

# Моделирование и анализ резонансного аттрактора при спуске асимметричного космического аппарата в атмосфере Марса

В.В. Любимов<sup>а</sup>, В.С. Лашин<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

## Аннотация

Рассматривается задача о спуске космического аппарата с малой аэродинамической и инерционной асимметрией в атмосфере Марса. При математическом моделировании вращательного движения космического аппарата используется приближенная нелинейная система уравнений. Применение метода усреднения и второго метода Ляпунова позволяют произвести анализ влияния резонансного аттрактора на эволюцию медленных переменных в нерезонансных областях вращения космического аппарата. В процессе асимптотического анализа эволюций медленных переменных были определены характерные случаи, при которых главный резонанс является аттрактором или репеллером. Результаты численного моделирования иллюстрируют представленные аналитические закономерности.

*Ключевые слова:* моделирование; резонанс; аттрактор; усреднение; космический аппарат; атмосфера; асимметрия; Марс

## 1. Введение

Различным резонансным явлениям и методам их исследования в задаче неуправляемого спуска в атмосфере космических аппаратов (КА) с малой асимметрией посвящено в значительное количество публикаций: [1-2], и другие. В частности, в статьях [3-5] показывается, что возмущающие моменты от массовой и аэродинамической могут приводить к эволюции угловой скорости КА до величин, при которых реализуется длительный главный резонанс. При этом в статьях [3,4] обнаружено, что эволюция угловой скорости КА с малой асимметрией на нерезонансных участках движения в окрестности главного резонанса относится к вторичным резонансным эффектам [6]. Разнообразные резонансные эффекты и непосредственно связанное с ними явление внешней устойчивости резонанса в задачах о возмущенном вращательном движении асимметричного спускаемого КА и спутника на орбите были рассмотрены в работах [5],[7], соответственно. Известно, что реализация длительного резонанса приводит к значительному увеличению угла атаки. На практике, это может привести к аварийной ситуации при раскрытии тормозной парашютной системы КА. Следовательно, исследование явления внешней устойчивости резонанса, при котором главный резонанс способствует приближению переменных динамической системы к резонансным значениям (резонансный аттрактор) в процессе спуска КА в атмосфере представляет собой практически важную задачу. Следует отметить, что исследование резонансного аттрактора предполагается производить в нелинейной постановке и в более общем случае, по сравнению с результатами, представленными в монографии [5].

## 2. Постановка задачи

Предположим, что изучаемый спускаемый космический аппарат представляет собой твёрдое тело в форме конуса, совмещенное со сферической поверхностью. Пусть осью симметрии конуса является ось  $OX$ . В процессе входа в атмосферу Марса спускаемый аппарат ориентирован своей конической поверхностью по направлению к набегающему потоку. При спуске в атмосфере Марса КА осуществляет сферическое движение относительно центра масс. Известно, что при отделении от базового орбитального комплекса спускаемому КА передается некоторый кинетический момент, имеющий малую величину [8]. Образующиеся при этом составляющие угловой скорости КА  $\omega_x(0)$ ,  $\omega_y(0)$ ,  $\omega_z(0)$  будем учитывать как начальные при входе КА в атмосферу Марса, записанные в главной связанной системе координат  $OXYZ$ . Начало указанной системы координат  $O$  находится в центре масс спускаемого аппарата. В статье [9] показано, что резонансные величины угловой скорости  $\omega_x$  при различных аэродинамических характеристиках могут быть определены согласно методике, основанной на применении метода интегральных многообразий. Величины угловой скорости  $\omega_x$ , соответствующие главному резонансу, определяются в следующем виде [5]:  $\omega_x^r = \pm \omega / (1 - \bar{I}_x)^{1/2}$ . Здесь угловая скорость  $\omega = \sqrt{-m_{zn} q S L c t g \alpha / I}$ ,  $m_{zn}$  - коэффициент восстанавливающего момента по углу атаки  $\alpha$ ,  $q$  - скоростной напор,  $S$  - площадь миделева сечения КА,  $L$  - длина КА,  $\bar{I}_x = I_x / I$ ,  $I = (I_y + I_z) / 2$ ,  $I_x, I_y, I_z$  - главные центральные моменты инерции КА. Известно, что главный резонанс оказывает наибольшее влияние на эволюцию медленных переменных на нерезонансных участках движения, по сравнению с резонансами более высоких порядков.

