

# Математические модели поддержания низкой орбиты космического аппарата с помощью электрореактивных двигателей с учетом ограничений по электропитанию

Г.П. Аншаков<sup>1</sup>, В.В. Салмин<sup>1</sup>, В.В. Волоцув<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** В статье приводится описание математических моделей, используемых при выборе проектных характеристик электрореактивной двигательной установки для поддержания низкой орбиты космического аппарата наблюдения Земли. Математические модели выбора проектных характеристик разрабатываются с учетом ограничений по располагаемой электрической мощности на борту спутника.

## 1. Введение

Для решения большого количества задач наблюдения из Космоса требуется получения информации высокого разрешения. При этом весьма удобным, с точки зрения получения изображений такого разрешения, является вариант расположения КА наблюдения на низких околокруговых орбитах. Тормозящее воздействие атмосферы оказывает существенное влияние на эволюцию орбит КА, что приводит к постепенному снижению орбиты и, в конечном счете, входу аппарата в плотные слои атмосферы.

Чтобы поддерживать параметры рабочей орбиты в допустимом диапазоне, периодически следует проводить коррекцию траектории движения. Необходимым условием возможности коррекции является способность придать КА тягу, превосходящую по величине равнодействующую возмущающих сил.

Снизить суммарные затраты топлива можно, если использовать для коррекции высоты орбиты ЭРДУ. Такой вариант использования возможен вследствие небольшой массы и габаритов как ЭРДУ, так и рабочего тела для её работы. Преимущества ЭРД при решении перечисленных задач заключаются в возможности высокоточного формирования заданных рабочих орбит спутников Земли и их поддержания в течение практически неограниченного времени.

Очень высокая скорость истечения, обеспечиваемая электрореактивным двигателем (ЭРД), позволяет снизить запас топлива для поддержания высоты орбиты и увеличить срок службы КА на низких орбитах. Срок существования зависит от количества коррекций, их средней продолжительности, запаса топлива, которые определяются типом ракетного двигателя. Повышение удельного импульса ЭРД при той же массе топлива позволяет увеличить срок службы КА за счет существенно более низкого расхода топлива. Однако, чем выше удельный импульс, тем больше мощность двигателя и тем более мощная требуется энергоустановка. Следствием этого является возрастание площади солнечных батарей. В условиях

сопротивления атмосферы увеличение площади солнечных батарей приводит к необходимости более частых и продолжительных коррекций.

Указанные противоречия требуют проведения анализа возможности использования ЭРД для поддержания более низких орбит в течение длительного срока службы орбитального комплекса.

Задача оптимального проектирования технической системы, в частности, космической системы, использующей ЭРДУ, трактуется как некоторая оптимизационная проблема и сводится к отысканию значений конструктивных параметров системы, которые доставляют экстремум некоторому функционалу качества (критерию эффективности). Язык оптимизации здесь оказывается естественным и удобным, поскольку обладает достаточно большой степенью общности, а методы оптимизации достаточно развиты, но вовсе не единственно возможны.

## 2. Математические модели для анализа процессов поддержания низкой орбиты космического аппарата с помощью электрореактивных двигателей

2.1. Проектная модель КА. Общая задача оптимизации (основная). Главный критерий. Критерии, переводимые в ограничения.

Проектный облик КА характеризуется набором функциональных модулей, образующих конструктивно-компоновочную схему. В рамках выбранной схемы задается вектор проектных параметров  $p$ , к которым могут относиться и предельные значения управляющих функций.

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_l)^T \in P \tag{1}$$

Динамика КА как объекта управления описывается обычными дифференциальными уравнениями общего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = f(t, x, u, p, v) \\ x(t_0) &\in X_0(z), x(t_k) \in X_k(z) \\ u &= u(t, x) \in U(p), (x, u) = y \in Y(p) \subset D \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $x$  – вектор состояния (фазовых координат) системы,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, x \in X$ ;  $u$  – вектор управляющих функций,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T, u = u(t, x)$  из допустимого множества  $U(p)$ , символом  $Z$  обозначен конкретный динамический маневр (космический перелет) из некоторого множества  $Z$ . Различным объектам соответствуют отличающиеся хотя бы в одной компоненте векторы  $p$ ; однако, для одного и того же объекта могут быть реализованы различные управления  $u(t, x)$  в рамках заданных ограничений.

