Квантовый контроль систем с некомпактными динамическими группами

А.В. Горохов[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Исследовано управление нелинейными процессами в квантовой оптике, гамильтонианы которых обладают некомпактной группой динамической симметрии. Использована техника когерентных состояний динамической группы. Детально рассмотрен процесс спонтанного параметрического рассеяния, важный для современной квантовой информатики, в том числе и с учетом потерь вследствие взаимодействия с большим диссипативным окружением.

1. Введение

Принципы симметрии являются одной из ключевых идей современной физики и их математический аппарат (теория групп и их представления) - находит широкое применение при установлении самых общих свойств и математическом моделировании физических систем. Особенно важную роль теоретико-групповые методы выполняют в квантовой физике. На начальном этапе развития квантовой механики приложения теории групп исчерпывались, в основном, задачей классификации состояний квантовой системы по неприводимым представлениям групп симметрии. Новый интерес к теоретико-групповым методам был стимулирован в начале 60-х годов XX века работами Гелл-Манна и Неемана, в которых представления группы $SU(3)$ были с успехом использованы для классификации адронов. В результате дальнейших обобщений возникло новое направление - метод динамических групп (см., например, [1-4]), которые для интересных далее случаев являются некоторыми конечно параметрическими группами Ли. С использованием идей этого метода на язык теории представлений динамической группы гамильтониана можно перевести как нахождение уровней энергии и векторов состояния, так и расчет вероятностей и сечений переходов [4,5].

2. Описание метода

Квантовая оптика является одной из естественных областей применения метода динамических групп [3-5]. Одной из основных задач в квантовой оптике является описание взаимодействия внешнего поля с веществом. Если поле излучения является монохроматическим, то существенными являются переходы между двумя уровнями, которые попадают в резонанс с полем излучения, при условии, что все остальные переходы далеки от резонанса. В этом случае квантовую систему можно рассматривать как двухуровневую. Группой динамической симметрии такой системы (модель Дикке) является группа $SU(2)$. В многоуровневом случае динамической группой является группа $SU(N)$, где N − число уровней.

Многие задачи квантовой оптики описываются с помощью модели связанных осцилляторов. Для N-модового осциллятора группой динамической симметрии является полупрямое произведение $W_N \wedge Sp(2N,\mathbb{R})$ симплектической группы $Sp(2N,\mathbb{R})$ и группы Гейзенберга - Вейля W_N. При $N = 2$ в данном подходе можно исследовать известные параметрические процессы, классифицируемые по подгруппам некомпактной группы $W_2 \wedge Sp(4,\mathbb{R})$ [4].

В начале 70-х годов возник, тесно связанный с теорией групп, метод обобщенных когерентных состояний (КС) [6]. Рассмотрим квантовую систему, гамильтониан которой удалось представить в виде функции генераторов унитарного представления $\hat{T}(g)$ динамической группы G, действующего в гильбертовом пространстве состояний системы

$$\hat{H} = f\left(\hat{A}_1,\dots,\hat{A}_r\right), \quad (1)$$

а самосопряженные операторы $\hat{A}_1,\dots,\hat{A}_r$ образуют базис представления алгебры Ли группы G и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left[\hat{A}_\alpha, \hat{A}_\beta\right] = iC^{\gamma}_{\alpha\beta}\cdot\hat{A}_\gamma,\ i=\sqrt{-1}, \quad (2)$$

где $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ – структурные постоянные группы G. В случае линейной функции f можно, в принципе, точно найти оператор эволюции, однако для большинства реальных задач f имеет вид некоторой полиномиальной зависимости генераторов $\hat{A}_1,\dots,\hat{A}_r$.

Когерентное состояние $\left|CS\right\rangle$ строится по формуле:

$$\left|CS\right\rangle = \left|Z\right\rangle = \hat{T}(g_Z)\left|\Psi_0\right\rangle, \quad (3)$$

здесь g_Z элемент группы G, соответствующий точке $g_Z G_0$ однородного пространства G/G_0, а подгруппа $G_0 \subset G$ с точностью до фазового множителя оставляет инвариантным вектор $\left|\Psi_0\right\rangle$.

