

# Моделирование наведённых резонансных моментов при движении асимметричного космического аппарата в атмосфере

В.В. Любимов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** В настоящей работе исследуется неуправляемое движение асимметричного космического аппарата в атмосфере. Предположим, что космический корабль - это твердое тело с малыми массово-инерционными и малыми аэродинамическими асимметриями. Целью исследования является изучение математических моделей малых механических моментов, наведённых главным резонансом в нерезонансных областях движения. В предлагаемом исследовании решаются следующие задачи: получены выражения для наведённого механического момента, определены величины областей действия данного момента. Автор приходит к выводу, что применение метода усреднения позволяет исследовать механический момент, наведённый резонансом. Данный момент способствует значительной эволюции угловой скорости вращения космического аппарата в нерезонансных областях, прилегающих к резонансу.

## 1. Введение

Многие современные исследования были сосредоточены на изучении вращательного движения при спуске космического аппарата (КА) в атмосферах Земли и Марса [1-4]. Известно, что наличие малых массовой и аэродинамической асимметрий может привести к резонансу в атмосферном движении КА [5]. Следует отметить, что длительный резонанс вызывает нарушение технологических ограничений по углу атаки. Кроме того, вторичные резонансные эффекты также могут способствовать развитию чрезвычайной ситуации во время атмосферного спуска КА [6-7]. Действительно, эти динамические явления могут привести к значительному увеличению угловой скорости КА. Вторичные резонансные эффекты - это эволюционные явления, вызванные резонансом в нерезонансных областях, прилегающих к резонансу [8]. Указанные резонансные эффекты были впервые отмечены при изучении быстрого вращения спутника с магнитным демпфером [9].

Одной из основных задач при изучении резонансов является исследование устойчивости резонансных явлений. Известно, что внутренняя устойчивость резонансов происходит в малой окрестности этого резонанса. При этом внешняя устойчивость резонансов приводит к эволюции медленных переменных системы вне малой окрестности резонанса.

Традиционно, космические исследования были сосредоточены на анализе устойчивости динамических систем в малой окрестности резонансов [10-11]. В последнее время были опубликованы несколько работ по исследованиям внешней устойчивости резонансов [12]-[14]. Связь между вторичными резонансными эффектами и явлением внешней устойчивости

резонансов отмечена в [13]. Кроме того, оба явления определяются влиянием вековых членов с резонансным отношением частот в знаменателях. Как и в случае резонансного эффекта, выполнение условий внешней устойчивости резонанса приводит к нерезонансной эволюции значений медленных переменных системы к их резонансным значениям.

Возрастающий интерес к исследованиям внешней устойчивости резонансов усилил необходимость получения малых моментов, вызванных главным резонансом в нерезонансных областях движения [15]. При этом можно показать, что резонансные моменты приводят к выполнению условий внешней устойчивости резонанса. Следует отметить, что автору не известны публикации об исследованиях наведенных механических моментах, вызванных резонансом в нерезонансных областях в задаче о движении асимметричного космического аппарата в атмосфере.

Целью данной работы является исследование моделей новых малых моментов, наведённых главным резонансом при нерезонансном вращательном движении асимметричного КА в атмосфере.

Краткое содержание статьи следующее: в разделе 2 нелинейные уравнения движения спутника усредняются с использованием трех приближений метода усреднения. При этом применяется нерезонансная схема усреднения. В разделе 3 производится подробный анализ малых наведённых резонансных моментов. В этом случае выявляются особенности, содержащиеся в резонансных моментах. Отметим, что резонансные моменты космических аппаратов с массовой и аэродинамической асимметриями, а также массово-аэродинамической и инерционной асимметриями рассматриваются отдельно. Раздел 4 включает в себя величины областей действия резонансных моментов. Работа завершается разделом 5, где представлены численные результаты.