Поэтому общей задачей совместной оптимизации будем называть задачу отыскания проектных параметров  $\bar{p} \in P$  и совокупности переменных  $\bar{u}(t, x, z), \bar{x} = (t, z)$  принадлежащих множеству допустимых  $D$  и обеспечивающих реализацию диапазона динамических маневров  $Z$  при минимальном (максимальном) значении заданного критерия эффективности.

Эффективность выполнения единичного маневра  $z$  будем характеризовать некоторым критерием оптимальности  $\mu$ , зависящим от траектории  $x(t)$ , управления  $u(t, x)$ , параметров объекта  $p$  и маневра  $z$ . Для определенности будем считать, что задачей оптимального синтеза является обеспечение максимума  $\mu$ :

$$\bar{\mu} = \max_{\substack{u(t,x) \in U(p) \\ p \in P}} \mu(z, p, x(t), u(t, x)) \tag{3}$$

Очевидно, в этом случае каждому маневру  $z$  из диапазона  $Z$  соответствует своё оптимальное проектное решение, характеризующееся вектором параметров  $\bar{p}(z)$  и управлений  $\bar{u}(t, x, z)$ .

Сложность решения общей проблемы отыскания оптимальных траекторий и параметров связана с тем, что траектории существенно зависят от проектных параметров, и наоборот параметры КА во многом определяются выбранными траекториями и режимами управления. В связи с этим возникает проблема взаимосвязи указанных задач и получения условий их корректного разделения.

Введём функционал  $I$ , зависящий как от параметров маневра  $Z$ , КА  $p$ , так и от траектории  $x(t)$ , управления  $u(t, x)$  и условий реализации маневра, в том числе и неопределённых факторов. Задачу отыскания экстремума функционала  $I$  при заданных параметрах маневра  $z$  и параметрах КА назовём динамической задачей оптимизации.

В задачах динамики и управления движением функционал  $I$  обычно задаётся в виде интегро-терминального критерия, где интегральный член характеризует затраты некоторого ресурса на реализацию динамического маневра, а терминальный член  $F$  – вклад суммарной невязки граничных условий.

Задачу о максимуме критерия оптимальности  $\mu(z, p, x, u)$  назовём разделяющейся на динамическую (отыскание оптимальных траекторий и законов управления) и параметрическую (отыскание оптимальных параметров), если в критерии  $\mu$  удастся выделить критерий низшего уровня – функционал  $I$ , зависящий только от траекторий и управления, но независящий от проектных параметров, минимум которого для каждого фиксированного  $z \in Z$  маневра достигается на паре  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in D$  и обеспечивает локальный максимум критерия  $\mu$ , при любом выборе вектора параметров  $p \in P$ .

$$\mu = \mu(z, p, I(z, x, u)) \tag{4}$$

Пусть в соответствии со сказанным выше:

$$\min_D I[z, x(t), u(t, x)] = S(z) \forall p \in P, \tag{5}$$

$$\text{тогда } \mu(z, p, \bar{x}, \bar{u}) = \mu(z, p, S(z)). \tag{6}$$

Очевидно, если  $\frac{\partial \mu}{\partial S} < 0$ , то решение задачи оптимизации реализуется в форме двух, выполняемых независимо друг от друга операций:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = \arg \min_{(x, u) \in D} I[z, x, u]; I(z, \bar{x}, \bar{u}) = S(z), \tag{7}$$

$$\bar{p} = \arg \max_{p \in P} \mu(z, p, S(z)). \tag{8}$$

Строгое разделение задач оптимизации справедливо лишь для идеально регулируемого двигателя малой тяги, когда его динамика описывается простейшей моделью точки переменной массы с идеальным и «бесплатным управлением». В общем случае динамическая характеристика  $S$  не обладает инвариантностью по отношению к параметрам КА, поэтому разделение задач оптимизации часто носит условный характер.

