляющих воздействий при решении задачи (1) – (3). Если в каждый момент времени формирование $\boldsymbol{u}_k(t) \in \boldsymbol{U}_k$ сопряжено с затратами некоторого ресурса со скоростью $\rho_k(t) \geq 0$, тогда можно выбрать $J_k = \int_{t_0}^{t_f} \rho_k(t)\, dt$. В прикладных задачах управления необходимо учитывать не только ограничения (3), но и ограничения на расходуемый ресурс управления:

$$\rho_k \leq \rho_0, \quad (4)$$

где $\rho_0 < \infty$ – максимально допустимые скорости его расходования. Если $R_k(\boldsymbol{u}_k) = \rho_k$, то с помощью обратной функции $R_k^{-1}(\rho_k)$ можно определить $\bar{\boldsymbol{U}}_k$ – множество допустимых ограничением (4) значений управляющих параметров. Условия типа (4) могут существенно ограничить множество допустимых значений управляющих параметров (3), если $\boldsymbol{U}_k \setminus \bar{\boldsymbol{U}}_k \neq \varnothing$. Кроме того, следует особо отметить, что в (3) и в случае $\boldsymbol{u}_k \in \bar{\boldsymbol{U}}_k$ значения управляющих параметров могут иметь различный физический смысл, то есть их значения будут совпадать лишь с точностью до размерности.

Рассмотрим совокупность сепаратных объектов управления (1), образующих систему с единым источником физического ресурса, необходимого для решения парциальных задач управления (1) – (3), $\forall k = 1, 2, \ldots, N$. Но тогда вместо (4) необходимо ввести в рассмотрение следующее совместное ограничение:

$$\sum_{k=1}^{N} R_k(\boldsymbol{u}_k) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \leq \rho_0, \quad (5)$$

Локальные цели управления для каждой из парциальных задач (1) – (3) можно пополнить показателями качества J_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, то есть для получаемой системы можно ввести общую цель управления в виде

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k J_k(\boldsymbol{u}_k) \to \min, \quad (6)$$

где $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, ..., N$, – некоторые весовые коэффициенты. Если с помощью J_k оценивается суммарный расход ресурса управления на решение k-й парциальной задачи, то коэффициенты α_k в (6) можно рассматривать в качестве приоритетов в расходовании ресурса k-ми объектами управления при решении всей совокупности парциальных задач (1) – (3).

Таким образом, задача оптимального управления (1) – (3), (5), (6) существенно отличается от задач (1) – (3) ($k = 1, 2, ..., N$) в силу ограничения (5), которое с учетом (6) обусловливает необходимость оптимального распределения ресурса между сепаратными объектами (1) при условии согласованного и одновременного решения для них соответствующих парциальных задач управления. Задачи такого типа относятся к классу ресурсных систем, которые также можно отнести и к соответствующим задачам как физической теории управления [1], так и теории оптимального управления [2].

В силу достаточной общности приведенной постановки задачи (1) – (3), (5), (6) для получения содержательных результатов ее решения, выявляющих особенности оптимального распределения ресурса управления в зависимости от его вида, целесообразно конкретизировать соответствующим образом ее элементы, а именно: модели объектов управления (1); решаемые для них парциальные задачи, то есть с учетом (2) и с учетом ограничений на множества допустимых управляющих воздействий. Поэтому далее решение задачи (1) – (3), (5), (6) далее будет рассматриваться только для объектов управления простейшего вида.

3. Задача оптимального распределения ресурса в системе двойных интеграторов

Рассмотрим модельный вариант постановки задачи (1) – (3), (5), (6) для заданного интервала $[0, T]$ и $N = 2$, выбирая в качестве объектов управления двойные интеграторы, для которых локальные цели управления определяются граничными условиями общего вида. Соответственно, интегральные показатели качества решения парциальных задач выбираются в зависимости от вида расходуемого ресурса управления. Если требуется минимизировать суммарный расход «энергии управления», то такой показатель имеет вид

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt, \tag{7}$$

где значение $u^2(t)/2$ пропорционально текущей потребляемой мощности, необходимой для создания управляющего воздействия $u(t)$. Если же требуется минимизировать расход какого-либо материального ресурса в виде «топлива», вместо (7) следует рассматривать функционал

$$J = \int_0^T |u(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{8}$$

где $|u(t)|$ мгновенную скорость расхода «топлива».

Итак, рассмотрим задачу оптимального управления для следующей системы:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2;\quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = u_1;\quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2;\quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = u_2, \tag{9}$$

в которой на управляющие параметры соответствующих подсистем накладываются ограничения:

$$u_1^2(t) \leq m_1^2;\quad u_2^2(t) \leq m_2^2,\ \forall t \in [0, T], \tag{10}$$

где m_1 и m_2 – максимально возможные уровни управляющих воздействий, а граничные условия задаются в общем виде:

$$x_1(0) = x_{10};\ x_2(0) = x_{20};\ x_1(T) = x_{1f};\ x_2(T) = x_{2f};\ y_1(0) = y_{10};\ y_2(0) = y_{20};\ y_1(T) = y_{1f};\ y_2(T) = y_{2f}, \tag{11}$$

где x_{10}, x_{20}, x_{1f}, x_{2f}, y_{10}, y_{20}, y_{1f}, y_{2f} – заданные параметры.

