

# Математические модели прогнозирования геометрических параметров сборочных единиц

В.А. Печенин<sup>а</sup>, М.А. Болотов<sup>а</sup>, Н.В. Рузанов<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

## Аннотация

В статье приводится описание двух разработанных математических моделей прогнозирования геометрических параметров сборочных единиц: модель совмещения поверхностей и модель комбинаторного поиска. В качестве объектов моделирования выступает пара сопрягаемых конусных колец. Первое конусное кольцо характеризуется отклонением формы сопрягаемой поверхности. Второе конусное характеризуется биением внешней и внутренней поверхностей. Подтверждение достоверности разработанных моделей осуществлялось посредством экспериментальных исследований сборки двух специально изготовленных и аттестованных конусных колец. Сравнение результатов теоретических и экспериментальных исследований показали, что разработанные модели позволяют достоверно прогнозировать геометрические параметры сборочных единиц.

*Ключевые слова:* математическая модель; отклонение формы; фильтрация; сборка; геометрический параметр; координатные измерения

## 1. Введение

Эксплуатационные характеристики машин в значимой степени определяются достигнутой геометрической точностью деталей и сборочных единиц. Геометрическая точность сборочных единиц нормируется сборочными параметрами и зависит от отклонений формы и расположения поверхностей деталей. Достижение точности сборочных параметров обеспечивается корректным назначением требований к отклонениям формы и расположения поверхностей деталей и выбором технологического метода сборки. Технологии изготовления и сборки деталей посвящено множество источников [1, 2, 3]. Совершенствование конструкций авиационной и космической техники постоянно повышает требование к показателям качества изделий. Эти требования непосредственно влияют как на технологические процессы изготовления, так и на технологические процессы сборки отдельных деталей и сборочных единиц. Существенные резервы в повышении точности и производительности сборочных работ открываются при использовании прогнозных и оптимизационных моделей непосредственно для управления процессом формирования заданной точности сборочных работ. Реализация таких резервов возможна при выполнении прогнозных расчётов на основе действительных геометрических моделей [4]. Предполагается, что непосредственно перед сборкой могут быть выполнены расчёты возможных пространственных положений деталей, достигаемых в ходе сопряжений по множеству поверхностей. При этом расчёты должны учитывать отклонения формы и расположения поверхностей деталей.

В настоящей работе приводится описание двух математических моделей, позволяющих прогнозировать относительные положения деталей, имеющих геометрические отклонения, в сборке. Приведём описание разработанных моделей.

## 2. Объект исследования

Для проведения исследований по прогнозированию сборочных параметров были изготовлены кольца из инструментальной стали X12, сопрягаемые поверхности которых являются конусными с заданными отклонениями. Отверстие малого кольца представляет собой точную цилиндрическую поверхность, внешняя поверхность большего кольца – точную коническую поверхность. Такая особенность конструкции связана с необходимостью точного определения координат центров конусов при проведении физических экспериментов, которая выполняется при помощи процедуры базирования.

Охватываемое конусное кольцо имеет отклонение формы, которое можно описать суммой гармонических функций. Охватываемое внешнее кольцо имеет точные конусные поверхности и биение внешней и внутренней поверхностей. Параметры сопрягаемых поверхностей колец представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры колец сопряжения

Параметры	Внутреннее кольцо	Внешнее кольцо
Высота, мм	36,295	39,971
Средний радиус окружности нижнего сечения, мм	27,36	27,3487
Отклонение формы, мм	0,09	Нет
Биеение сопрягаемой и базовой поверхностей, мм	Нет	0,389

Для проверки адекватности разработанных моделей прогнозирования сборочных параметров были проведены физические эксперименты по сборке конусных колец. Результирующие положения были получены при помощи измерения базовых поверхностей конусных колец в собранном состоянии на координатно-измерительной машине (КИМ) DEA Global Performance 07.10.07.