Задачу о максимуме критерия  $\mu(z, p, x, u)$  будем называть условно разделяющейся на динамическую и параметрическую части, если минимум функционала  $I$ , зависящего от траектории, управления и параметров, для каждого фиксированного маневра  $z \in Z$  и фиксированного вектора параметров  $p \in P$  достигается на паре  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in D$  и обеспечивает локальный максимум критерия  $\mu$ . Отыскание глобального максимума  $\mu$  реализуется в форме двух, выполняемых последовательно, операций:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = \arg \min_{(x, u) \in D} I[z, p, x, u]; I(z, p, \bar{x}, \bar{u}) = S(z, p) \tag{9}$$

$$\bar{p} = \arg \max_{p \in P} \mu(z, p, S(z, p)) \tag{10}$$

Решение этой задачи связано с определёнными трудностями, обусловленными необходимостью иметь зависимость  $S(z, p)$ , определённую на множестве  $P$  во всём диапазоне маневров  $Z$ .

### 2.2. Совместная оптимизация проектных и баллистических параметров

Поскольку проектные параметры КА влияют на динамическую характеристику маневра, и наоборот, баллистическая схема и траектории перелета существенным образом влияют на выбор проектных параметров, процесс оптимизации параметров КА и семейства оптимальных траекторий необходимо вести совместно [\*]. Всякое изменение проектных параметров приводит к необходимости повторного расчета семейства оптимальных траекторий и режимов управления, а также баллистических параметров. Процедура совместной оптимизации траекторий и параметров сводится к следующему:

Формируется общая задача совместной оптимизации космического аппарата, предназначенного для множества динамических маневров  $Z$ . Вводится проектная модель КА, а также модель распределения масс по отдельным компонентам КА.

Из общей задачи оптимизации выделяется её динамическая часть. Динамическая задача решается последовательно, с применением моделей, обладающих различной степенью полноты, детализации и точности, для выделенных подобластей фазового пространства.

Решается задача совместной оптимизации траекторий, баллистических и проектных параметров. В результате выбираются в первом приближении основные параметры, характеризующие проектный облик КА, а также энергетика маневра, траектории и режимы управления.

Исследуется влияние неопределенных факторов, как на результаты решения динамической задачи, так и на значения проектных параметров. В случае необходимости определяются параметры, обеспечивающие минимум максимального проигрыша в глобальном критерии оптимальности для всего диапазона маневров.

### 2.3. Математическая модель ограничений по располагаемой электрической мощности на борту космического аппарата

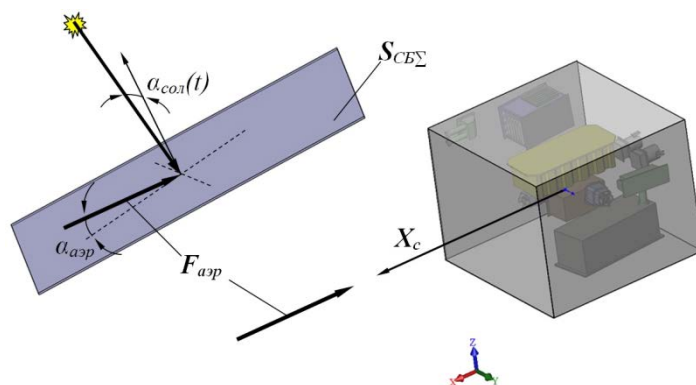
На этапе формирования бортового состава НКП определяются характеристики основных источников электропитания системы электроснабжения (солнечных батарей, аккумуляторных батарей) таким образом, чтобы обеспечивать потребности всех бортовых энергопотребителей. Первичным источником электропитания на НКП являются солнечные батареи, которые также могут являться навесными элементами и увеличение их площади может привести к возрастанию аэродинамической нагрузки. С другой стороны желательно выбирать положение панелей солнечных батарей с оптимальной ориентацией на Солнце по критерию производимой мощности.