Целью работы является исследование резонансного аттрактора при неуправляемом спуске КА с малой аэродинамической и малой инерционной асимметриями, осуществляющего спуск с произвольными углами атаки в

атмосфере Марса. При исследовании резонансного аттрактора предполагается применять метода усреднения и второй метод Ляпунова.

### 3. Математическая модель

Приближенная нелинейная система уравнений движения КА с малой аэродинамической и малой инерционной асимметриями, описывающая движение аппарата относительно центра масс, имеет вид [5]:

$$\bar{I}_x \frac{d\omega_x}{dt} = \varepsilon m^A \omega_{1,2}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos(2\theta + 2\theta_3), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_a}{4\omega_a^2} \frac{d\alpha}{dt} = & -\Psi \frac{\omega^2 \operatorname{tg} \alpha}{4\omega_a^2 \pi} \mp \varepsilon \frac{m^A}{2\omega_a} \cos(\theta + \theta_1) - \\ & -\varepsilon \frac{\omega_{1,2} \operatorname{tg} \alpha}{4\omega_a^2} \left[ (10 + \bar{I}_x) \omega_x \omega_{1,2} - 2(2 + \bar{I}_x) \omega_x^2 \right] m^A \cos(2\theta + 2\theta_3) - \\ & -\varepsilon \frac{\omega_{1,2} \operatorname{tg} \alpha}{4\omega_a^2} \left[ (\operatorname{tg}^2 \alpha - 4) \omega_{1,2}^2 \right] m^A \cos(2\theta + 2\theta_3), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_x - \omega_{1,2}, \quad (3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \frac{\omega}{2q} \frac{dq}{dt}. \quad (4)$$

Здесь  $\theta = \varphi_n - \pi/2$ ;  $\Psi = \frac{2\pi}{\omega^2} \frac{d\omega}{dt} = O(\varepsilon)$ , расчеты показывают, что для переменной  $\omega$  на периоде изменения  $T = 2\pi/\omega$  выполняется соотношение  $\frac{T}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = O(\varepsilon)$ , следовательно, данная переменная является медленной;  $m^A$ ,  $m^A$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  - функции, характеризующие величину и взаимное расположение аэродинамической и инерционной асимметрий КА,

$$m^A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2}, \quad m_1^A = -\frac{(1 + \bar{I}_x) \omega_x - 3\omega_{1,2}}{2\omega_a} \frac{\omega^2}{m_{zn}} (m_y^{\phi} - C_x \bar{\Delta z}) \operatorname{tg} \alpha - \frac{\omega_{1,2} \omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\omega_a m_{zn}} (m_{xz}^{\phi} + C_{yn} \bar{\Delta z}) \mp$$

$$\mp \frac{\bar{I}_{xz}}{2\omega_a} \left[ \omega_x \omega_{1,2} (\omega_x + \omega_{1,2} \operatorname{tg}^2 \alpha) - \omega_x^2 (\omega_x \mp 2\omega_a) \right], \quad m_2^A = -\frac{(1 + \bar{I}_x) \omega_x - 3\omega_{1,2}}{2\omega_a} \frac{\omega^2}{m_{zn}} (m_z^{\phi} + C_x \bar{\Delta y}) \operatorname{tg} \alpha +$$

$$+ \frac{\omega_{1,2} \omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\omega_a m_{zn}} (m_{xz}^{\phi} + C_{yn} \bar{\Delta y}) \pm \frac{\bar{I}_{xy}}{2\omega_a} \left[ \omega_x \omega_{1,2} (\omega_x + \omega_{1,2} \operatorname{tg}^2 \alpha) - \omega_x^2 (\omega_x \mp 2\omega_a) \right], \quad \sin \theta_1 = m_1^A / m^A, \quad \cos \theta_1 = -m_2^A / m^A,$$

$$\omega_a = \sqrt{\bar{I}_x^2 \omega_x^2 / 4 + \omega^2}; \quad m^A = \sqrt{\bar{I}_{yz}^2 + \bar{\Delta I}^2}, \quad \sin 2\theta_3 = \bar{\Delta I} / m^A, \quad \cos 2\theta_3 = -\bar{I}_{yz} / m^A,$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} / I, \quad \bar{I}_{xz} = I_{xz} / I, \quad \bar{I}_{yz} = I_{yz} / I, \quad \bar{\Delta I} = \Delta I / I - \text{безразмерные моменты инерции КА, } \omega_{1,2} = \frac{\bar{I}_x \omega_x}{2} \pm \omega_a;$$

$\omega_x - \omega_{1,2}$  - резонансная расстройка КА;  $F_a = F_a(\omega_x, \alpha, \omega)$  - известная функция медленных переменных [5]. В уравнениях (1)-(4) учитывается главный резонанс, которому соответствует условие:  $\Delta = \omega_x - \omega_{1,2} \cong 0$ . В уравнениях (1) - (3) присутствуют знаки « $\pm$ », « $\mp$ ». В данных выражениях предполагается, что верхний знак выбирается при  $\omega_x > 0$ , а нижний знак, при  $\omega_x < 0$ .

