

# Метод расчёта преломляющих оптических элементов, основанный на решении задачи о назначениях

Е.С. Андреев<sup>а,б</sup>, К.В. Андреева<sup>а,б</sup>, М.А. Моисеев<sup>а,б</sup>, Л.Л. Досколович<sup>а,б</sup>

<sup>а</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, ул. Молодогвардейская, 151, Самара, Россия

<sup>б</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

---

## Аннотация

Предложен новый метод расчёта преломляющих оптических элементов для фокусировки излучения в заданную область. Метод основан на восстановлении поверхности оптического элемента по функции эйконала. Расчет «лучевого отображения», соответствующего функции эйконала, сведен к решению линейной задачи о назначениях. Для демонстрации работоспособности метода был рассчитан оптический элемент, фокусирующий пучок круглого сечения в прямоугольную область.

*Ключевые слова:* геометрическая оптика; линейная задача о назначениях; эйконал

---

## 1. Введение

Задача расчёта оптического элемента из условия формирования заданного распределения освещённости относится к классу обратных задач неизображающей оптики. Данная задача является крайне сложной, и в большинстве случаев сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных типа уравнения Монжа-Ампера. Методы расчёта оптических поверхностей, основанные на прямом численном решении уравнения данного типа, появились только в последние годы [1-3]. В общем случае для решения данной задачи используются различные итерационные методы [4-14]. Одним из широко распространенных итерационных методов является метод согласованных квадрик [10-14].

В работе [17] предложена модификация метода согласованных квадрик для расчёта функции эйконала светового поля из условия фокусировки в заданную область. Данная задача является важной при расчёте дифракционных оптических элементов, в особенности преобразователей формы пучка [18-20]. Кроме того, по функции эйконала может быть восстановлена преломляющая или отражающая оптическая поверхность, что позволяет применять предложенный метод для расчёта преломляющих оптических элементов и зеркал [21].

Основными достоинствами метода согласованных квадрик являются его универсальность и возможность формирования сложных дискретных изображений. Однако при решении светотехнических задач часто требуются непрерывные световые распределения. В работах [15, 16] показано, что проблема расчёта зеркала для формирования заданного непрерывного распределения интенсивности в дальней зоне может быть сформулирована как вариационная задача минимизации функционала и как задача Монжа — Канторовича о перемещении масс. Важным практическим результатом указанных работ является сведение вариационной задачи к задаче линейного программирования.

## 2. Описание метода

В настоящей работе вариационный подход [15, 16] применен к задаче расчёта преломляющих оптических элементов, фокусирующих излучение в заданную область. Метод основан на восстановлении оптической поверхности по функции эйконала. Точные аналитические формулы для расчёта преломляющей поверхности представлены в работе [21]. В тоже время, при «параксиальных» параметрах, высота преломляющей поверхности может быть рассчитана в приближении тонкого оптического элемента [16].

Задача расчета функции эйконала из условия фокусировки в заданную область может быть сформулирована как задача Монжа—Канторовича о перемещении масс. Под массами в данной задаче понимаются исходное распределение освещенности и требуемое распределение освещенности в области фокусировки. Функция стоимости соответствует расстоянию между точкой апертуры и точкой области фокусировки. Данный результат показывает, что решение обратной задачи расчета эйконала соответствует отображению, для которого минимизируется суммарное расстояние между точками исходной плоскости и области фокусировки. Предложенный подход позволяет свести расчет функции эйконала к задаче линейного программирования. При этом расчет отображения, соответствующего функции эйконала, может быть сведен к решению линейной задачи о назначениях [22].

## 3. Расчётный пример

Для демонстрации работоспособности предложенного метода была рассчитана функция эйконала из условия фокусировки пучка круглого сечения с радиусом  $R=3\text{ мм}$  в прямоугольную область с размером  $12\times 4\text{ мм}^2$ . Для получения отображения апертура была аппроксимирована набором из  $N=1060$  квадратных ячеек с размером  $0,162\times 0,162\text{ мм}^2$ . Прямоугольник также был представлен в виде объединения  $N=1060$  прямоугольных ячеек с

размером  $0,231 \times 0,21 \text{ мм}^2$ . Для решения линейной задачи о назначениях использовалась функция `munkres.m` [25], реализующая венгерский алгоритм [24].

Для проверки было проведено моделирование работы оптического элемента в программном обеспечении для светотехнических расчётов TracePro® с использованием метода трассировки лучей [23]. Для этого поверхность оптического элемента была аппроксимирована сплайновой поверхностью в системе автоматизированного проектирования Rhinoceros® [24]. В качестве первой поверхности оптического элемента использовалась плоская поверхность, перпендикулярная падающему плоскому пучку с постоянной освещённостью. Форма оптического элемента представлена на рис. 1а. На рис. 1б и 1в представлены формируемое распределение освещённости и сечения распределения освещённости. Среднеквадратическое отклонение полученного распределения освещённости от постоянного значения составляет всего 5,6%.