### 3. Методы

Приведем описание разработанных моделей прогнозирования состояний сборки, а так же процедуру получения данных о геометрии собираемых колец при помощи координатных измерений.

#### 3.1. Прогнозирование сборочных параметров на основе модели совмещения поверхностей

Для расчета и прогнозирования параметров сопряжения деталей с поверхностями, имеющими геометрические отклонения, была разработана модель, подробно описанная в [5] и позволяющая рассчитать сопряжение деталей без учета деформаций в процессе сборки. В модели используется итерационный алгоритм нахождения сопряжённого состояния, который предполагает итерационное перемещение одной сопрягаемой поверхности относительно другой по направлению вектора приложения усилия сборки поверхностей  $\vec{D}_1$ . В работе [5] введено понятие функции зазора  $G(\vec{V})$ , характеризующее достижение сопряжённого состояния поверхностей деталей и зависящее от вектора взаимного расположения поверхностей  $\vec{V}$ . Для расчёта функции  $G(\vec{V})$  на каждом этапе выполняется наилучшее совмещение сопрягаемых поверхностей, по этой причине данный подход назван метод совмещения поверхностей (МСП). Для выполнения процедуры наилучшего совмещения используется итерационный алгоритм ближайших точек (ICP), представленный в работе [6]. Согласно данному алгоритму, на каждой итерации методами нелинейного оптимизационного поиска рассчитываются углы поворота и компоненты вектора смещения вдоль координатных осей. Для исключения пересечений двух поверхностей используется систему неравенств, представленную в работе [7], которая накладывает ограничения на функцию зазора  $G(\vec{V})$ .

#### 3.2. Модель комбинаторного поиска

В случае сопряжения конусного кольца, имеющего одинаковое отклонение формы вдоль образующей с идеальной конусной поверхностью, возможно найти центр сборки более простым способом, нежели использовать подход ICP. Суть подхода заключается в нахождении параметров описанной вокруг одного из сечений охватывающего конусного кольца окружности минимального радиуса. Для решения поставленной задачи была разработана модель комбинаторного поиска, в основе которой заложен перебор сочетаний без повторов из  $n$  задающих точек профиля по 3 точки. Через каждые наборы по 3 точки задается окружность, рассчитывается ее центр и радиус. Параметры окружностей находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} (P_{x1} - O_x)^2 + (P_{y1} - O_y)^2 = R_{окр}^2, \\ (P_{x2} - O_x)^2 + (P_{y2} - O_y)^2 = R_{окр}^2, \\ (P_{x3} - O_x)^2 + (P_{y3} - O_y)^2 = R_{окр}^2; \end{cases} \quad (1)$$

где  $P_1, P_2, P_3$  - точки из профиля охватываемого конусного кольца;

$O$  - центр окружности, проходящей через точки  $P_1, P_2, P_3$ ;

$R_{окр}$  - радиус окружности, проходящей через точки  $P_1, P_2, P_3$ .

Для поиска окружностей, описанных вокруг точек поиска, из центра окружности рассчитываются расстояния до всех точек профиля и сравниваются с радиусом окружности  $R_{окр}$ . Если есть расстояния, превышающие радиус  $R_{окр}$ , то такие сочетания убираются из рассмотрения.

Из всех описывающих профиль окружностей выбирается та, что имеет минимальный радиус  $R_{окр\_min}$ . Она имеет радиус сопрягаемой поверхности охватываемого кольца, а положение центра окружности – положение центра оси внутренней поверхности охватываемого кольца. Для поиска смещения охватываемого кольца вдоль оси  $z$  (например, ориентируясь на сдвиг верхнего торца), необходимо рассчитать, на какой высоте находится найденное сечение. Для этого к величине аппликаты сечения охватываемого кольца прибавляется величина, равная:

$$\Delta_H = (R_{окр\_min} - R_{верх.торец}) / \text{tg}(\gamma / 2), \quad (2)$$

где  $R_{верх.торец}$  - радиус верхнего сечения охватываемого конусного кольца;

$\gamma$  - угол при вершине конуса.