Выбор общей площади солнечных батарей, исходя из ограничения:

$$N_{уд.сб} \cdot S_{СБ\Sigma} \cdot \cos \alpha_{сол}(t) \cdot t_{свет} \geq C_{АБ} \cdot I_{зар} \cdot R_{борт} + \sum_{j=1}^k N_j(t) \cdot \Delta t_j, \tag{11}$$

где  $N_{уд.сб}$  - удельная мощность солнечных батарей;  $S_{СБ\Sigma}$  - общая площадь солнечных батарей;  $\cos \alpha_{сол}(t)$  - циклограмма изменения угла между нормалью к панели солнечной батареи и направлением на Солнце;  $C_{АБ}$  - ёмкость аккумуляторной батареи;  $I_{зар}$  - сила тока заряда аккумуляторной батареи;  $N_j(t)$  - циклограмма работы j-го прибора на световом участке;  $\Delta t_j$  - время работы j-го прибора на световом участке.

Проводится оценка возможных вариантов расположения модели панели солнечной батареи с площадью  $S_{СБ\Sigma}$  и угла ориентации относительно вектора силы аэродинамического сопротивления (см. Рис. 1).



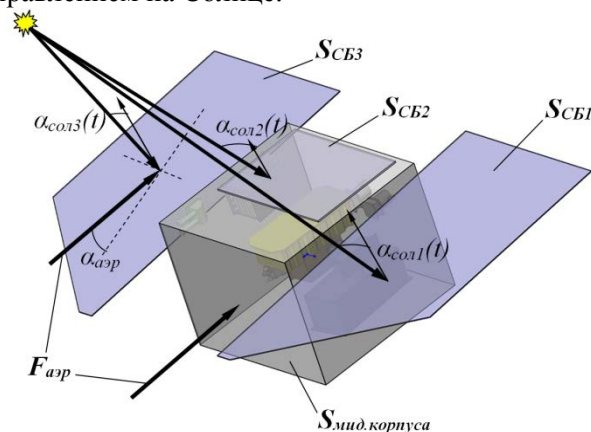
**Рисунок 1.** Способ выбора характеристик солнечных батарей низкоорбитального КА с учетом ограничений по энергетике и геометрии.

На рисунке 1 следующие обозначения  $S_{CB\Sigma}$  - общая площадь солнечных батарей,  $\cos \alpha_{сол}(t)$  - циклограмма изменения угла между нормалью к панели солнечной батареи и направлением на Солнце,  $\alpha_{аэр}$  - угол между вектором силы аэродинамического сопротивления и плоскостью панели солнечной батареи.

Учитывая ограничение на внешние геометрические размеры низкоорбитального космической плантформы и ограничения на проектные характеристики системы электропитания формируются исходные требования к структуре и положению панелей солнечных батарей относительно корпуса КА (см. рисунок 2.2).

$$\sum_{i=1}^k (S_{CBi} \cdot \cos \alpha_{соли}(t)) \geq S_{CB\Sigma} \cdot \cos \alpha_{сол}(t), \tag{12}$$

где  $k$  - количество панелей солнечных батарей;  $S_{CBi}$  - площадь  $i$ -й панели солнечной батареи (см. рис. 2);  $\cos \alpha_{соли}(t)$  - циклограмма изменения косинуса  $i$ -го угла между нормалью к панели солнечной батареи и направлением на Солнце.



**Рисунок 2.** Структура и положение панелей солнечных батарей с учетом ограничений на геометрию КА и параметры системы электроснабжения.

С учетом полученных геометрических и энергетических ограничений осуществляется дальнейшая разработка конструктивно-компоновочной схемы НКП.

При заданных параметрах рабочей орбиты сначала выбираются параметры аккумуляторных батарей, обеспечивающих необходимой электроэнергией всё оборудование, функционирующее на теневой стороне.

$$C_{AB} \cdot I_{разр} \cdot R_{борт} \geq \sum_{i=1}^n N_i(t) \cdot \Delta t_i, \tag{13}$$

где  $C_{AB}$  - ёмкость аккумуляторных батарей;  $R_{борт}$  - среднее сопротивление в бортовой электросети;  $I_{разр}$  - ток разряда аккумуляторной батареи;  $N_i(t)$  - циклограмма потребления электрической мощности  $i$ -го прибора на теневом участке;  $\Delta t_i$  - время работы  $i$ -го прибора на теневом участке.