При численном моделировании движения КА систему уравнений (1)-(4) следует рассматривать в совокупности с системой из трёх дифференциальных уравнений для медленно изменяющихся параметров движения центра масс: угла наклона траектории  $\vartheta(t)$ , скорости набегающего потока  $V(t)$  и высоты полёта  $H(t)$ .

#### 4. Усреднение и анализ резонансного аттрактора

Усредняя уравнения (1) и (2) на нерезонансных участках движения КА с учетом первых трех приближений метода усреднения получим [5]:

$$\left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle = \varepsilon^3 \left\{ \frac{m^{-A} g_2 g_3}{\Delta^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} (m^{-A} g_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}) - \frac{m^{-A} g_3}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (m^{-A} g_3 \frac{\partial g_2}{\partial \alpha}) + \right. \\ \left. + \frac{3(m^{-A} g_3)^2}{\Delta^4} (\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} - g_2 \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \right)^2) \right\} \frac{m^A \cos(2\theta_1 - 2\theta_3)}{8}, \quad (5)$$

$$\left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = \varepsilon^3 \left\{ \frac{m^{-A} g_3 g_1}{\Delta^3} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (m^{-A} g_3) \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} - m^{-A} g_3 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \alpha^2} \right] - \frac{m^{-A} g_3}{\Delta^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} (m^{-A} g_3 \Delta) \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} + \frac{g_1}{\Delta^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (m^{-A} g_3) \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{m^{-A} g_2}{\Delta^3} \frac{\partial g_3}{\partial \omega_x} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (m^{-A} g_3) \Delta + 2m^{-A} g_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \right] - \frac{(m^{-A})^2 g_3}{\Delta^2} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} \frac{\partial g_3}{\partial \alpha} + \frac{(m^{-A})^2 g_3^2}{2\Delta^4} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_x} \left[ 7g_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} - 4\Delta \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(m^{-A})^2 g_3^2}{2\Delta^4} \left[ 2\Delta^2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial \alpha^2} - g_1 \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \right\} \frac{m^A \cos(2\theta_1 - 2\theta_3)}{8} + \varepsilon^3 f_4. \quad (6)$$

где  $g_1 = \frac{2\omega_a \omega_{1,2} \sin \alpha}{F_a} (\omega_x + \frac{\omega_{1,2}^2 \sin^2 \alpha}{2\omega_a})$ ,  $g_2 = \frac{\omega_{1,2}^2 \sin^2 \alpha}{I_x}$ ,  $g_3 = \frac{2\omega_a \omega^2}{F_a}$ .

Уравнения (4) и (5) описывают эволюцию угловой скорости  $\omega_x$  и угла атаки  $\alpha$  на нерезонансных участках движения, вызванную влиянием главного резонанса  $\Delta = 0$ . При положительных значениях  $\omega_x$  резонансная расстройка частот равна  $\Delta = (1 - \frac{\bar{I}_x}{2})\omega_x - \omega_a$ .

Предположим, что КА имеет следующее соотношение моментов инерции:  $\bar{I}_x = 2$ . При этом резонансная расстройка частот равна

$$\Delta = -\sqrt{\omega_x^2 + \omega^2}. \quad (7)$$

Введем в этом случае функцию  $V(\omega_x, \omega) = \Delta^2$ . Данная функция Ляпунова запишется в виде:

$$V(\omega_x, \omega) = \omega_x^2 + \omega^2. \quad (8)$$

Здесь угловые скорости  $\omega_x$  и  $\omega$  определяются из уравнений (5) и (4), соответственно.