## 2. Математические модели

Запишем нелинейную систему в удобной для последующего анализа форме. Для этого выделим в ней обобщенные параметры асимметрии, как это было сделано в [7]. В результате нелинейная система относительного движения КА примет вид

$$\bar{I}_x \frac{d\omega_x}{dt} = -\varepsilon m_x^A \sin(\theta + \theta_2) + \varepsilon m^A \omega_{1,2}^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos(2\theta + 2\theta_3), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_a}{4\omega_a^2} \frac{d\alpha}{dt} = & -\varepsilon \frac{\omega \operatorname{tg} \alpha}{2\omega_a^2} \frac{d\omega}{dt} \mp \varepsilon \frac{m^A}{2\omega_a} \cos(\theta + \theta_1) - \\ & - \varepsilon \frac{\omega_{1,2} \operatorname{tg} \alpha}{4\omega_a^2} \left[ (1 + \bar{I}_x) \omega_x \omega_{1,2} - 2(2 + \bar{I}_x) \omega_x^2 \right] m^A \cos(2\theta + 2\theta_3) - \\ & - \varepsilon \frac{\omega_{1,2} \operatorname{tg} \alpha}{4\omega_a^2} \left[ (\operatorname{tg}^2 \alpha - 4) \omega_{1,2}^2 \right] m^A \cos(2\theta + 2\theta_3), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_x - \omega_{1,2}, \quad (3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \frac{\omega}{2q} \frac{dq}{dt}. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon$  – малый параметр, характеризующий малость параметров массово-инерционной и аэродинамической асимметрии,  $XYZ$  – система координат, связанная с КА,  $\alpha$  – угол атаки,  $\omega_x$  – угловая скорость КА,  $\theta$  – быстрая фаза,  $\theta = \varphi - \pi/2$ ,  $m_x^A$ ,  $m^A$ ,  $m^A$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  – функции, характеризующие величину и относительное положение массовой, аэродинамической и инерциальной асимметрии КА,  $m^A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2}$ ,

$$m_1^A = -\frac{(1 + \bar{I}_x) \omega_x - 3\omega_{1,2}}{2\omega_a} \frac{\omega^2}{m_{\text{зп}}} (m_y^f - C_x \overline{\Delta z}) \operatorname{tg} \alpha - \frac{\omega_{1,2} \omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\omega_a m_{\text{зп}}} (m_{\text{xc}}^f + C_{\text{ys}} \overline{\Delta z}),$$

$$m_2^A = -\frac{(1 + \bar{I}_x)\omega_x - 3\omega_{1,2}}{2\omega_a} \frac{\omega^2}{m_{zn}} (m_z^f + C_x \overline{\Delta y}) \operatorname{tg} \alpha + \frac{\omega_{1,2} \omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2\omega_a m_{zn}} (m_{xs}^f + C_{ys} \overline{\Delta y}),$$

$$\sin \theta_1 = m_1^A / m^A, \cos \theta_1 = -m_2^A / m^A, m_x^A = \sqrt{(m_{x1}^A)^2 + (m_{x2}^A)^2},$$

$$m_{x1}^A = -\frac{\omega^2}{m_{zn}} C_{ys} \overline{\Delta y} \operatorname{tg} \alpha, \quad m_{x2}^A = -\frac{\omega^2}{m_{zn}} C_{ys} \overline{\Delta z} \operatorname{tg} \alpha, \sin \theta_2 = -m_{x1}^A / m_x^A, \cos \theta_2 = m_{x2}^A / m_x^A;$$

$\omega_a = \sqrt{\bar{I}_x^2 \omega_x^2 / 4 + \omega^2}$ ;  $m_{zn}$  - коэффициент восстанавливающего момента,  $\omega$  - частота прецессии при угловой скорости  $\omega_x = 0$ ,  $m^A = \sqrt{\bar{I}_{yz}^2 + \overline{\Delta \Pi}^2}$ ,  $\sin 2\theta_3 = \overline{\Delta \Pi} / m^A$ ,  $\cos 2\theta_3 = -\bar{I}_{yz} / m^A$ ,

$I_x, I_y, I_z, I_{yz}$  - осевые и центробежный моменты инерции КА,  $\bar{I}_{yz} = I_{yz} / I$ ,  $\overline{\Delta \Pi} = \Delta \Pi / I$ ,  $\omega_{1,2} = \frac{\bar{I}_x \omega_x}{2} \pm \omega_a$ ,  $\omega(z) = \omega_x - \omega_{1,2}$  - резонансное соотношение частот;  $C_x, C_{ys}$  - безразмерные коэффициенты аэродинамических сил;  $m_y^f, m_z^f$  - безразмерные коэффициенты малых аэродинамических моментов, вызванные асимметричной формой КА;  $\overline{\Delta y}, \overline{\Delta z}$  - малые безразмерные смещения центра масс КА,  $F_a$  - известная функция [7].