С учетом (7) для задачи (9) – (11) требуется минимизировать функционал

$$J_0 = \frac{1}{2}\int_0^T (\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2)\mathrm{d}t, \tag{12}$$

где $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$.

Ограничения (10) задают следующие множества допустимых управляющих воздействий:

$\boldsymbol{U}_1 = \{u_1 \in \mathbb{R} : |u_1| \leq m_1\}$; $\boldsymbol{U}_2 = \{u_2 \in \mathbb{R} : |u_2| \leq m_2\}$,

а также $\boldsymbol{U}_{12} = \boldsymbol{U}_1 \bigcap \boldsymbol{U}_2$ – прямоугольник в плоскости $\mathrm{O}u_1u_2$ с центром в ее начале.

В соответствии с постановкой задачи (1) – (3), (5), (6) отметим, что управляющие параметры u_1 и u_2 в (9) и (10) отвечают управляющим воздействиям на объекты управления, а в (7) и (8) они характеризуют скорости расходования ресурса управления, на которую накладывается ограничение вида (4), а именно: $u_k^2 \leq 2\rho_0$ или $|u_k^2(t)| \leq \rho_0$. В зависимости от значений m_1, m_2 и ρ_0 (с учетом их размерностей и различного физического смысла) существенными могут быть либо ограничения на управляющие воздействия (10), либо на скорость расходования ресурса управления вида (5). Поэтому с учетом (5) и (7) введем для управляющих параметров еще одно ограничение, а именно:

$$\eta_1 u_1^2(t) + \eta_2 u_2^2(t) \leq 2E_0, \ \forall t \in [0, T], \tag{13}$$

где E_0 – мощность источника ресурса управления, а $\eta_1 \geq 1$, $\eta_2 \geq 1$ – коэффициенты, которые учитывают непроизводительные затраты ресурса при формировании управляющих воздействий, например, из-за потерь в исполнительных органах. Ограничением (13) задается множество:

$\boldsymbol{U}_E = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 \leq 2E_0\}$,

то есть $\boldsymbol{U}_E$ – область, ограниченная эллипсом в плоскости $\mathrm{O}u_1u_2$ с центром в начале и с полуосями, равными $\sqrt{2E_0/\eta_1}$ и $\sqrt{2E_0/\eta_2}$.

С учетом (10) и (13) множество допустимых значений управляющих параметров задается так: $\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}_{12} \bigcap \boldsymbol{U}_E$. Если $\boldsymbol{U}_E \subseteq \boldsymbol{U}_{12}$, то $\boldsymbol{U}_E$ существенное, а $\boldsymbol{U}_{12}$ несущественное множество и его можно исключить из рассмотрения. Если же $\boldsymbol{U}_{12} \subseteq \boldsymbol{U}_E$, то можно исключить $\boldsymbol{U}_E$. В общем случае $(\boldsymbol{U}_{12} \bigcup \boldsymbol{U}_E)/(\boldsymbol{U}_{12} \bigcap \boldsymbol{U}_E) \neq \varnothing$ ограничения (10), (13) существенные или эффективные.

Таким образом, можно сформулировать следующую задачу оптимального распределения энергетического ресурса управления: для двухточечной граничной задачи (9), (11) найти такие программы оптимального управления $\tilde{u}_1(t)$ и $\tilde{u}_2(t)$, которые удовлетворяют ограничениям (10), (13) и доставляют минимум функционалу (12).

В том случае, когда в задаче (9) – (11) ограничение (5) учитывается вместе с показателем (8), следует минимизировать функционал

$$J_0 = \int_0^T (\alpha_1 |u_1| + \alpha_2 |u_2|) \mathrm{d}t, \tag{14}$$

где $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, а для управляющих параметров в (9) ввести совместное ограничение в виде:

$$\eta_1 |u_1(t)| + \eta_2 |u_2(t)| \leq M_0, \ \forall t \in [0, T], \tag{15}$$

где M_0 – максимальная скорость расхода ресурса, а $\eta_1 \geq 1$, $\eta_2 \geq 1$. Управляющим параметрам в (9) согласно (10) отвечает множество допустимых управляющих воздействий $\boldsymbol{U}_{12} = \boldsymbol{U}_1 \bigcap \boldsymbol{U}_2$, а в (15) они характеризуют скорости расходования ресурса, то есть ограничения (10) и (15) здесь имеют различный физический смысл. В плоскости $\mathrm{O}u_1u_2$ ограничению (15) отвечает следующее множество:

$$\boldsymbol{U}_M = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \eta_1 |u_1| + \eta_2 |u_2| \leq M_0\}.$$

Очевидно, что $\boldsymbol{U}_M$ – ромбовидная область в плоскости $\mathrm{O}u_1u_2$ с центром в начале и с полудиагоналями, совмещенными с координатными осями и равными M_0/η_1 и M_0/η_2. Как и в случае ограничений (10) и (13), здесь также имеет место взаимная эффективность (или неэффективность) ограничений (10) и (15) и в самом общем случае они будут эффективными, если $(\boldsymbol{U}_{12} \bigcup \boldsymbol{U}_M) / (\boldsymbol{U}_{12} \bigcap \boldsymbol{U}_M) \neq \varnothing$.