С учетом выражения (7) получаем, что главный резонанс  $\Delta = 0$  реализуется в точке

$$\begin{cases} \omega_x = 0, \\ \omega = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, условие внешней устойчивости главного резонанса [5] имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = 2\omega_x \left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle + 2\omega \frac{d\omega}{dt} < 0. \quad (10)$$

Условие (10) является условием асимптотической устойчивости тривиального решения (9). Выполнение условия (10) обеспечивает реализацию резонансного аттрактора (9). Напротив, условие внешней неустойчивости главного резонанса имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = 2\omega_x \left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle + 2\omega \frac{d\omega}{dt} > 0. \tag{11}$$

Условие (11) является условием неустойчивости тривиального решения (9). Выполнение условия (11) обеспечивает реализацию резонансного репеллера (9). Асимптотический анализ условий (10) или (11), осуществляемый при выполнении условий  $\{\omega_x > \omega_x^r > 0\}$ , позволяет выделить следующие шесть характерных случаев реализации резонансного аттрактора или резонансного репеллера:

- 1) если  $\langle d\omega_x/dt \rangle < 0$ ,  $d\omega/dt < 0$ , то условие (10) выполняется и реализуется резонансный аттрактор (9);
- 2) если  $\langle d\omega_x/dt \rangle > 0$ ,  $d\omega/dt > 0$ , то условие (11) выполняется и реализуется резонансный репеллер (9);
- 3) если  $\langle d\omega_x/dt \rangle > 0$ ,  $d\omega/dt < 0$ ,  $\omega_x \left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle < -\omega \frac{d\omega}{dt}$  то условие (10) выполняется и реализуется аттрактор (9);
- 4) если  $\langle d\omega_x/dt \rangle > 0$ ,  $d\omega/dt < 0$ ,  $\omega_x \left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle > -\omega \frac{d\omega}{dt}$  то условие (11) выполняется и реализуется репеллер (9);
- 5) если  $\langle d\omega_x/dt \rangle < 0$ ,  $d\omega/dt > 0$ ,  $-\omega_x \left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle > \omega \frac{d\omega}{dt}$  то условие (10) выполняется и реализуется аттрактор (9);
- 6) если  $\langle d\omega_x/dt \rangle < 0$ ,  $d\omega/dt > 0$ ,  $-\omega_x \left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle < \omega \frac{d\omega}{dt}$  то условие (11) выполняется и реализуется репеллер (9).

## 5. Численные результаты

Численные результаты, полученные с использованием уравнений (1)-(4) подтверждают выполнение, рассмотренных выше шести характерных случаев. В частности, на рис.1 показана зависимость функции Ляпунова от медленных переменных  $\omega_x$  и  $\omega$  при реализации резонансного аттрактора. Данный численный результат соответствует характерному случаю (5).

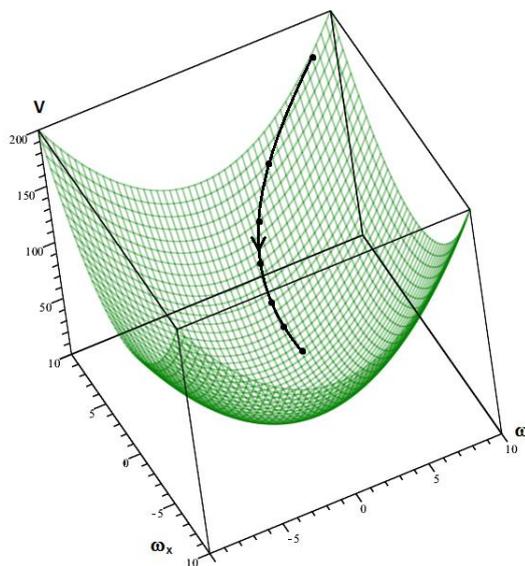


Рис. 1. Функция Ляпунова и угловые скорости при реализации резонансного аттрактора.

На рис.2 представлена зависимость функции Ляпунова от медленных переменных  $\omega_x$  и  $\omega$  при реализации резонансного репеллера. Указанный на рис.2 численный результат соответствует случаю (2).

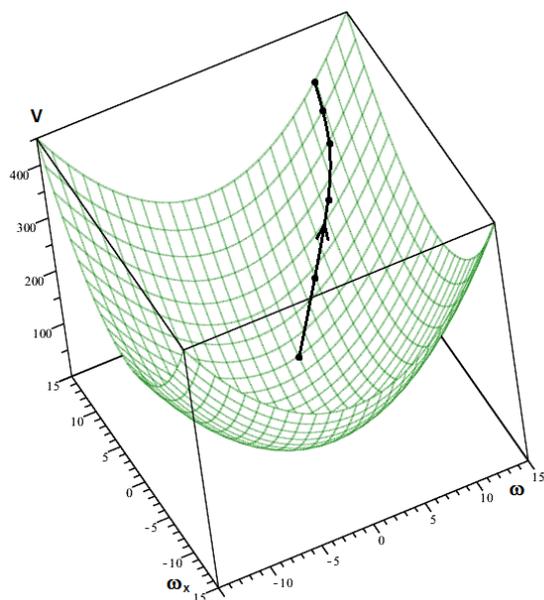


Рис.2. Функция Ляпунова и угловые скорости при реализации резонансного репеллера.