Приближенную нелинейную систему (1)-(4) можно получить методом интегральных многообразий [16].

Отметим, что главный резонанс наблюдается в системе (1)-(4) при выполнении равенства  $\frac{d\theta}{dt} = \omega_x - \omega_{1,2} = 0$ . Поскольку  $\omega_1 > 0$  и  $\omega_2 < 0$ , то двум главным резонансам  $\omega_x - \omega_{1,2} = 0$  соответствуют две резонансные кривые. Данные кривые определяются из уравнений  $\omega_x^r - \omega_1 = 0$  ( $\omega_x > 0$ ) и  $\omega_x^r - \omega_2 = 0$  ( $\omega_x < 0$ ). Решение уравнения  $\omega_x - \omega_{1,2} = 0$  позволяет нам найти величину резонансной угловой скорости

$$\omega_x^r = \pm \frac{\omega}{\sqrt{1 - \bar{I}_x}}. \tag{5}$$

Здесь  $\omega = \sqrt{-m_{zn} q S L \operatorname{ctg} \alpha / I}$ ,  $q$  - скоростной напор,  $S$  - величина поперечного сечения КА,  $L$  - длина КА.

Нелинейная система уравнений (1)-(4) решается численно совместно с системой уравнений, определяющей движение центра масс КА [17]:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{C_{xv} q S}{m} - g \sin \vartheta, \tag{6}$$

$$\frac{dH}{dt} = V \sin \vartheta, \tag{7}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C_{yv} S q}{mV} - \frac{g \cos \vartheta}{V}, \tag{8}$$

где  $C_{xv}, C_{yv}$  - известные аэродинамические коэффициенты,  $V$  - воздушная скорость КА,  $H$  - высота полёта КА,  $\vartheta$  - угол входа,  $g$  - ускорение свободного падения,  $m$  - масса КА.

Предположим, что требуется изучить эволюцию вращательного движения КА в атмосфере. Для этого необходимо проанализировать изменение медленных переменных системы (1)-(4). Однако, правые части уравнений (1)-(2) содержат быструю фазу  $\theta$ . Следовательно, подобное исследование нерезонансных эволюций переменных системы, непосредственно использующее уравнения (1)-(4) невозможно. Однако, система (1)-(4) является стандартной системой с одной быстрой фазой  $\theta$

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon Z(z, \theta, \varepsilon), \tag{9}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(z). \tag{10}$$

Здесь  $z = \{\omega_x, \alpha, \omega\}$  – вектор медленных переменных;  $Z(z, \theta)$  – вектор правых частей уравнений (1),(2),(4). Отметим, что резонансные области таких систем имеют ширину порядка  $\sqrt{\varepsilon}$ . В этом случае величина резонансной области системы (1)-(4) характеризуется условием  $\frac{d\varphi}{dt} = o(\sqrt{\varepsilon})$ .

Следует отметить, что уравнения (6)-(8) не зависят от быстрой фазы. Таким образом, при применении метода усреднения систему (1)-(4) можно рассматривать отдельно от уравнений (6)-(8). Получим уравнения для медленных переменных, которые не содержат быстрой фазы  $\theta$ . С этой целью используем известный метод усреднения в нерезонансном случае. Согласно указанному методу, для нахождения асимптотических решений произведём замену переменных [18-19]:

$$z = z^0 + \varepsilon z_1(z^0, \theta^0) + \varepsilon^2 z_2(z^0, \theta^0) + \dots, \tag{11}$$

$$\theta = \theta^0 + \varepsilon \theta_1(z^0, \theta^0) + \varepsilon^2 \theta_2(z^0, \theta^0) + \dots, \tag{12}$$

где функции  $z_i(z^0, \theta^0)$ ,  $\theta_i(z^0, \theta^0)$  являются периодическими по фазе  $\theta^0$  с нулевым средним.