Итак, можно сформулировать еще одну задачу оптимального распределения ресурса управления, который представлен материальным ресурсом (типа «топлива»), а именно: для двухточечной граничной задачи (9), (11) найти такие программы оптимального управления $\tilde{u}_1(t)$ и $\tilde{u}_2(t)$, которые удовлетворяют ограничениям (10), (15) и доставляют минимум функционалу (14).

4. К решению задачи оптимального распределения энергетического ресурса управления

Рассмотрим задачу оптимального распределения энергетического ресурса управления (9) – (13). Вначале предположим, что ограничения (10) и (13) неэффективны. Применяя принцип максимума Л.С. Понтрягина [3, 4], запишем гамильтониан для этой задачи

$$H = -\tfrac{1}{2}(\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2) + \psi_1 x_2 + \psi_2 u_1 + \psi_3 y_2 + \psi_4 u_2\,, \qquad (16)$$

где сопряженные переменные ψ_k, $k = 1,2,3,4$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} = 0\,;\; \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} = -\psi_1;\; \frac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}t} = 0\,;\; \frac{\mathrm{d}\psi_4}{\mathrm{d}t} = -\psi_3\,. \qquad (17)$$

Из условия максимум H (16) по u_1 и u_2 получим программу оптимального управления

$$\tilde{u}_1(t) = \psi_2(t) / \alpha_1\,;\quad \tilde{u}_2(t) = \psi_4(t) / \alpha_2\,, \qquad (18)$$

где $\psi_2(t)$ и $\psi_4(t)$ – решения уравнений (17) с начальными значениями ψ_{k0}, $k = 1,2,3,4$, получаемыми из решения соответствующей краевой задачи [4], а именно:

$$\psi_2(t) = \psi_{20} - \psi_{10}\, t\,;\;\; \psi_4(t) = \psi_{40} - \psi_{30}\, t\,. \qquad (19)$$

Если программа (18) не удовлетворяет ограничениям (10), то есть когда $\boldsymbol{U}_{12}$ эффективно и $\boldsymbol{U}_{12} \subseteq \boldsymbol{U}_E$, то (18) корректируется за счет соответствующего изменения в (19) значений ψ_{k0}, $k = 1,2,3,4$. При этом с учетом линейности функций (19) программа (18) будет иметь вид: $\tilde{u}_1(t) = m_1 \,\mathrm{sat}\, [\psi_2(t) / \alpha_1]$; $\tilde{u}_2(t) = m_2 \,\mathrm{sat}\, [\psi_4(t) / \alpha_2]$, где $\mathrm{sat}\, [\psi_2(t) / \alpha_1]$ – функция насыщения.

Если $\boldsymbol{U}_E \subseteq \boldsymbol{U}_{12}$, то ограничения (10) будут неэффективными и максимум H (16) по u_1 и u_2 следует отыскивать с учетом ограничения (13), которые в силу линейности функций (19) либо не нарушаются, когда $\eta_1 \bar{u}_1^2 + \eta_2 \bar{u}_2^2 \le 2E_0$, где $\bar{u}_1 = \psi_2 / \alpha_1$ и $\bar{u}_2 = \psi_4 / \alpha_2$, либо нарушаются, если $\eta_1 \bar{u}_1^2 + \eta_2 \bar{u}_2^2 > 2E_0$. В последнем случае для нахождения оптимальных значений $\tilde{u}_1$и $\tilde{u}_2$, отвечающих значениям ψ_2 и ψ_4, максимум H (16) по u_1 и u_2 следует отыскивать с учетом ограничения $\eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 = 2E_0$. Для этого воспользуемся методом множителей Лагранжа [5], вводя в рассмотрение вспомогательную функцию $F(u_1, u_2, \lambda) = H(u_1, u_2) + \tfrac{1}{2}\lambda(\eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 - 2E_0)$, где λ – множитель Лагранжа. Отыскивая максимум функции F по u_1 и u_2, получим такие соотношения для вычисления оптимальных управляющих параметров:

$$\tilde{u}_1(\lambda) = \frac{\psi_2}{\alpha_1 - \lambda\eta_1}\,;\quad \tilde{u}_2(\lambda) = \frac{\psi_4}{\alpha_2 - \lambda\eta_2}\,. \qquad (20)$$

Можно показать, что в случае выполнения равенства $\eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 = 2E_0$, должно быть $\lambda < 0$. Это же равенство должно выполняться и для значений (20), то есть отсюда тогда получим следующее уравнение относительно λ:

$$\frac{\eta_1 \psi_2^2}{(\alpha_1 - \lambda\eta_1)^2} + \frac{\eta_2 \psi_4^2}{(\alpha_2 - \lambda\eta_2)^2} = 2E_0\,, \qquad (21)$$

которое в общем случае является алгебраическим уравнением четвертой степени.