Оказалось, что КС, если их удачно построить, являются квантовыми состояниями наиболее близкими к классическим (минимизация соотношений неопределенности для генераторов динамической группы). Эволюция параметров КС приводит к классической динамике для классического аналога квантовой задачи. Если же гамильтониан линеен по генераторам динамической алгебры, то временная эволюция квантовой задачи является чисто классической — КС представляет собой нерасплывающийся волновой пакет, движущийся вдоль классической траектории в соответствующем обобщенном фазовом пространстве [4]. И для этой ситуации, и в случае полиномиальной функции f можно построить “квазиклассические” уравнения для параметров КС

$$\dot{z}^\alpha = \left\{z^\alpha, \mathrm{H}\right\},\ \dot{\bar{z}}^\alpha = \left\{\bar{z}^\alpha, \mathrm{H}\right\}, \quad (4)$$

здесь $\mathrm{H} = \left\langle Z\right|\hat{H}\left|Z\right\rangle$ матричный элемент гамильтониана между КС, $Z = \left(z^1,\dots,z^n\right)$ - комплексные параметры когерентного состояния $\left|Z\right\rangle$, а $\left\{a,b\right\}$ - скобка Пуассона в пространстве G/G_0 (см., например, [5]). Действуя таким методом, приходим к приближенному решению временно́го уравнения Шредингера

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = e^{i\chi(t)}\left|Z(t)\right\rangle, \quad (5)$$

где $Z(t) = \left(z^1(t),\dots,z^n(t)\right)$ – траектория КС в пространстве G/G_0, получаемая из решения уравнений (4), а $\chi(t)$ – некоторая фаза. Решение вида (5) имеет смысл, если в начальный момент времени можно создать начальное состояние в виде КС $\left|Z(0)\right\rangle$, однако оно справедливо для всего временного интервала только для гамильтонианов с линейно реализованной динамической группой *G,* в общем же случае такое решение будет “расплываться” и работать лишь для времен, близких к начальному. Поэтому необходимо учитывать квантовые поправки, отыскивая решение уравнения Шредингера в виде суперпозиции КС:

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = \int_{G/G_0} F\left(Z, Z_0 \,|\, t\right)\left|Z\right\rangle \mathrm{d}\,\mu\left(Z, \bar{Z}\right). \quad (6)$$

Здесь $\lim_{t\to 0} F\left(Z, Z_0 \,|\, t\right) = \delta\left(Z - Z_0\right)$, $\left|\Psi(0)\right\rangle = \left|Z_0\right\rangle$, а $\delta\left(Z - Z_0\right) -$ δ-функция (ядро единичного оператора в гильбертовом пространстве функций на G/G_0). Проблема нахождения ядра $F\left(Z, Z_0 \,|\, t\right)$ решается его разложением по полной и ортонормированной системе сферических функций на многообразии Кэлера G/G_0 [4].

В настоящее время квантовая оптика и квантовая информатика продолжают активно развиваться и во многом исследования уже перешли на инженерный уровень по созданию устройств, работающих на основе квантовых принципов. Разработаны новые уникальные измерительные средства, позволяющие оперировать с одним или несколькими атомами и фотонами. Продолжается также исследование и многих традиционных для квантовой оптики объектов, таких как атомы в высокодобротных резонаторах и многофотонных процессов квантовой нелинейной оптики.

В связи с этим вновь стала актуальной проблема управления квантовыми процессами [7-9]. Знание группы динамической симметрии гамильтониана и построение с ее помощью теоретико-групповых когерентных состояний позволяет сформулировать проблему квантового когерентного управления динамикой переходов, отыскивая в группе *G* такую траекторию $g(t, t_0)$, которая будет приводить к генерации некоторого заданного конечного состояния с максимально возможной вероятностью. Задача квантового управления сводится тогда к известной задаче отыскания оптимальной траектории на однородном пространстве группы Ли *G* [10]. Важно отметить, что до сих пор эта задача хорошо исследована лишь для случая компактных управляющих динамических групп [7-9,11,12].