**2.4. Математическая модель оптимальной структуры управления процессом поддержания низкой орбиты космического аппарата с помощью электрореактивных двигателей**

При объединении ранее описанной массово-геометрической модели, которая является зависимой от параметров орбиты и законов управления спутником, и энергетической модели, вводящей ограничения, с точки зрения достаточности мощности для работы ЭРДУ, получается математическая модель коррекции низкой, эволюционирующей под действием верхней атмосферы Земли, орбиты КА с помощью ЭРДУ. Ограничившись коррекцией только плоскостных элементов орбиты  $A$ ,  $e$ , а также фазового угла  $\Delta u$ , получим систему уравнений (14), описывающих процесс коррекции низкой орбиты массово-геометрической и энергетической модели КА с ЭРДУ.

$$\int_0^{T_{сущ}} \sigma_{КА} \cdot \rho(t) \cdot V^2(t) \cdot dt \leq \int_0^{T_{сущ}} \frac{F_T}{M_{КА}} \cdot \alpha_{ЭРДУ}(t) \cdot dt,$$

$$M_{КА} = M_{БС} + M_{ЭВ} + \frac{1}{1 - \alpha_K} \left( \gamma_D \sqrt{\frac{2 \cdot N_{ЭРДУ} \cdot M_{РТ}}{T_M}} \cdot \eta_T \cdot \eta_{ПЭ} + (1 + k_{СПХ}) \cdot M_{РТ} \right),$$

$$M_{ЭВ} = S_{СБ} \cdot M_{уд.СБ} + \frac{N_{ср.сум} \cdot час}{E_{уд.АБ}} + \delta M_{АК}, \quad \sigma_{КА} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t) dt,$$

$$N_{ср.сум} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i \cdot t_i}{T_{СУТ}} + \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_{ЭРДУ}(t_k) \cdot N_{ЭРДУ}}{T_{СУТ}}, \quad N_{ср.сум} = N_{уд.СБ}^S \cdot S_{СБ} \cdot \cos \alpha_{ср},$$

$$F_T = \frac{2 \cdot N_{ЭРДУ}}{c} \cdot \eta_T \cdot \eta_{ПЭ}, \tag{18}$$

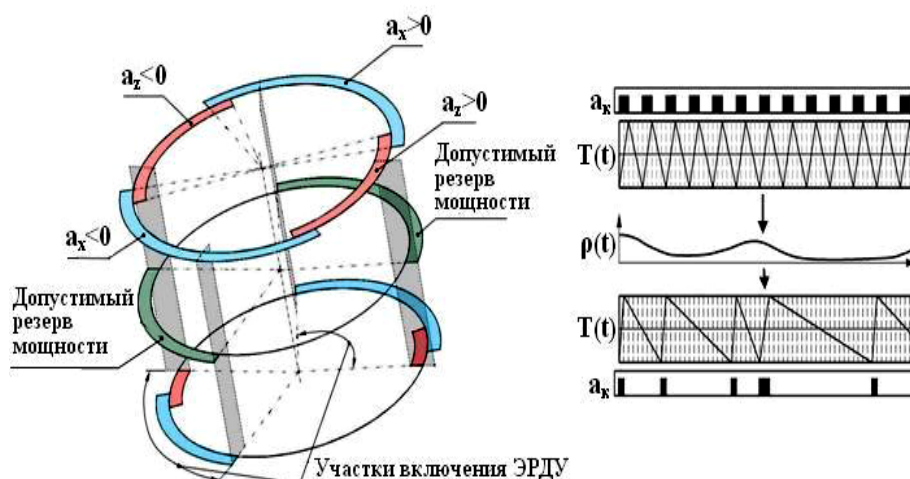
$$\frac{dA}{dt} = \frac{4a_K}{\pi} \sqrt{\frac{A^3}{\mu}} \left( \xi + \frac{\alpha - \pi}{2} \right) - 2\sigma_{КА} \rho(t) \sqrt{\mu A},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{a_K}{\pi} \sqrt{\frac{A}{\mu}} \left[ -3e \left( \xi + \frac{\alpha - \pi}{2} \right) + 4 \sin \left( \xi + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} \cos \eta - \frac{e}{2} \sin 2 \left( \xi + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \alpha \cos 2\eta \right] - 2e \sigma_{КА} \rho(t) \sqrt{\frac{\mu}{A}}$$