Таким образом, рассчитывается положение охватываемого кольца вдоль оси  $z$ . Графически можно рассчитать положение центров при экспериментальных исследованиях с учетом биения поверхностей охватываемого кольца. Вокруг центра сопрягаемой поверхности охватываемого кольца рассчитываются точки окружности, с диаметром, равным биению.

Чем больше точек поверхности охватываемого кольца учувствуют в решении, тем точнее оно будет, но тем дольше потребуется время на перебор всех решений. Так, при 120 задающих точек, количество сочетаний, которые необходимо

рассмотреть, равняется  $C_{360}^3 = 120! / ((120-3)! \cdot 3!) = 280840$ . В связи с этим целесообразно использовать параллельные вычисления и разумно ограничивать количество точек поиска, используемые в разработанной модели.

### 3.3. Воспроизведение моделей действительных поверхностей деталей

Для расчета сборочных параметров при помощи описанных выше моделей необходимо информация о задающих точках и математическое описание сопрягаемых поверхностей. Для получения данных о поверхностях рассматриваемых конусных колец использовалась технология обратного инжиниринга, заключающаяся в измерении поверхностей на координатно-измерительной машине и последующей математической обработке данных измерений. Рассмотрим процедуру обратного инжиниринга, примененную к изготовленным конусным кольцам (рисунок 1).

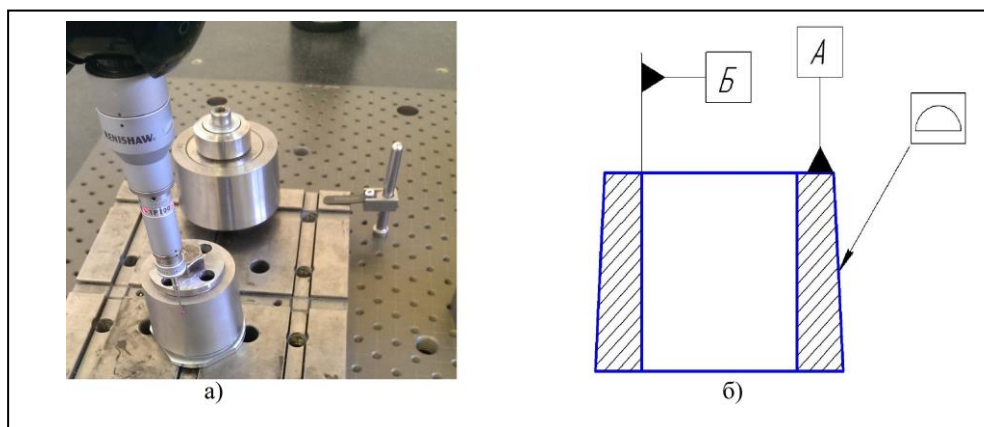


Рис. 1. Базирование конусного кольца а) измерение на КИМ; б) Схема базирования конусного кольца.

При координатных измерениях деталей на первом этапе производится их математическое базирование. Технология математического базирования конусных колец на КИМ основана на измерении поверхностей, по которым можно задать положения осей координат детали. *Математическое базирование* - процедура, заключающаяся в расчете расположения системы координат детали (СКД) по предварительно измеренным в системе координат машины (СКМ) точкам базовых элементов детали к последующей трансформации координат точек других элементов детали из СКМ в СКД. Таким образом, математическое базирование означает расчет оптимальной матрицы преобразования  $M$ , обеспечивающей наилучшее совмещение измеренных точек с соответствующими номинальными точками. Матрица содержит три компоненты перемещения вдоль координатных осей  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  и  $\Delta Z$ , а так же три компоненты вращения вокруг координатных осей  $\Delta \Phi$ ,  $\Delta \Theta$  и  $\Delta \Psi$ .