В одном из случаев при $\eta_1 = \eta_2 = \eta \geq 1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ из (21) получим: $\psi_2^2 + \psi_4^2 = 2E_0(1-\lambda)^2$, а отсюда с учетом $\lambda < 0$ следует: $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\eta}\left(1 - \sqrt{\frac{\eta(\psi_2^2 + \psi_4^2)}{2E_0}}\right) < 0$. В общем же случае необходимо решить уравнение (21) и для найденного $\lambda = \tilde{\lambda}$ вычислить значения управляющих параметров (20). Таким образом, в случае $\boldsymbol{U}_E \subseteq \boldsymbol{U}_{12}$, когда ограничения (13) для значений ψ_2 и ψ_4 будут нарушаться, получены соотношения для расчета оптимальных значений $\tilde{u}_1$и $\tilde{u}_2$ (20). При этом энергетический ресурс управления будет использоваться полностью, в отличие от значений ψ_2 и ψ_4, для которых (13) не нарушается, и расчет $\tilde{u}_1$и $\tilde{u}_2$ проводится в соответствии (18) по формулам: $\tilde{u}_1 = \psi_2 / \alpha_1$; $\tilde{u}_2 = \psi_4 / \alpha_2$. Последнее означает, что не полностью используемый ресурс тогда распределяется соответствующим образом между этими подсистемами в (9).

Аналогичная ситуация имеет место и в том случае, когда $(\boldsymbol{U}_{12} \bigcup \boldsymbol{U}_E) / (\boldsymbol{U}_{12} \bigcap \boldsymbol{U}_E) \neq \varnothing$, то есть ограничения (10), (13) эффективны. Тогда оптимальные значения $\tilde{u}_1$и $\tilde{u}_2$ определяются для значений ψ_2 и ψ_4, получаемых из (19), либо по формулам:$\tilde{u}_1 = \bar{u}_1 = \psi_2/\alpha_1$; $\tilde{u}_2 = \bar{u}_2 = \psi_4 / \alpha_2$, либо в зависимости от эффективности $\boldsymbol{U}_{12}$ или $\boldsymbol{U}_E$ по следующим формулам: в первом случае по формулам $\tilde{u}_1 = m_1 \operatorname{sat}[\psi_2 / \alpha_1]$ и $\tilde{u}_2 = m_2 \operatorname{sat}[\psi_4 / \alpha_2]$; во втором случае в соответствии с (20) и с учетом решения уравнения (21). В конечном счете, полученные соотношения для расчета $\tilde{u}_1$и $\tilde{u}_2$ в зависимости от значений ψ_2 и ψ_4 используются при формировании программы оптимального управления $\tilde{u}_1(t)$ и $\tilde{u}_2(t)$ в процессе коррекции начальных значений ψ_{k0}, $k = 1,2,3,4$, в (19). Таким образом, получен общий алгоритм решения задачи оптимального управления (9) – (13). Анализ результатов решения этой задачи показывает, что получаемые для нее распределения энергетического ресурса управления между сепаратными объектами управления в системе (9) характеризуются непрерывным и согласованными распределениями такого ресурса управления.

5. К решению задачи оптимального распределения материального ресурса управления

Рассмотрим здесь задачу оптимального управления (9) – (11), (14), (15), в которой реализуется оптимальное распределения материального ресурса между сепаратными объектами управления – двойными интеграторами. Приступая к ее решению, вначале запишем ее гамильтониан [3, 4]:

$$H = -\alpha_1 |u_1| - \alpha_2 |u_2| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u_1 + \psi_3 y_2 + \psi_4 u_2, \tag{22}$$

где сопряженные переменные ψ_k, $k = 1, 2, 3, 4$, также удовлетворяют системе уравнений (17), решения которых заданных ψ_{k0}, $k = 1, 2, 3, 4$, приведены в (19).

Очевидно, что в случае $\boldsymbol{U}_{12} \subseteq \boldsymbol{U}_M$, когда из рассмотрения исключается ограничение (15), то есть максимум функции H (22) тогда доставляется управляющими параметрами, для которых $\operatorname{sign} \tilde{u}_1 = \operatorname{sign} \psi_2$ (при $|\psi_2| \geq \alpha_1$) и $\operatorname{sign} \tilde{u}_2 = \operatorname{sign} \psi_4$ (при $|\psi_4| \geq \alpha_2$), или, что то же самое, когда программа оптимального управления имеет вид:

$$\tilde{u}_1(t) = \begin{cases} m_1 \operatorname{sign} \psi_2(t), & |\psi_2(t)| \geq \alpha_1; \\ 0, & |\psi_2(t)| < \alpha_1; \end{cases} \qquad \tilde{u}_2(t) = \begin{cases} m_2 \operatorname{sign} \psi_4(t), & |\psi_4(t)| \geq \alpha_2; \\ 0, & |\psi_4(t)| < \alpha_2. \end{cases} \tag{23}$$

То есть в случае неэффективности $\boldsymbol{U}_M$ программа (23) реализует независимое оптимальное управление для соответствующих подсистем в (9).