$$\frac{d\Delta u}{dt} = \sqrt{\mu} (A^{-1.5} - A_K^{-1.5}),$$

$$\rho(t) = K_0(t) \cdot K_1(t) \cdot K_2(t) \cdot K_3(t) \cdot a_0 \cdot \exp \left[ a_1 - a_2 \cdot ((r - 6371) - a_3)^{\frac{1}{2}} \right], \quad \rho(t) \in [p_{\min}(t), p_{\max}(t)],$$

В данной модели структура режима управления орбитой на активном витке с учетом ограничений по энергетике выглядит следующим образом: на активных витках включение ЭРДУ производится на участках оптимального управления параметрами орбиты (см. рис. 3) с учетом наличия доступного резерва мощности для работы ЭРДУ на текущий момент. В результате общую схему включений ЭРДУ на активных витках можно изобразить как на рисунке 2.12.



**Рисунок. 3.** Схема формирования циклограмм коррекции на активных витках с учетом ограничений по энергетике и неопределенностью состояния плотности атмосферы.

### 3. Заключение

В статье была рассмотрена возможность применения электроракетной двигательной установки (ЭРДУ) для коррекции низких орбит спутников дистанционного зондирования земли. Предложено решать задачу коррекции спутниковых орбит с помощью электроракетной двигательной установки на базе отечественных ЭРД, относящихся к классу стационарных плазменных двигателей (СПД). Составлены модели для выбора расположения участков включения ЭРД на витке, исходя из соображений оптимальности коррекции по расходу рабочего тела (ксенона).

### 4. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014—2020 годы» (Соглашение № 14.578.21.0229, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57817X0229).

### 5. Литература

- [1] Salmin, V.V. Optimization methods of near-Earth and interplanetary flights with low thrust / V.V. Salmin, O.L. Starinova, V.V. Volocuev // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1798. – Art. 020135. DOI: 10.1063/1.4972727.
- [2] Салмин, В.В. Поддержание заданных орбитальных параметров космических аппаратов с помощью двигателей малой тяги / В.В. Салмин, В.В. Волоцуев, С.В. Шиханов // Вестник СГАУ. – 2013. – Т. 4, №42. – С. 248-254.
- [3] Салмин, В.В. Оптимизация околоземных и межпланетных миссий космических аппаратов с электрореактивными двигательными установками / В.В. Салмин, О.Л. Старинова, В.В. Волоцуев // Труды МАИ. – 2012. – № 60.
- [4] Волоцуев, В.В. Модели для расчета проектных параметров низкоорбитального космического аппарата с энергодвигательным электроракетным модулем / В.В. Волоцуев // Известия СНЦ РАН. – 2011. – Т. 13, № 6. – С. 116-125.

## **Mathematical models for maintaining a low orbit of a spacecraft with the help of electrically reactive engines with allowance for power limitations**

**G.P. Anshakov<sup>1</sup>, V.V. Salmin<sup>1</sup>, V.V. Volotsyev<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoye shosse, 34, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** The paper describes the mathematical models used in selecting the design characteristics of an electrically reactive propulsion system to maintain a low orbit of the Earth observation spacecraft. Mathematical models of the choice of design characteristics are developed taking into account limitations on the available electrical power on board the satellite.

**Keywords:** modeling, low thrust, low orbit, an electro-reactive engine, energy consumption system.