При определении системы координат детали необходимо определить положение главной оси, направление второй оси и центр системы координат. Для рассматриваемых деталей направление оси вращения задается по торцу А (рисунок 1). Нормальный вектор плоскости коллинеарен оси кольца. Отверстие на малом кольце и внешняя поверхность на охватывающем кольце определяют центры осей. Производится измерение точек отверстия в одном сечении (база Б). После измерения в облако измеренных точек вписывается заменяющий элемент «окружность» по методу наименьших квадратов (МНК). Ось кольца перемещается в центр окружности. Ось цилиндра является осью вращения. На пересечении торцевой плоскости и оси задается точка начала координат.

Процедура базирования, описанная выше, проводится два этапа. На первом этапе элементы измеряются вручную по меньшему количеству точек (черновое базирование). На втором этапе по большому количеству точек автоматизировано - чистовое базирование.

Тем не менее, система координат, построенная по поверхностям А и Б может не соответствовать системе координат поверхности сопряжения, ввиду погрешностей обработки (неперпендикулярность торцу, смещение центра). Для устранения этой погрешности производится наилучшее сличение измеренных точек поверхности сопряжения с математической моделью данной поверхности, по которой производилась обработка и преобразование системы координат. Сопрягаемая поверхность измеряется минимум в трех сечениях по высоте с 300-360 точками в каждом сечении.

Полученные параметры преобразования матрицы  $M$  используются в дальнейших экспериментах при базировании данной детали, то есть не требуется каждый раз производить наилучшее совмещение поверхностей.

В систему MATLAB загружаются координаты измеренных точек сечений поверхности сопряжения  $P_{изм}$ .

Измеренные координаты точек содержат различные случайные составляющие погрешности, вызванные погрешностями измерений, а также нетипичными для всей поверхности выбросами от различных факторов. В связи с этим, для более точных результатов измерений и получения адекватных оценок параметров измеряемых колец необходимо производить фильтрацию таких погрешностей. Одним из наиболее эффективных инструментов для проведения фильтрации случайных погрешностей являются сглаживающие сплайны [8].

Сглаженный сплайн  $\hat{\varepsilon}$  множества отклонений  $\varepsilon$  минимизирует выражение:

$$p \sum_{i=1}^n w_i (\varepsilon(u_i) - \hat{\varepsilon}(u_i))^2 + (1-p) \int (D^2 \hat{\varepsilon}(u))^2 du \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $(u, \varepsilon)$  - аппроксимируемые данные (точка и величина отклонения в ней);

$p$  - параметр сглаживания  $p \in [0,1]$ ;

$W$  - вектор весов (принят за вектор единиц).

Для фильтрации погрешностей измеренных массивов точек колец применялась фильтрация с параметром  $p$  равным 0.99. Для проведения фильтрации необходимо рассчитать радиус-векторы измеренных точек в каждом сечении. Радиус-вектор  $i$ -й точки рассчитывается по формуле:

$$r_{Pi\_изм} = \sqrt{P_{xi\_изм}^2 + P_{yi\_изм}^2}. \quad (4)$$

Отклонение формы в точках сечения  $\delta_F$  вычисляется как разность между радиус-вектором точки  $r_p$  и номинальным радиусом конуса в сечении  $r_{конус}$ :

$$\delta_F = r_p - r_{конус}. \quad (5)$$

После проведения фильтрации рассчитывается среднее отклонение формы в каждой точке каждого измеренного сечения. Величины рассчитанных отклонений в точках использовались для расчета точек новой поверхности (с учетом производственных погрешностей). В системе MATLAB производилось автоматизированное построение NURBS поверхности и сохранение ее в формате \*.igs. Построенная поверхность загружалась в CAD и производилась замена поверхности перестройка с учетом новой поверхности 3D модели кольца.

На окончательном этапе проводилось повторное измерение по методике, описанной выше, для снижения погрешностей измерения, возникающих из-за несоответствия эталонной модели измеряемой детали [9]. Проводилась повторная обработка измерений по последовательности, изложенной выше, и сохранение параметров поверхности для моделирования процесса сборки.