При построении рис.1-2 использовались следующие параметры КА и начальные условия движения:  $m=70$  кг;  $S=0.1\text{м}^2$ ,  $L=0.54$  м,  $\Delta\bar{m}=0.02$ ,  $\bar{m}^A=0.05$ ,  $\theta_1-\theta_3=\pi$ ,  $I=1$  кгм<sup>2</sup>,  $I_x=0.3$  кгм<sup>2</sup>,  $V(0)$ -начальное значение скорости КА,  $V(0)=3400\text{м/с}$ ,  $\vartheta(0)$ -начальное значение угла наклона траектории,  $\vartheta(0)=-5$  град,  $H(0)$ -начальное значение высоты полета КА,  $H(0)=100$  км,  $\varphi(0)=0$ ,  $\alpha(0)=3$  град,  $\omega_x=10$  с<sup>-1</sup> (рис.1);  $\Delta\bar{m}=0.005$ ,  $\bar{m}^A=0.05$ ,  $\theta_1-\theta_3=0$ ,  $\omega_x=15$  с<sup>-1</sup> (рис.2). На рис.1-2 направление нерезонансной эволюции соответствующих переменных показано стрелками.

## 6. Заключение и результаты

Таким образом, применение метода усреднения и второго метода Ляпунова позволило осуществить асимптотический анализ, как резонансного аттрактора, так и резонансного репеллера в нерезонансных областях вращения космического аппарата с малой аэродинамической и инерционной асимметриями в атмосфере Марса. В работе также было произведено исследование нерезонансных эволюций медленных переменных при неуправляемом спуске КА с малыми аэродинамической и инерционной асимметриями в атмосфере Марса. При этом были получены условия реализации резонансного аттрактора и резонансного репеллера при произвольных углах атаки. Кроме того, были выявлены три характерных случая реализации резонансного репеллера и три характерных случая реализации резонансного аттрактора. Приближенные аналитические результаты работы соответствуют результатам численного моделирования.

## Литература

- [1] Ярошевский, В.А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов / В.А. Ярошевский. - М.: Наука. Физ.-мат. лит., 1988. - 336 с.
- [2] Шилов, А.А. Резонансные режимы пространственного неуправляемого движения аппаратов на участке входа в атмосферу / А.А. Шилов, М.Г. Гоман // Труды ЦАГИ. - 1975.- Вып.1624.- 44 с.
- [3] Zabolotnov, Yu.M. Secondary resonance effect in the motion of a spacecraft in the atmosphere / Yu. M. Zabolotnov, V.V. Lyubimov // Cosmic Research. – Vol.36.- Issue 2. -1998. - P. 194-201.
- [4] Lyubimov, V.V. Asymptotic analysis of the secondary resonance effects in the rotation of a spacecraft with a small asymmetry in the atmosphere / V.V. Lyubimov // Russian Aeronautics. -Vol. 57. -№. 3. -2014. - P. 245-252.
- [5] Любимов, В.В. Внешняя устойчивость резонансов в динамике полёта космических аппаратов с малой асимметрией / В.В. Любимов // Самара, Издательство СНЦ РАН, 2013.- 276 с.
- [6] Садов, Ю.А. Вторичные резонансные эффекты в механических системах / Ю.А.Садов // Известия РАН. Механика твердого тела. -1990. - Вып.4. – С. 20-24.
- [7] Lyubimov, V.V. External stability of resonances in the motion of an asymmetric rigid body with a strong magnet in the geomagnetic field / V.V. Lyubimov // Mechanics of Solids. –Vol. 45. -Issue 1. – 2010. - P. 10-21.
- [8] Калаев, М.П. Полунатурное и имитационное моделирование процесса отделения микроспутника / М.П. Калаев, В.В. Любимов, Н.Д. Сёмкин // Гироскопия и навигация. - 2014. -№ 2 (85). - С. 52-60.
- [9] Zabolotnov, Yu.M. Application of the method of integral manifolds for construction of resonant curves for the problem of spacecraft entry into the atmosphere / Yu. M. Zabolotnov, V.V. Lyubimov // Cosmic Research. –Vol.41. - Issue 5. – 2003. - P. 453-459.