Линейные и нелинейные варианты задачи восстановления сигнала без фаз

С.Я. Новиков[1], Д.А. Рогач[1], М.Е. Федина[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Рассмотрено два подхода к решению задачи восстановления сигнала без фаз. Первый основан на инъективности нелинейного отображения измерений амплитуд, второй - на линеаризации этого отображения и исследовании свойств соответствующей матрицы.

1. Введение

Пусть V — пространство с комплексным скалярным произведением и ортонормированным базисом (ОНБ) $\{u_i\}_{i=1}^{M}$. Каждый «сигнал» $x \in V$ единственным образом представляется суммой

$$x = \sum_{i=1}^{M} \langle x, u_i \rangle u_i.$$

Комплексные коэффициенты представления $\langle x, u_i \rangle$ дают возможность полного восстановления сигнала и часто понимаются как «измерения» сигнала. Однако, реальные измерения дают возможность определить вещественные числа $|\langle x, u_i \rangle|$ вместо комплексных $\langle x, u_i \rangle$.

Последние годы значительное количество работ [1, 2, 3, 5] посвящено решению такой задачи: Существуют ли системы $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ такие, для которых возможно восстановить x по набору чисел $|\langle x, \varphi_i \rangle|$?

В классе ОНБ данная задача неразрешима.

В англоязычной литературе сформулированная выше задача и связанные с ней вопросы составили раздел прикладных исследований под названием «PHASE RETRIEVAL (возвращение, воспроизведение фазы)».

Пионерской работой в этом направлении оказалась работа [1], в которой была доказана теоретическая возможность точного восстановления сигнала (с точностью до унимодулярного множителя), если в качестве системы представления использовать избыточные системы.

Основная проблема, поставленная в [3], до сих пор далека от окончательного решения:

Необходимо найти необходимые и достаточные условия на систему векторов представления $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ (т.н. «измерительных векторов»), которые обеспечивают инъективность и устойчивость нелинейного отображения «измерения амплитуды» сигнала x

$$(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n \rangle|^2.$$

Естественной областью определения этого отображения является пространство $V = \mathbb{R}^M$ или $\mathbb{C}^M$. Заметим, однако, что $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$, если $y = cx$ для некоторого скаляра c с единичным модулем. Поэтому, строго говоря, отображение $\mathcal{A} : V \to \mathbb{R}^N$ не может быть инъективным. Поэтому будем считать областью определения $\mathcal{A}$ либо $\mathbb{R}^M/\{\pm 1\}$, либо $\mathbb{C}^M/\mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ — окружность единичного радиуса на комплексной плоскости. При таком соглашении вопросы об инъективности и устойчивости отображения $\mathcal{A}$ являются содержательными.

2. Задача восстановления сигнала

Восстановить сигнал x невозможно, если отображение $\mathcal{A}$ не является инъективным.

Следующее определение конкретизирует определение инъективности применительно к поставленной задаче.

Определение 2.1. *Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ (или $\mathbb{C}^M$) назовем* **системой, восстанавливающей без фаз (ВБФ-системой)***, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^M$ (или $\mathbb{C}^M$), таких, что $|\langle x, \varphi_i\rangle| = |\langle y, \varphi_i\rangle|$ для всех $i = 1, \dots, N$, имеем $x = cy$, где $c = \pm 1$ для $\mathbb{R}^M$ (и $c \in \mathbf{T}$ для $\mathbb{C}^M$, где $\mathbf{T}$ — единичная окружность на комплексной плоскости).*

Важным для анализа инъективности оказалось следующее свойство, которое мы назвали свойством *альтернативной полноты*, заменяя тем самым английское сочетание «complement property».

Определение 2.2. *Набор векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ ($\mathbb{C}^M$) назовем альтернативно полным (АП) если для любого $S \subseteq \{1, \dots, N\}$ либо $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, либо $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ полно в $\mathbb{R}^M$ ($\mathbb{C}^M$).*

Для пространства $\mathbb{R}^M$ свойство альтернативной полноты эквивалентно инъективности отображения $\mathcal{A}$.

Таким образом оказалось, что система, которая допускает восстановление фазы, с необходимостью оказывается фреймом пространства $\mathbb{R}^M$. Из дальнейшего станет ясным, что аналогичная картина наблюдается и в $\mathbb{C}^M$.