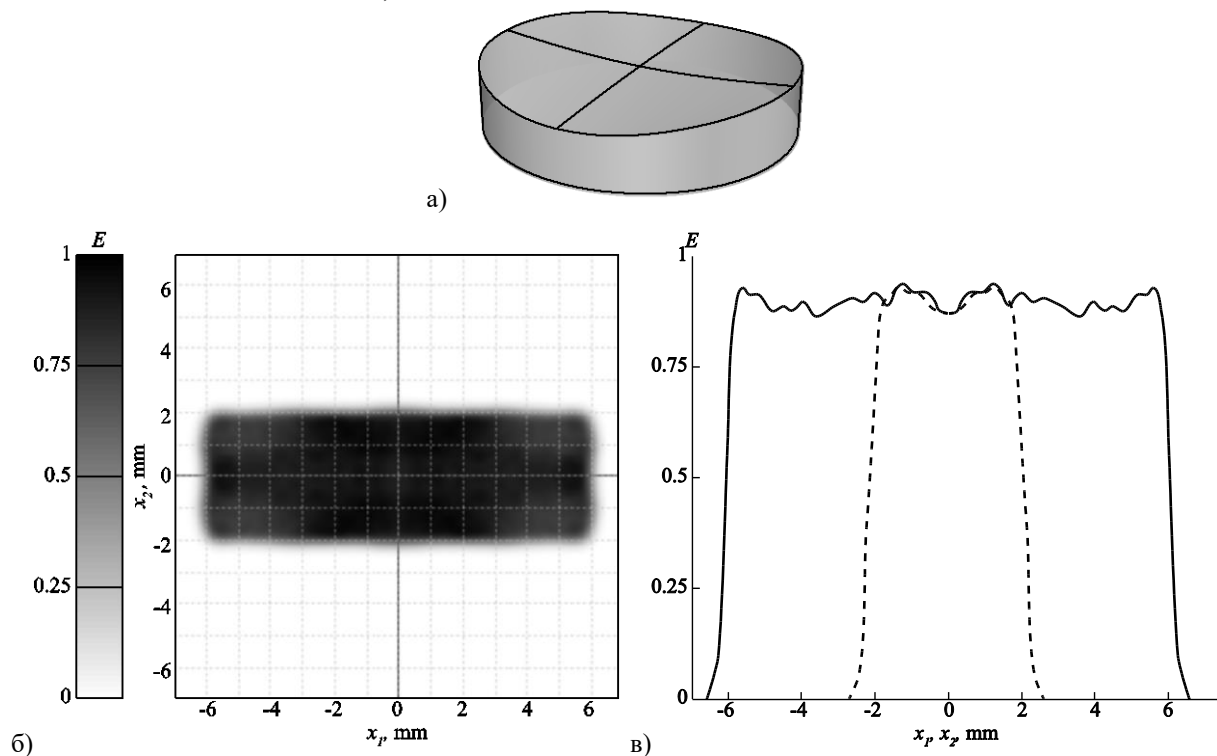


Рис. 1. (а) Оптический элемент для фокусировки пучка круглого сечения в прямоугольник  $12 \times 4 \text{ мм}^2$ , рассчитанный на основе решения линейной задачи о назначениях. (б),(в) Формируемое распределение освещённости и сечения распределения освещённости по осям координат.

#### 4. Заключение

В работе представлен метод расчёта преломляющего оптического элемента, фокусирующего излучение в заданную область. Метод основан на восстановлении оптической поверхности по функции эйконала, рассчитанной из условия фокусировки с помощью решения линейной задачи о назначениях. Результаты расчёта оптического элемента, фокусирующего излучение в прямоугольную область, показывают высокую работоспособность предложенного метода. Среднеквадратическое отклонение полученного распределения освещённости от постоянного значения составляет всего 5,6%. Данный подход, основанный на использовании линейной задачи о назначениях, может быть также использован для расчета зеркал, формирующих заданные распределения интенсивности.