#### 4. Результаты

Для получения экспериментальных данных по параметрам сборки было выполнено 20 измерений колец в собранном состоянии на координатно-измерительной машине. Внешнее охватывающее кольцо в каждом случае измерения поворачивалось на угол вокруг оси. Для поиска центра внутренней сопрягаемой поверхности внешнего кольца в 20 измеренных точках была вписана окружность по методу наименьших квадратов (рисунок 2).

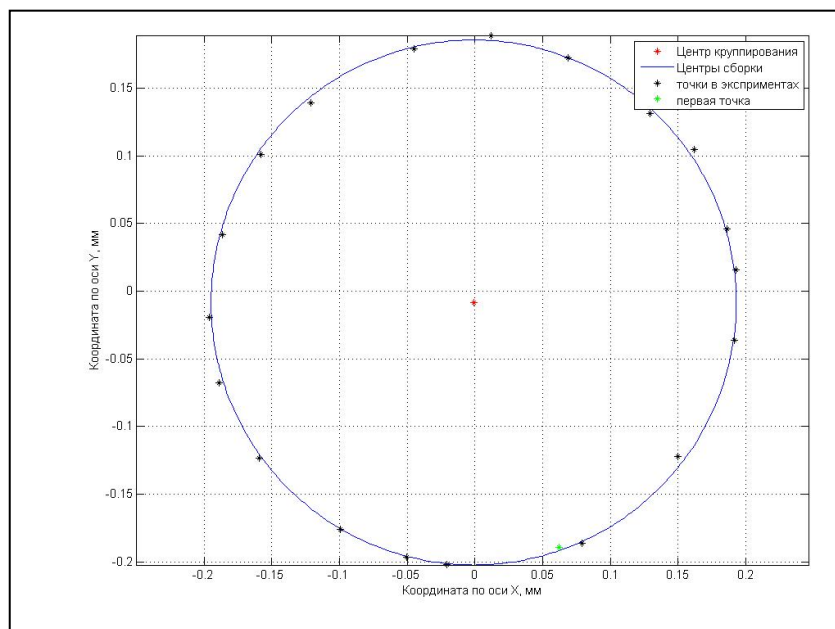


Рис. 2. Графическое решение для поиска центра сопряжения и биения.

Диаметр окружности характеризует величину биения внешнего конусного кольца относительно внутреннего (таблица 1). Дополнительную погрешность вносит непараллельность осей сопрягаемых конусных колец, которая при проведении экспериментов составила 0,005-0,014 мм.

Таким образом, получены параметры, характеризующие сопряжения конусного кольца с отклонением формы и конусного кольца с отклонением расположения (биением конусных поверхностей).

В то же время, при сборке наблюдались различные положения центров по оси  $z$ , объясняемые действием сил трения при сопряжении колец, характеризующие непараллельностью осей при сборке. Таким образом, действие сил трения

приводит к появлению погрешности относительно рассчитанного центра сопряжения. Гистограмма распределения значений центров по оси z представлено на рисунке 3.