В данном докладе при расчете временных зависимостей сжатия и многофотонных корреляций в процессе спонтанного параметрического рассеяния [13] и анализе квантовой кинетики соответствующих параметрических осцилляторов в тепловой бане использован метод некомпактных динамических групп. При исследовании сжатия и многофотонных корреляций параметрических фотонов расчеты выполнены в случае лазерной накачки, представленной модой Лагерра – Гаусса в коллинеарном приближении. Из-за закона сохранения проекций орбитального углового момента (ОУМ) проекции ОУМ генерируемых фотонов равны m и $(l-m)$, где $m = 0,1,2,\ldots,$ $(l-m)+m = l;$ $l -$ проекция ОУМ лазерных фотонов. Динамическая группа процесса выбрана в виде $G = \prod_m \otimes SU(1,1)^{(m)}$, где группа $SU(1,1)^{(m)}$ описывает процесс распада лазерного фотона на два параметрических фотона с проекциями углового момента m и $(l-m)$. Для заданного управляющего поля накачки гамильтониан задачи линейно выражается через генераторы группы $\prod_m \otimes SU(1,1)^{(m)}$.

При исследовании квантовой кинетики параметрических осцилляторов с учетом потерь метод динамических групп распространен на случай открытой системы, квантовое кинетическое уравнение для которой сведено к уравнению типа Фоккера – Планка (УФП) для символа $P(z_1, \mathrm{z}_2; t)$ матрицы плотности $\hat{\rho}(t)$ в подсистеме из двух параметрических мод:

$$\hat{\rho}(t) = \int P(z_1, \mathrm{z}_2; t)\left|z_1, \mathrm{z}_2\right\rangle\left\langle z_1, \mathrm{z}_2\right| d^2 z_1 d^2 z_2 \big/ \pi^2, \quad (7)$$

здесь $\left|z_1, z_2\right\rangle$ - КС двухмодового осциллятора, $(z_1, z_2) \equiv (z_{l-m}, z_{+m})$. Методом распутывания операторных экспонент на группе динамической симметрии УФП найдены его решения и рассчитаны особенности релаксации в зависимости от параметров накачки и температуры термостата. Определены возможные условия подавления декогеренции при генерации параметрических фотонов.

3. Литература

[1] Wulfman, C.E. Dynamical Symmetry. – Singapore: World Scientific Publishing, 2010. – 437 p.
[2] Hayashi, M. Group representations for Quantum Theory. – New York: Springer, 2017. – 357 p.
[3] Klimov, A.B. A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics. Models of Atom - Field Interactions/ A.B. Klimov, S.M. Chumakov // Weinheim: WILEY-VCH, 2009. – 334 p.
[4] Горохов, А.В. Принципы симметрии и квантовая динамика. – Самара: Изд. «Самарский университет», 2015. – 220 с.
[5] Gorokhov, A.V. Lie Algebras in Quantum Optics and Molecular Spectroscopy // Bull. of the Russian Acad. of Sci. Physics. – 2011. – Vol. 75. – P. 150-156. DOI: 10.3103/ S1062873811020110.
[6] Переломов, А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
[7] Бутковский, А.Г. Управление квантовыми процессами / А.Г. Бутковский, Ю.И. Самойленко. – Москва: Наука, 1984. – 256 с.
[8] Shadbolt, P. Complexity and Control in Quantum Photonics. – New York: Springer, 2016. – 222 p.
[9] Borzì, A. Formulation and Numerical Solution of Quantum Control Problems / A. Borzì, G. Ciaramella, M. Sprengel. – Philadelphia: SIAM, 2017. – 390 p.
[10] Hermann, R. Geodesics and Classical Mechanics on Lie Groups // J. Math. Phys. – 1972. – Vol. 13. – P. 460-464. DOI: 10.1063/1.1666000.
[11] Remsing, C.C. Optimal Control on the Rotation Group *SO*(3) // Carpathian J. Math. – 2012. – Vol. 28. – P. 321-328.
[12] Barfuss, A. Phase-controlled coherent dynamics of a single spin under closed-contour interaction / A. Barfuss, J. Kölbl, L. Thiel, J. Teissier, M. Kasperczyk, P. Maletinsky // Nature Physics. – 2018. – Vol. 14. – P. 1087-1091. DOI: 10.1038/s41567-018-0231-8.
[13] Самарцев, В.В. Коррелированные фотоны и их применение. – М.: Физматлит, 2013. – 168 с.

Quantum Control for the Systems with Noncompact Dynamical Groups

A.V. Gorokhov[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. Nonlinear processes in quantum optics controlled by Hamiltonians with a non-compact dynamical group are investigated. The technique of coherent states of the dynamical group is used. The process of spontaneous parametric down-conversion, important for the modern quantum informatics, is considered in detail takin into account the interaction with a large dissipative environment.