При этом требуется, чтобы переменные  $z^0$  и  $\theta^0$  удовлетворяли уравнениям, не содержащим быструю фазу  $\theta^0$ :

$$\frac{dz^0}{dt} = \varepsilon A_1(z^0) + \varepsilon^2 A_2(z^0) + \varepsilon^3 A_3(z^0) + \dots, \tag{13}$$

$$\frac{d\theta^0}{dt} = \omega(z^0) + \varepsilon B_1(z^0) + \varepsilon^2 B_2(z^0) + \dots. \tag{14}$$

Здесь функции  $A_i, B_i, z_i, \theta_i$ , где  $i=1,2,\dots$ , определяются согласно методу [18].

При нерезонансном усреднении уравнений (1)-(3) с учётом первых трёх приближений получаем:

$$\left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle = \varepsilon A_1^{(\omega_x)} + \varepsilon^2 A_2^{(\omega_x)} + \varepsilon^3 A_3^{(\omega_x)}. \tag{15}$$

Здесь  $A_1^{(\omega_x)}, A_2^{(\omega_x)}, A_3^{(\omega_x)}$  – функции, зависящие только от медленных переменных.

### 3. Асимптотический анализ резонансных моментов

#### 3.1. Резонансный момент во втором приближении

Во-первых, рассмотрим случай отсутствия инерционной асимметрии  $m^A = 0$ . Определяя функции  $A_1^{(\omega_x)}, A_2^{(\omega_x)}$ , мы получаем уравнение для угловой скорости  $\omega_x^0$ , учитывающее два первых приближения метода усреднения:

$$\left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle = \varepsilon^2 A_2^{(\omega_x)}, \tag{16}$$

где  $A_1^{(\omega_x)} = 0, A_3^{(\omega_x)} = 0$ ,

$$A_2^{(\omega_x)} = \pm m_x^{-A} \frac{\partial(m_x^{-A})}{\partial \alpha} \frac{I \omega_a^4 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{F_a \Delta} \pm \frac{m_x^{-A} m^{-A} \text{ctg} \alpha \omega^4 I \omega_a}{F_a \Delta^2} \frac{\partial \omega_a}{\partial \alpha} \cos(\theta_1 - \theta_2) \pm$$

$$\pm \frac{\overline{m}_x^{-A} \overline{m}^{-A} \omega^4 I \omega_a}{F_a \Delta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} \sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{\left(\overline{m}_x^{-A}\right)^2 I \omega^4}{2 \overline{I}_x \Delta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \omega_x}, \overline{m}_x^{-A}, \overline{m}^{-A} - \text{безразмерные параметры величин}$$

асимметрии,  $\overline{m}_x^{-A} = \overline{m}_x^A / \omega^2$ ,  $\overline{m}^{-A} = \overline{m}^A / \omega^2$ ,  $\frac{\partial \overline{m}_x^{-A}}{\partial \alpha} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \overline{m}_x^A}{\partial \alpha}$ ,  $\Delta = \omega_x - \omega_{1,2}$ .

Следовательно, наведенный резонансом(резонансный)механический момент, имеющий второй порядок малости, равен:

$$M_2^{(\omega_x)} = I_x A_2^{(\omega_x)}. \tag{17}$$

Представим момент (17) в следующем виде:

$$M_2^{(\omega_x)} = M_{21}^{(\omega_x)}(\Delta) + M_{22}^{(\omega_x)}(\Delta^2). \tag{18}$$

Здесь  $M_{21}^{(\omega_x)} = \pm I_x \overline{m}^{-A} \frac{\partial(\overline{m}_x^{-A})}{\partial \alpha} \frac{I \omega^4 \omega_a \cos(\theta_1 - \theta_2)}{F_a \Delta} \pm I_x \frac{\overline{m}_x^{-A} \overline{m}^{-A} \omega^4 I \omega_a}{F_a \Delta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} \sin(\theta_1 - \theta_2) -$

$$- I_x \frac{\left(\overline{m}_x^{-A}\right)^2 I \omega^4}{2 \overline{I}_x \Delta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \omega_x}, M_{22}^{(\omega_x)} = \pm I_x \frac{\overline{m}_x^{-A} \overline{m}^{-A} \operatorname{ctg} \alpha \omega^4 I \omega_a}{F_a \Delta^2} \frac{\partial \omega_a}{\partial \alpha} \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Как это следует из уравнения (16): первое и третье приближения в процессе усреднения уравнения (1) становятся равными нулю. Следовательно, эволюция усредненной скорости  $\omega_x$  определяется слагаемыми второго приближения  $A_2^{(\omega_x)} \neq 0$ . При этом малый резонансный момент (17) определяют члены, полученные в виде комбинаций малых параметров от действия массовой и аэродинамической асимметрии  $(\overline{m}_x^{-A}, \frac{\partial \overline{m}_x^{-A}}{\partial \alpha}, \theta_2)$  и  $(\overline{m}^{-A}, \theta_1)$ .