Рассмотрим далее решение задачи, когда $\boldsymbol{U}_M \subseteq \boldsymbol{U}_{12}$, исключив из рассмотрения (10). В этом случае максимум H (22) по u_1 и u_2 должен отыскиваться с учетом ограничения (15). Пусть $0 < \xi \leq 1$ – доля использования располагаемого ресурса; при $\xi = 0$ $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$.

Исходя из (15), введем следующие соотношения:

$$\rho = \frac{\eta_1 |u_1|}{\xi M_0}; \;\; 1-\rho = \frac{\eta_2 |u_2|}{\xi M_0}, \tag{24}$$

где $0 \le \rho \le 1$ – доля используемого ресурса для создания управляющего воздействия u_1, а его оставшаяся доля, то есть $1-\rho$, предназначается для создания u_2. С учетом (24) из (22) получим

$$H = \xi M_0 \left[\rho(|\psi_2| - \alpha_1)/\eta_1 + (1-\rho)(|\psi_4| - \alpha_2)/\eta_2 \right] + \psi_1 x_2 + \psi_3 y_2, \tag{25}$$

введем функцию

$$K(\rho;\psi_2,\psi_4) = \rho(|\psi_2| - \alpha_1)/\eta_1 + (1-\rho)(|\psi_4| - \alpha_2)/\eta_2 \tag{26}$$

и перепишем (25) в следующем виде:

$$H = \xi M_0 K(\rho;\psi_2,\psi_4) + \psi_1 x_2 + \psi_3 y_2. \tag{27}$$

Из условия максимума гамильтониана (22) по u_1 и u_2 и с учетом (24) из (27) следует, что при любом значении $K < 0$ должно быть $\xi = 0$, то есть располагаемый ресурс управления в этом случае не используется и, стало быть, $\tilde{u}_1 = 0$ и $\tilde{u}_2 = 0$, что является следствием выполнения условий: $|\psi_2| < \alpha_1$; $|\psi_4| < \alpha_2$. Введем в плоскости $O\psi_2\psi_4$ следующие области (полосы):

$$\boldsymbol{\Psi}_2 = \{(\psi_2,\psi_4): |\psi_2| \le \alpha_1; \psi_4 \in \mathbb{R}^1\}; \;\; \boldsymbol{\Psi}_4 = \{(\psi_2,\psi_4): \psi_2 \in \mathbb{R}^1; |\psi_4| \le \alpha_2\},$$

границы которых обозначим как $\partial\boldsymbol{\Psi}_2$ и $\partial\boldsymbol{\Psi}_4$. То есть указанный случай отвечает выполнению условий: $(\psi_2,\psi_4) \in \boldsymbol{\Psi}_2 \setminus \partial\boldsymbol{\Psi}_2$; $(\psi_2,\psi_4) \in \boldsymbol{\Psi}_4 \setminus \partial\boldsymbol{\Psi}_4$. Если, к примеру, $\psi_2 \in \partial\boldsymbol{\Psi}_2$, а $\psi_4 \in \boldsymbol{\Psi}_4 \setminus \partial\boldsymbol{\Psi}_4$, то $\max\limits_{\rho} K(\rho;\psi_2,\psi_4) = 0$ при $\rho = 1$, а максимум функции (27) достигается при любом $0 \le \xi \le 1$, то есть с учетом (24) при $|\tilde{u}_1| = \xi M_0/\eta_1$ и $\tilde{u}_2 = 0$. Напротив, если $\psi_2 \in \boldsymbol{\Psi}_2 \setminus \partial\boldsymbol{\Psi}_2$ и $\psi_4 \in \partial\boldsymbol{\Psi}_4$, то $\max\limits_{\rho} K(\rho;\psi_2,\psi_4) = 0$ при $\rho = 0$ и, соответственно, максимум функции (27) также достигается при любом $0 \le \xi \le 1$, то есть здесь $\tilde{u}_1 = 0$ и $|\tilde{u}_2| = \xi M_0/\eta_2$. С учетом линейности функций (19) поэтому следует принять, что в случае $(\psi_2,\psi_4) \in \boldsymbol{\Psi}_{24} = \boldsymbol{\Psi}_2 \cap \boldsymbol{\Psi}_4$ имеет место: $\tilde{u}_1 = 0$; $\tilde{u}_2 = 0$.

Далее остается рассмотреть условия максимума функции (27) для следующих сочетаний (ψ_2,ψ_4): 1) $(\psi_2,\psi_4) \in \boldsymbol{\Psi}_4 \setminus \boldsymbol{\Psi}_{24}$; 2) $(\psi_2,\psi_4) \in \boldsymbol{\Psi}_2 \setminus \boldsymbol{\Psi}_{24}$; 3) $(\psi_2,\psi_4) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\boldsymbol{\Psi}_2 \cup \boldsymbol{\Psi}_4) = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$.