Напомним, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ называется фреймом (каркасом) пространства $\mathbb{R}^M$ ($\mathbb{C}^M$) если существуют константы $0 < A < B$ такие, что $\forall x \in \mathbb{R}^M$ ($\forall x \in \mathbb{C}^M$)

$$A\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^N |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \le B\|x\|^2.$$

В конечномерном пространстве понятие фрейма эквивалентно понятию полноты системы, т. е. равенству $\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{R}^M$ ($\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{C}^M$).

В пространстве $\mathbb{C}^M$ не найдено практически применимой характеризации инъективности.

Для решения этой задачи предлагается вариант линеаризации отображения $\mathcal{A}$.

Определим M^2-мерное пространство $\mathbb{H}^{M\times M}$ комплексных самосопряженных $M \times M$ матриц. Это пространство над полем вещественных чисел. Для заданного набора $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ определим *оператор матричного анализа* $\mathbf{A} : \mathbb{H}^{M\times M} \to \mathbb{R}^N$ равенствами $(\mathbf{A}H)(n) = \langle H, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS}$, здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_{HS}$ обозначает скалярное произведение Гильберта-Шмидта, индуцирующее матричную норму Фробениуса [8]. Подробнее,

$$\langle H, G\rangle_{HS} = \sum_{m,n=1}^M h_{mn}\overline{g_{mn}} = \operatorname{Tr}[G^*H].$$

Заметим, что $\mathbf{A}$ — линейный оператор, и

$$(\mathbf{A}xx^*)(n) = \langle xx^*, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS} = \operatorname{Tr}[\varphi_n\varphi_n^*xx^*] =$$

$$= \mathrm{Tr}[\varphi_n^* x x^* \varphi_n] = \varphi_n^* x x^* \varphi_n = |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 = (\mathcal{A}(x))(n).$$

Полученное равенство показывает, что $x \bmod \mathbb{T}$ может быть расширен до xx^*, при таком расширении процесс измерения амплитуды становится линейным за счет увеличения размерности пространства, в котором проводятся измерения.

Посмотрим, как отражается инъективность при таком расширении.

Теорема 2.1. *Отображение $\mathcal{A}$ не является инъективным тогда и только тогда, когда в ядре оператора* $\mathbf{A}$ *существует матрица ранга* 1 *или* 2.

3. Литература

[1] Balan, R. On signal reconstruction without noizy phase / R. Balan, P. Casazza, D. Edidin // Applied and Computational Haimonic Analysis (ACHA). – 2006. – Vol. 20(3). – P. 345-356.
[2] Bodmann, B.G. Stable phase retrieval with low-redundancy frames / B.G. Bodmann, N. Hammen // Available online: aiXiv: 1302.5487.
[3] Bandeiia, A. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval / A. Bandeiia, J. Cahill, D. Mixon, A. Nelson // Applied and Computational Haimonic Analysis (ACHA). – 2014. – Vol. 37(1). – P. 106-125.
[4] Alexeev, B. Full Spaik Fiames / B. Alexeev, J. Cahill, D.G. Mixon // Available online: aiXiv: 1110.3548.
[5] Fickus, M. Phase retrieval from very few measurements / M. Fickus, D.G. Mixon, A.A. Nelson, Ya. Wang // Linear Algebra and Its Applications. – 2014. – Vol. 449. – P. 475-499.
[6] Новиков, И.Я. Теория всплесков / И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина. – Москва, Физматлит, 2005.
[7] Новиков, С.Я. Фреймы конечномерных пространств / С.Я. Новиков, М.А. Лихобабенко. – Самара: Самарский госуниверситет, 2013.
[8] Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – Москва: Мир, 1989.
[9] Vogt, A. Position and momentum distiibutions do not deteimine the quantum mechanical state // Mathematical Foundations of Quantum Theoiy. – New York: Academic Piess, 1978. – P. 365-372.

Благодарности
Первый автор поддержан грантом РФФИ № 17-01-00138.

Linear and nonlinear versions of Phase Retrieval

S.Ya. Novikov[1], D.A. Rogach[1], M.E. Fedina[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. Two approaches to solving the problem of signal recovery without phases are considered. The first is based on the injectivity of the nonlinear map of amplitude measurements, the second is founded on the linearization of this map and the study of the properties of the corresponding matrix.