Характерной особенностью резонансного момента (17) является наличие резонансных отношений частот  $\Delta$ ,  $\Delta^2$  в знаменателях. Величины этих отношений определяют влияние главного резонанса на эволюцию наведённого момента (18) в нерезонансных областях, прилегающих к резонансу. Кроме того, из (18) также следует, что члены содержащие  $\Delta$  и  $\Delta^2$ , могут иметь разные знаки. Следовательно, возможен особый случай, когда эти члены полностью компенсируют друг друга. В этом случае резонансный момент (18) принимает нулевое значение. В самом деле, в этом случае первые три приближения метода усреднения равны нулю.

### 3.2. Резонансный момент во третьем приближении

Во-вторых, рассмотрим случай отсутствия инерционной асимметрии  $m_x^A = 0$ . Усредняя систему (1)-(3) в этом случае получим, что влияние асимметрии на нерезонансную эволюцию угловой скорости  $\omega_x$  определяется слагаемыми только третьего приближения:

$$\left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle = \varepsilon^3 A_3^{(\omega_x)}. \tag{19}$$

Здесь  $A_1^{(\omega_x)} = 0$ ,  $A_2^{(\omega_x)} = 0$ ,

$$A_3^{(\omega_x)} = \varepsilon^3 \left\{ \frac{g_1 g_2}{\Delta^3} \frac{\partial(\overline{m}^{-A} g_1)}{\partial \alpha} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} - \frac{g_1}{\Delta^2} \frac{\partial(\overline{m}^{-A} g_1)}{\partial \alpha} \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} + \frac{3 \overline{m}^{-A} g_1^2}{\Delta^4} \left( \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} - g_2 \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \right)^2 \right) \right\}.$$

$$\frac{\overline{m}^{-A} m^A \cos(2\theta_1 - 2\theta_3)}{8}, g_1 = \frac{2\omega_a \omega^2}{F_a}, g_2 = \frac{\omega_{1,2}^2 \sin^2 \alpha}{\overline{I}_x}.$$

Следовательно, наведённый резонансом момент, имеющий третий порядок малости, равен:

$$M_3^{(\omega_x)} = I_x A_3^{(\omega_x)}. \quad (20)$$

Представим момент (20) в виде:

$$M_3^{(\omega_x)} = M_{31}^{(\omega_x)}(\Delta^2) + M_{32}^{(\omega_x)}(\Delta^3) + M_{33}^{(\omega_x)}(\Delta^4). \quad (21)$$

Здесь, составляющие момента равны  $M_{31}^{(\omega_x)} = -\varepsilon^3 \frac{g_1}{8\Delta^2} \frac{\partial(\bar{m}^A g_1 \frac{\partial g_2}{\partial \alpha})}{\partial \alpha} \bar{m}^A m^4 \cos(2\theta_1 - 2\theta_3)$ ,

$$M_{32}^{(\omega_x)} = \varepsilon^3 \frac{g_1 g_2}{8\Delta^3} \frac{\partial(\bar{m}^A g_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha})}{\partial \alpha} \bar{m}^A m^4 \cos(2\theta_1 - 2\theta_3), M_{33}^{(\omega_x)} = \varepsilon^3 \frac{3\bar{m}^A g_1^2}{8\Delta^4} (\Delta \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} - g_2 \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}\right)^2) \cdot \bar{m}^A m^4 \cos(2\theta_1 - 2\theta_3).$$