#### Литература

- [1] Wu, R., Xu, L., Liu, P., Zhang, Y., Zheng, Z., Li, H., Liu, X., "Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the Monge–Ampère equation," *Opt. Lett.* 38, 229–231 (2013).
- [2] Wu, R., Benítez, P., Zhang, Y., Miñano, J.C., "Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge–Ampère equation method in freeform optics design," *Opt. Lett.* 39, 634–637 (2014).
- [3] Ma, Y. Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target / Y. Ma, H. Zhang, Z. Su, Y. He, L. Xu, X. Lui, H. Li // *Appl. Opt.* – 2015. – Vol. 54, P. 4503-4508.
- [4] Feng, Z. Design of LED freeform optical system for road lighting with high luminance/illuminance ratio / Z. Feng, Y. Luo, Y. Han // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 18. – P. 22020-22031.
- [5] Luo, Y. Design of compact and smooth free-form optical system with uniform illuminance for LED source / Y. Luo, Z. Feng, Y. Han, H. Li // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 18. – P. 9055-9063.
- [6] Doskolovich, L.L. Design of refractive spline surface for generating required irradiance distribution with large angular dimension / L.L. Doskolovich, M.A. Moiseev // *Journal of Modern Optics.* – 2010. – Vol. 57. – P. 536-544.
- [7] Moiseev, M.A. Design of efficient LED optics with two free-form surfaces / M. A. Moiseev, S. V. Kravchenko, L. L. Doskolovich // *Opt. Express.* – 2014. – Vol. 22. – P. A1926-A1935.
- [8] Wang, K. Design of compact freeform lens for application specific light-emitting diode packaging / K. Wang, F. Chen, Z. Liu // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 18. – P. 413-425.

- [9] Mao, X. Polar-grids based source-target mapping construction method for designing freeform illumination system for a lighting target with arbitrary shape / X. Mao, H. Li, Y. Han, Y. Luo, // *Opt. Express.* – 2015. – Vol. 23. – P. 4313-4328.
- [10] Oliker, V.I. Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics / V.I. Oliker // *Trends in Nonlinear Analysis* / V.I. Oliker, M. Kirkilionis, S. Krömker, R. Rannacher, F. Tomi. – eds. – Springer, 2003. – P. 197-224.
- [11] Kochengin S. A. Computational algorithms for constructing reflectors / S.A. Kochengin, V.I. Oliker // *Computing and Visualization in Science.* – 2003. – Vol. 6. – P. 15-21.
- [12] Oliker, V. Supporting quadric method in optical design of freeform lenses for illumination control of a collimated light / V. Oliker, J. Rubinstein, G. Wolansky // *Advances in Applied Mathematics.* – 2015. – Vol. 62. – P. 160–183.
- [13] Fournier, F. Fast freeform reflector generation using source-target maps / F. Fournier, W. Cassarly, J. Rolland // *Opt. Exp.* – 2010. – Vol. 18. – P. 5295-5304.
- [14] Michaelis, D. Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems / D. Michaelis, P. Schreiber, A. Bäuer // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 918-920.
- [15] Glimm, T. Optical Design of Single Reflector Systems and the Monge–Kantorovich Mass Transfer Problem / T. Glimm, V. Oliker // *J. of Math. Sciences.* – 2003. – Vol. 117 (3). – P. 4096-4108.
- [16] Wang, X.J. On the design of a reflector antenna II. / Xu-JiaWang // *Calc. Var.* – 2004. – Vol. 20. – P. 329–341.
- [17] Doskolovich, L.L. On the use of the supporting quadric method in the problem of the light field eikonal calculation / L. L. Doskolovich, M. A. Moiseev, E. A. Bezus, V. Oliker // *Opt. Express.* – 2015. – Vol. 23. – P. 19605-19617.
- [18] Soifer, V.A. Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, L.L. Doskolovich. – London: Taylor & Francis Ltd., 1997. – 245 p.
- [19] Caley, A.J. Diffractive optical elements for high gain lasers with arbitrary output beam profiles / A. J. Caley, M. J. Thomson, J. Liu, A. J. Waddie, M. R. Taghizadeh // *Opt. Express.* – 2007. – Vol. 15. – P. 10699-10704.
- [20] Qu, W. Precise design of two-dimensional diffractive optical elements for beam shaping / W. Qu, H. Gu, Q. Tan, G. Jin // *Appl. Opt.* – 2015. – Vol. 54. – P. 6521-6525.
- [21] Doskolovich, L.L. Analytic design of optical elements generating a line focus / L.L. Doskolovich, A.Yu. Dmitriev, S.I. Kharitonov // *Optical Engineering.* – 2013. – Vol. 52(9). – P. 091707-0917014.
- [22] Munkres, J. Algorithms for the Assignment and Transportation Problems / J. Munkres // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics.* – 1957. – Vol. 5(1). – P. 32-38.
- [23] Программное обеспечение для светотехнического моделирования TracePro [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.lambdare.com> (06.02.2017).
- [24] Система автоматизированного проектирования Rhinoceros [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.rhino3d.com> (06.02.2017).
- [25] Реализация венгерского алгоритма в системе MATLAB [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/20328-munkres-assignment-algorithm> (06.02.2017).