В первом случае для (26) получим: $\max\limits_{\rho} K(\rho;\psi_2,\psi_4) = (|\psi_2| - \alpha_1)/\eta_1$ при $\rho = 1$, и, стало быть, максимум (27) достигается при $\xi = 1$. Поэтому оптимальные значения для управляющих параметров с учетом (2.10) вычисляются так: $|\tilde{u}_1| = M_0/\eta_1$ и $\tilde{u}_2 = 0$. Во втором случае получим $\rho = 0$, $\xi = 1$, то есть здесь $\tilde{u}_1 = 0$ и $|\tilde{u}_2| = M_0/\eta_2$.

Таким образом, в этих случаях располагаемый ресурс управления используется полностью только одним из объектов управления в системе (9).

В третьем случае $(\psi_2,\psi_4) \in \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ в выполняются условия: $|\psi_2| > \alpha_1$; $|\psi_4| > \alpha_2$, то есть $K > 0$ для любых $0 \le \rho \le 1$; максимум функции (26) по ρ определяется в зависимости от значения $\chi = \eta_2(|\psi_2| - \alpha_1) - \eta_1(|\psi_4| - \alpha_2)$ так: $\max\limits_{\rho} K(\rho;\psi_2,\psi_4) = \begin{cases} (|\psi_2| - \alpha_1)/\eta_1, \chi > 0; \\ (|\psi_4| - \alpha_2)/\eta_2, \chi < 0. \end{cases}$ Если $\chi = 0$, то для любого $0 \le \rho \le 1$ также получим $K = (|\psi_2| - \alpha_1)/\eta_1 = (|\psi_4| - \alpha_2)/\eta_2 > 0$, то есть в (27) должно быть $\xi = 1$, что требует отдельного исследования из-за допускаемого произвола в выборе ρ, так как здесь возможно существование особого оптимального управления [5]. Отметим, что при $\chi = 0$ в $O\psi_2\psi_4$ задается соответствующее разбиение области $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$, в которых возникает «конкуренция» за использование ресурса управления между сепаратными объектами управления в (9). В каждом квадранте $O\psi_2\psi_4$ уравнением $\chi(\psi_2,\psi_4)=0$ задаются лучи L_k, $k=1,2,3,4$, с началами в точках $(\pm\alpha_1,\pm\alpha_2)$ (нумерация L_k ведется против часовой стрелки), которые делят $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ на соответствующие подобласти, в которых либо $\chi>0$, либо $\chi<0$, и вместе с границей $\partial\boldsymbol{\Psi}_{24}$ они задают соответствующую систему «линий переключения». Например, в положительном квадранте $O\psi_2\psi_4$: $\chi>0$ в подобласти $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ этого квадранта, примыкающей к области $\boldsymbol{\Psi}_4$; $\chi<0$ в остальной ее части, примыкающей к $\boldsymbol{\Psi}_2$, а угол между лучом L_1 $\chi(\psi_2,\psi_4)=0$ и осью $O\psi_2$ равен arctg η_2/η_1 (отметим, что $L_1\parallel L_3$, $L_2\parallel L_4$). То же самое имеет место и в остальных квадрантах $O\psi_2\psi_4$; другие фрагменты $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ также разделяются аналогичным образом. Объединяя полученные части фрагментов $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ с соответствующими фрагментами области $(\boldsymbol{\Psi}_2\cup\boldsymbol{\Psi}_4)\setminus\boldsymbol{\Psi}_{24}$, где ненулевые значения управляющих параметров имеют одинаковые знаки, получим разбиение плоскости $O\psi_2\psi_4$ на пять областей, а именно: $\boldsymbol{\Psi}_{24}$; $\boldsymbol{\Psi}_2^{(+)}$; $\boldsymbol{\Psi}_2^{(-)}$; $\boldsymbol{\Psi}_4^{(+)}$; $\boldsymbol{\Psi}_4^{(-)}$. В $\boldsymbol{\Psi}_{24}$ оптимальные значения управляющих параметров нулевые и ресурс управления не используется, а в остальных случаях ресурс управления используется полностью и при этом оптимальные значения управляющих параметров определяются так: для $\boldsymbol{\Psi}_4^{(+)}$ – $\tilde{u}_1=M_0/\eta_1$ и $\tilde{u}_2=0$; для $\boldsymbol{\Psi}_4^{(-)}$ – $\tilde{u}_1=-M_0/\eta_1$ и $\tilde{u}_2=0$; для $\boldsymbol{\Psi}_2^{(+)}$ – $\tilde{u}_1=0$ и $\tilde{u}_2=M_0/\eta_2$; для $\boldsymbol{\Psi}_2^{(-)}$ – $\tilde{u}_1=0$ и $\tilde{u}_2=-M_0/\eta_2$.