Из уравнения (19) следует, что первое и второе приближения становятся равными нулю в процессе усреднения уравнения (1). Действительно, эволюция усредненной скорости  $\omega_x$  определяется слагаемыми третьего приближения  $A_3^{(\omega_x)} \neq 0$ . Кроме того, малый резонансный момент (21) определяют члены, полученные из комбинаций малых параметров от действия массово-аэродинамической асимметрии  $(\bar{m}^A, \theta_1)$  и инерционной асимметрии  $(m^4, \theta_3)$ . Следует отметить, что характерной особенностью резонансного момента (21) является наличие резонансных отношений частот  $\Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$  в знаменателях. При этом величины этих отношений частот определяют влияние главного резонанса на эволюцию крутящего момента (21) в нерезонансных областях, прилегающих к резонансу. Кроме того, из (21) следует, что члены, содержащие  $\Delta^3, \Delta^2, \Delta^4$ , могут иметь разные знаки. Следовательно, возможен случай, когда эти условия полностью компенсируют друг друга. В этом случае резонансный момент (21) принимает нулевое значение и эволюцию угловой скорости должны определять члены последующих приближений метода усреднения.

#### 4. Области действия наведенных резонансных моментов

Определим области действия наведенных резонансных моментов (18) и (21). Границы области действия моментов определяются следующим образом. Отметим, что наведенные моменты (18), (21) нельзя рассматривать в резонансной области  $\Delta = o(\sqrt{\varepsilon})$ . Действительно, нерезонансная схема усреднения предполагает нахождение системы (1)-(4) за пределами резонансных областей. Таким образом, мы получаем первую границу области:  $\Delta = o(\sqrt{\varepsilon})$ . При значительном удалении от границы резонансной области происходит увеличение порядка малости момента наведенного момента на один порядок. При этом расчеты показывают, что усредненное значение угловой скорости  $\omega_x$  стабилизируется. Таким образом, мы получаем вторую границу области.

Пусть выполнено условие  $|M_{21}^{(\omega_x)}| > |M_{22}^{(\omega_x)}|$ . В этом случае из выражения (18) следует, что область наведенного момента определяется неравенством  $\sqrt{\varepsilon} < |\Delta| < 1/\varepsilon$ . Напротив, если выполняется неравенство  $|M_{21}^{(\omega_x)}| < |M_{22}^{(\omega_x)}|$ , то область действия наведенного момента (18) удовлетворяет неравенству  $\sqrt{\varepsilon} < |\Delta| < 1/\sqrt{\varepsilon}$ .

Пусть выполнено неравенство  $|M_{31}^{(\omega_x)}| > |M_{32}^{(\omega_x)} + M_{33}^{(\omega_x)}|$ . В этом случае из выражения (21) следует, что область действия резонансного момента определяется выражением  $\sqrt{\varepsilon} < |\Delta| < 1/\sqrt{\varepsilon}$ . Предположим, что выполняется условие  $|M_{32}^{(\omega_x)}| > |M_{31}^{(\omega_x)} + M_{33}^{(\omega_x)}|$ . Тогда область действия

наведенного резонансом момента (21) равна  $\sqrt{\varepsilon} < |\Delta| < 1/\sqrt[3]{\varepsilon}$ . Если выполнено условие  $\left| M_{33}^{(\omega_x)} \right| > \left| M_{31}^{(\omega_x)} + M_{32}^{(\omega_x)} \right|$ , то область действия резонансного момента (21) равна  $\sqrt{\varepsilon} < |\Delta| < 1/\sqrt[4]{\varepsilon}$ .

В таблице 1 представлены величины областей действия механических моментов, наведённых главным резонансом. В данной таблице представлен рейтинг областей действия моментов и показано, что величины областей уменьшаются с увеличением степени  $\Delta$ .