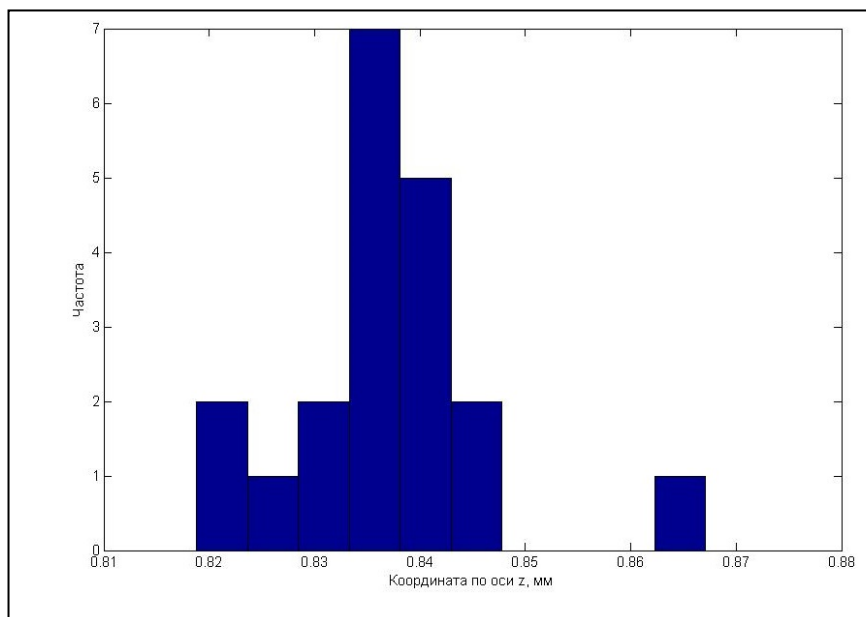


Рис. 3. Гистограмма значений координат по z.

В свою очередь, из-за колебаний при сборке вдоль оси z, рассчитанные положения центров имеют отклонения от вписанной в них идеальной окружности, что так же позволяет говорить о возможной величине погрешностей определения центра сборки. На рисунке 4 представлены гистограммы расстояний колебаний радиус-векторов точек относительно радиуса идеальной окружности, найденной по методу МНК.

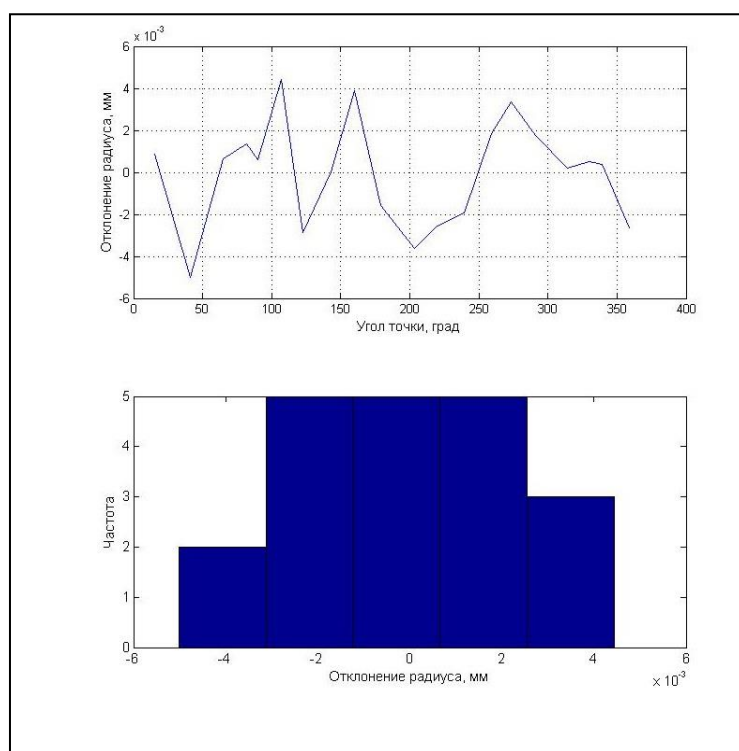


Рис. 4. Колебания радиуса измеренных точек центров.

После проведения экспериментов, параметры сборки колец были рассчитаны при помощи моделей МСП и комбинаторного поиска. Для расчета параметров сборки использовались рассчитанные с помощью процедуры обратного инжиниринга точки поверхности внутреннего кольца. Точки ответной сопрягаемой поверхности внешнего кольца задавались как точки идеальной конусной поверхности.

Сравнение результирующих положений внешнего конусного кольца в сборке, найденных по МСП, по модели комбинаторного поиска и в физических экспериментах, приведены в таблице 2.