Исключая из соотношений (19) параметр t, получим уравнение прямой в плоскости $O\psi_2\psi_4$: $\psi_{30}(\psi_2-\psi_{20})-\psi_{10}(\psi_4-\psi_{40})=0$; ее отрезок AB отвечает процессу управления на интервале $[0,T]$, где начальная точка A имеет координаты (ψ_{20},ψ_{40}). Отрезок AB пересекает в общем случае «линии переключения» – границы указанных выше областей и в этих точках происходит соответствующая смена режима расходования ресурса управления, который в общем случае характеризуется попеременным использованием ресурса объектами управления в (9) при решении соответствующих парциальных задач управления.

В самом общем случае в задаче (9) – (11), (14), (15) для параметров в (10), (15) выполняются условия: $m_1<M_0/\eta_1$ и/или $m_2<M_0/\eta_2$; $\eta_1 m_1+\eta_2 m_2>M_0$, то есть множество допустимых значений управляющих параметров – выпуклая область $\boldsymbol{U}^*=\boldsymbol{U}_{12}\cap\boldsymbol{U}_M$ является восьми- или шестиугольником, ориентированным осями симметрии по координатным осям в плоскости Ou_1u_2 и с центром в ее начале. Граница $\boldsymbol{U}^*$ задается как объединение ее соответствующих фрагментов: $\partial\boldsymbol{U}^*=\partial\boldsymbol{U}_1^*\cup\partial\boldsymbol{U}_2^*\cup\partial\boldsymbol{U}_M^*$; при этом $\partial\boldsymbol{U}_1^*=\varnothing$, если $m_1>M_0/\eta_1$, и $\partial\boldsymbol{U}_2^*=\varnothing$, если $m_2>M_0/\eta_2$. Для определенности пусть $\partial\boldsymbol{U}_1^*\neq\varnothing$ и $\partial\boldsymbol{U}_2^*\neq\varnothing$.

Как уже установлено в случае неэффективности ограничения (15) программа оптимального управления имеет вид (23). Если в некоторый момент времени $\tau\in[0,T]$ для программы (23) $\eta_1|\tilde{u}_1(\tau)|+\eta_2|\tilde{u}_2(\tau)|>M_0$, то есть ограничение (15) нарушается, что может иметь место только при $|\tilde{u}_1(\tau)|=m_1$ и $|\tilde{u}_2(\tau)|=m_2$, когда $(\psi_2(\tau),\psi_4(\tau))\in\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$. В связи с этим напомним, что в этом случае в системе (9) между объектами управления возникает «конкуренция» за использование ресурса управления, что приводило к соответствующему разбиению $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$, и при этом ресурс управления использовался в полном объеме, то есть в (27) $\xi=1$, но только одним из объектов управления.

Итак, возвращаясь к схеме распределения ресурса (24), для исследования функций (25) и (26) на максимум по переменным ρ и ξ необходимо рассмотреть следующие случаи для значений пар $(\psi_2,\psi_4)\in\mathbb{R}^2$, связанных с вычисление управляющих параметров.

Во-первых, при $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_{24}$ для всех $\rho\in[0,1]$ имеет место $K\le 0$, то есть в (27) должно быть $\xi=0$ и, стало быть, тогда $\tilde{u}_1=0$ и $\tilde{u}_2=0$.

Во-вторых, случаи для $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_4\setminus\boldsymbol{\Psi}_{24}$ и $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_2\setminus\boldsymbol{\Psi}_{24}$. Для первого из них $|\psi_2|>\alpha_1$ и $|\psi_4|\le\alpha_2$, то есть из условия максимума H (22) по u_1 и u_2 с учетом (10) следует: $\bar{u}_1=m_1\operatorname{sign}\psi_2$; $\bar{u}_2=0$, и, с другой стороны, $\max\limits_{\rho}K(\rho;\psi_2,\psi_4)=(|\psi_2|-\alpha_1)/\eta_1>0$ при $\rho=1$. Тогда можно определить долю ресурса, необходимую для создания управляющего воздействия $\bar{u}_1$: $\bar{\xi}=\eta_1 m_1/M_0<1$. Подставив $\bar{\xi}$ в (27), получим $\bar{H}=(|\psi_2|-\alpha_1)m_1+\psi_1x_2+\psi_3y_2$ и то же самое получим, подставив $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ в (22). Стало быть, оптимальные значения управляющих параметров следующие: $\tilde{u}_1=m_1\operatorname{sign}\psi_2$; $\tilde{u}_2=0$. Аналогичным образом и во втором случае, когда $|\psi_2|\le\alpha_1$ и $|\psi_4|>\alpha_2$, получим $\tilde{u}_1=0$ и $\tilde{u}_2=m_2\operatorname{sign}\psi_4$. Стало быть, в рассмотренных здесь случаях получены оптимальные значения управляющих параметров, отличающиеся неполным использованием располагаемого ресурса управления.