**Таблица 1.** Величин областей действия наведённых моментов.

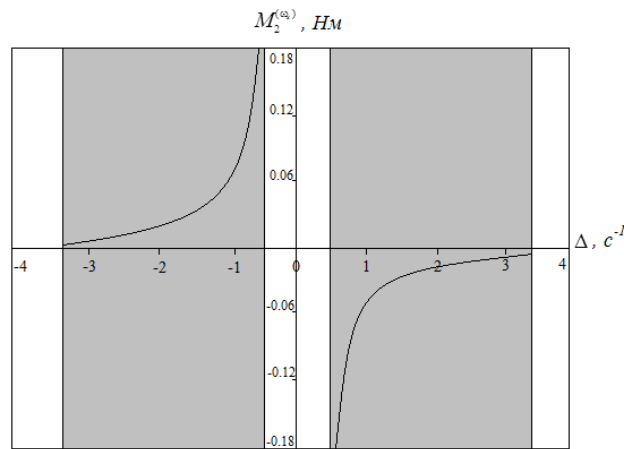
Момент	Величина области	Рейтинг величин областей
$M_{21}^{(\omega_x)} = \varepsilon^2 \frac{f_{21}}{\Delta}$	$\sqrt{\varepsilon} <  \Delta  < 1/\varepsilon$	1
$M_{22}^{(\omega_x)} = \varepsilon^2 \frac{f_{22}}{\Delta^2}$	$\sqrt{\varepsilon} <  \Delta  < 1/\sqrt{\varepsilon}$	2
$M_{31}^{(\omega_x)} = \varepsilon^2 \frac{f_{31}}{\Delta^2}$	$\sqrt{\varepsilon} <  \Delta  < 1/\sqrt{\varepsilon}$	2
$M_{32}^{(\omega_x)} = \varepsilon^2 \frac{f_{32}}{\Delta^3}$	$\sqrt{\varepsilon} <  \Delta  < 1/\sqrt[3]{\varepsilon}$	3
$M_{33}^{(\omega_x)} = \varepsilon^2 \frac{f_{33}}{\Delta^4}$	$\sqrt{\varepsilon} <  \Delta  < 1/\sqrt[4]{\varepsilon}$	4

### 5. Численные результаты

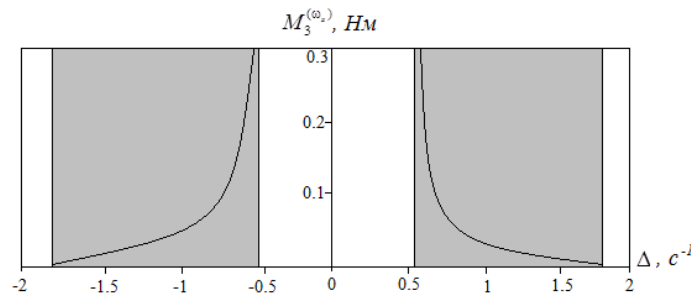
Пусть  $\varepsilon = 0.3$ . На рисунках 1-2 представлено обобщение численных результатов. На рисунке 1 показан наведённый резонансом момент  $M_2^{(\omega_x)}(\Delta)$ , полученный при выполнении условия  $\left| M_{21}^{(\omega_x)} \right| > \left| M_{22}^{(\omega_x)} \right|$ . Две области действия наведенного момента представлены на рисунке 1 в виде серых прямоугольников. Как показано на рисунке 1 при приближении к резонансной области порядка  $\Delta \in [-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}]$  происходит увеличение абсолютной величины момента  $M_2^{(\omega_x)}(\Delta)$ . При этом, на рисунке 1 также показано, что при прохождении через резонансную область наблюдается изменение знака наведенного резонансом момента  $M_2^{(\omega_x)}(\Delta)$ . Из рисунка 1 также следует, что при выполнении условия  $\left| M_{21}^{(\omega_x)} \right| > \left| M_{22}^{(\omega_x)} \right|$ , наведенный момент  $M_2^{(\omega_x)}(\Delta)$  может привести к эволюции усреднённой величины  $\omega_x(t)$  к резонансной области, как при  $\Delta < 0$ , так и при  $\Delta > 0$ .

Как показано на рисунке 2 при приближении к резонансной области порядка  $\Delta \in [-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}]$  также наблюдается увеличение величины наведенного момента  $M_3^{(\omega_x)}(\Delta)$ . Следует отметить, что при проходе через резонансную область в случае выполнения условия  $\left| M_{31}^{(\omega_x)} \right| > \left| M_{32}^{(\omega_x)} + M_{33}^{(\omega_x)} \right|$  не происходит изменения знака момента  $M_3^{(\omega_x)}$ . Кроме того, если  $\Delta < 0$ , то наведённый момент  $M_3^{(\omega_x)}$  может способствовать эволюции усредненной угловой скорости  $\omega_x(t)$  к малой окрестности резонансной области. Однако, при выполнении условия  $\Delta > 0$

наведённый момент  $M_3^{(\omega_x)}$  приводит к медленному удалению усредненной угловой скорости  $\omega_x(t)$  от резонансной области.