**Таблица 2.** Сравнение результирующих координат положения центров детали при сборке

Координаты центра сопряжения	Экспериментальные данные	МСП	Модель комбинаторного поиска
По X, мм	-0,0009	-0,0018	-0,0016
По Y, мм	-0,0083	-0,0059	-0,0069
По Z, мм	0,8188-0,8671	0,9471	0,9353

Сравнивая результаты экспериментального решения и решений, найденных при моделировании, можно отметить, что оба метода имеют достаточно высокую точность при поиске решения по координатным осям  $X$  и  $Y$ , не превышающих 2 мкм в случае МСП и 1 мкм с использованием модели комбинаторного поиска. Координаты по оси  $Z$  имеют большие расхождения, так как отклонения в микрометры в плоскости  $XOY$  порождают отклонения в десятки микрометров вдоль  $Z$ . Расхождения связаны, в первую очередь с тем, что при моделировании не учитывалась сила трения поверхностей и отсутствует перекос осей конусов при сборке. Возможны так же деформации при контакте поверхностей, однако для таких деталей как конусные кольца они не значительны.

## 5. Заключение

В работе приведено описание двух математических моделей, позволяющих прогнозировать геометрические параметры сборочных единиц и названные модель совмещения поверхностей и модель комбинаторного поиска. Разработанные модели полезны тем, что они позволяют прогнозировать относительные положения деталей, имеющих геометрические отклонения. Сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными на примере сборки конусных колец показали высокую сходимость в части определения положения центра оси внешнего кольца. Показано, что расчет погрешностей сборочных параметров можно производить по результатам измерений геометрии на современных КИМ, позволяющих получать информацию о точках поверхностей в электронном виде. Разработанные модели могут быть применимы при прогнозировании сборки ответственных деталей авиационной техники, таких как валы-диски, диски-лопатки.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014 – 2020 годы». Уникальный идентификатор ПНИЭР RFMEFI57815X0131.

## Литература

- [1] Ermakov, A.I. Investigation of the effect of the gas turbine compressor supports on gas flow circumferential nonuniformity / A.I. Ermakov, A.O. Shklovets, G.M. Popov, D.A. Kolmakova // *Research Journal of Applied Sciences*. - 2014. - V. 9(10). - P. 684-690.
- [2] Popov, G.M. Development of recommendations on building of the lightweight calculation mathematical models of the axial turbines of gas turbine engines / G.M. Popov, E.S. Goryachkin, O.V. Baturin, D.A. Kolmakova // *International Journal of Engineering and Technology*. - 2014. - V.6(5). - P. 2236-2243.
- [3] Smelov, V.G. Research on the possibility of restoring blades while repairing gas turbine engines parts by selective laser melting / V.G. Smelov, A.V. Sotov, A.V. Agapovichev // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. - 2016. - V. 140/012019.
- [4] Kolmakova, D.A. Effect of manufacturing tolerances on the turbine blades / D.A. Kolmakova, O.V. Baturin, G.M. Popov // *ASME 2014 Gas Turbine India Conference, GTINDIA 2014*. - P. 1-10.
- [5] Болотов, М.А. Метод оценки неопределённости пространственного сопряжения высокоточных оптических и механических деталей / М.А. Болотов, В.А. Печенин, С.П. Мурзин // *Компьютерная оптика*. - 2016. - Т. 40. - № 3. - С. 360-369.
- [6] Besl, P.J. A method for registration of 3-D shapes / P.J. Besl, N.D. McKay // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. - 1992. - Vol. 14(2). - P. 239-256.
- [7] Pierce, R.S. Simulation of mating between nonanalytical programming formulation / R.S. Pierce, D. Rosen // *Journal of Computing and Information Science in Engineering*. - 2007. - Vol. 7(4). - P. 314-321.
- [8] De Boor, C. *A Practical Guide to Splines (Revised Edition)* / C. De Boor - New York: Springer, 2001. - 348 p.
- [9] J. Mayer, Y. Mir, F. Trochu, A. Vafaeseefat, M. Balazinski, Touch probe radius compensation for coordinate measurement using kriging interpolation, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*. - 1997 - 211(1). - 11-18.