Наконец, рассмотрим случай $(\psi_2,\psi_4)\in\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$, когда $|\psi_2|>\alpha_1$ и $|\psi_4|>\alpha_2$. Здесь максимум функции (26) находится в зависимости от знака $\chi\ne 0$. Например, для $(\psi_{20},\psi_{40})\in\boldsymbol{\Psi}_4^{(+)}$) в (26) $\rho=1$, то есть $\max\limits_{\rho}K(\rho;\psi_2,\psi_4)=(|\psi_2|-\alpha_1)/\eta_1>0$. Но с учетом (24) и (15) тогда получим $\bar{u}_1=m_1\operatorname{sign}\psi_2$ и $\bar{\xi}=\eta_1 m_1/M_0<1$. Так как $|\psi_4|>\alpha_2$, то остаток располагаемого ресурса управления $M_0-\eta_1 m_1>0$ с учетом условия максимизации гамильтониана H (22) и по u_2 может быть использован и для создания управляющего воздействия $\bar{u}_2=\mu_2\operatorname{sign}\psi_4$, где $\mu_2=(M_0-\eta_1 m_1)/\eta_2$. В конечном счете, при $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_4^{(\pm)}$ оптимальные значения для управляющих параметров определяются так: $\tilde{u}_1=m_1\operatorname{sign}\psi_2$; $\tilde{u}_2=\mu_2\operatorname{sign}\psi_4$. Аналогичным образом оптимальные значения для них можно получить и в случае $(\psi_2,\psi_4)\in\boldsymbol{\Psi}_2^{(\pm)}$, а именно: $\tilde{u}_1=\mu_1\operatorname{sign}\psi_2$; $\tilde{u}_2=m_2\operatorname{sign}\psi_4$, где $\mu_1=(M_0-\eta_2 m_2)/\eta_1$.

Следовательно, в случае $(\psi_2,\psi_4)\in\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ оптимальные значения управляющих параметров отличаются полным использованием располагаемого ресурса управления, находясь в точках конкатенации фрагментов границы множества $\boldsymbol{U}^*$. Таким образом, получен общий алгоритм решения задачи оптимального управления (9) – (11), (14), (15), анализ результатов решения которой показывает, что получаемые для нее распределения материального ресурса управления между сепаратными объектами управления в системе (9) характеризуются попеременным их доминированием в использовании такого ресурса управления в процессе решения парциальных задач управления в (9) – (11).

6. Заключение

Следуя [1] и [2] приведена общая постановка задачи оптимального распределения единого ресурса управления между независимыми объектами управления, в качестве которого рассматриваются энергетический и материальный ресурсы, которые ограничиваются скоростями их расходования, соответственно, энергетический ресурс – мгновенной мощностью, а материальный – максимальной скоростью расхода «топлива». Решены модельные задачи оптимального распределения ресурса в системе независимых двойных интеграторов, для которых одновременно решаются двухточечные граничные задачи (с произвольными граничными условиями) или парциальные задачи управления. По результатам анализа решений этих задач были выявлены основные особенности оптимального распределения ресурсов различного вида между сепаратными объектами. Во-первых, в задаче оптимального распределения ограниченного энергетического ресурса в каждый момент времени он всегда распределяется в определенной пропорции между объектами управления. Во-вторых, в задаче оптимального распределения материального ресурса – «топлива», скорость его расхода при решении парциальных задач управления характеризуется попеременным доминированием в использовании этого ресурса сепаратными объектами управления. Таким образом, показано, что на характер оптимального распределения физического ресурса управления существенно влияет как вид ресурса, так и эффективность в задачах управления ограничений на управляющие воздействия объектов управления.

В заключение также отметим, что рассмотренные здесь задачи можно отнести не только к соответствующим задачам физической теории управления – оптимизации ресурсных систем, но и к классу т.н. смешанных задач управления по А.М. Летову [2], поскольку постановка общей задачи оптимального распределения ресурса между сепаратными объектами управления и решение модельных задач для системы из простейших независимых объектов управления предполагают скоординированное разделение ресурса между сепаратными объектами в процессе решения ими парциальных задач управления.

7. Благодарности

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ (проект № 16-41-630524) и субсидий в рамках исполнения ГЗН (проект № 8.6675.2017/БЧ).

8. Литература

[1] Красовский, А.А. Проблемы физической теории управления / А.А. Красовский // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 11. – С. 8-28.
[2] Летов, А.М. Математическая теория процессов управления / А.М. Летов. – М.: Наука, 1981. – 256 с.
[3] Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
[4] Моисеев, Н.Н. Элементы теории оптимальных систем / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
[5] Бертсекас, Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа / Д. Бертсекас. – М.: Радио и связь, 1987. – 400 с.

To the problem of optimum allocation of a physical control resource for a separate dynamic systems

Yu.N. Gorelov[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. We consider the problem of optimum allocation of limited by consumption rate resource between separate control objects. Both energy resource in form of current power level and material resource in form of fuel consumption rate are considered as the source is required to create control action. It is given examples of solving this problem at fixed interval for the system of control objects as double integrators with local targets control determined by general boundary conditions. The results of solving these problems identified the main features of optimal creating control action resource allocation in dependence of type of resource. It is noted, that the considered control problem can also be attributed to the class of the A. M. Letov mixed problems.

Keywords: physical resource management, optimization of resource allocation, a separate dynamic system.