**Рисунок 1.** Наведённый момент и его области действия при  $\left| M_{21}^{(\omega_x)} \right| > \left| M_{22}^{(\omega_x)} \right|$ .



**Рисунок 2.** Наведённый момент и его области действия при  $\left| M_{31}^{(\omega_x)} \right| > \left| M_{32}^{(\omega_x)} + M_{33}^{(\omega_x)} \right|$ .

### 6. Заключение

Применение метода усреднения в нерезонансном случае позволило определить приближенные аналитические выражения для нового механического момента, вызванного главным резонансом. При этом наведенные резонансные моменты представляют собой выражения второго и третьего порядка малости. Математическое моделирование наведённых моментов показало, что данные малые моменты могут привести к значительной эволюции угловой скорости в нерезонансном случае. Численные результаты подтвердили данный результат.

Следует отметить, что с практической точки зрения было бы ценно разработать метод, учитывающий наведенные резонансные моменты при управлении ориентацией космического аппарата в атмосфере.

### 7. Литература

- [1] Barinova, E.V. Studying transient motion modes with respect to the landing module angle of attack with the restoring moment triharmonic characteristic on entering the atmosphere / E.V. Barinova, I.A. Timbai // Cosmic Research. – 2015. – Vol. 53(3). – P.246-255.
- [2] Zabolotnov, Yu.M. Statistical analysis of attitude motion of a light capsule entering the atmosphere / Yu.M. Zabolotnov // Cosmic Research.–2013.– Vol. 51(3). – P.213-224.
- [3] Desai, P.N. Entry, descent, and landing performance of the Mars Phoenix lander / P.N. Desai, J.L. Prince, E.M. Queen, M. Schoenenberger, J.R. Cruz, M.R. Grover // Journal of SC and Rockets. – 2011. – Vol. 48(5). – P. 798-808.



- [4] Way, D.W. Assessment of the Mars Science Laboratory entry, descent, and landing simulation / D.W. Way, J.L. Davis, J.D. Shidner // *Advances in the Astronautical Sciences*. – 2013. – Vol. 148. – P. 563-581.
- [5] Lyubimov, V.V. Simulation of the dynamics of non-resonant motion in a controlled descent of an asymmetric SC in the low-density atmosphere / V.V. Lyubimov, E.V. Kurkina // *CEUR Workshop Proceedings*. – 2016. – Vol.1638. – P. 610-621. DOI:10.18287/1613-0073-2016-1638-610-621.
- [6] Lyubimov, V.V. Asymptotic analysis of the secondary resonance effects in the rotation of a SC with small asymmetry in the atmosphere/ V.V. Lyubimov // *Russian Aeronautics*. – 2014. – Vol. 57(3). – P. 245-252.
- [7] Zabolotnov, Yu. M. Secondary resonance effect in the motion of a SC in the atmosphere / Yu.M. Zabolotnov, V.V. Lyubimov // *Cosmic Research*. – 1998. – Vol. 36(2). – P.194-201.
- [8] Sadov, Y.A. Secondary Resonance Effects in Mechanical Systems / Y.A. Sadov // *Mechanics of Solids*. – 1990. – Vol. 4. – P. 20-24.
- [9] Sadov, Y.A. Fast Rotation of a Satellite with Magnetic Damper. 4: Dissipative Evolution. Resonance Effects / Y.A. Sadov // *Cosmic Research*. – 1986. – Vol. 24(4). – P. 553-563.
- [10] Zabolotnov, Yu.M. The resonance motions of a statically stable Lagrange top at small nutation angles / Yu.M. Zabolotnov // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2016. – Vol. 80(4). – P.302-310.
- [11] Kholostova, O.V. Internal resonance in an autonomous Hamiltonian system close to a system with a cyclic coordinate / O.V. Kholostova // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2002. – Vol. 66(3). – P. 357-370.
- [12] Lyubimov, V.V. External stability of a resonance during the descent of a SC with a small variable asymmetry in the martian atmosphere / V.V. Lyubimov, V.S. Lashin // *Advances in Space Research*. – 2017. – Vol. 59(6). – P. 1607-1613.
- [13] Lyubimov, V.V. External stability of resonances in the motion of an asymmetric rigid body with a strong magnet in the geomagnetic field / V.V. Lyubimov // *Mechanics of Solids*. – 2010. – Vol. 45(1). – P. 10-21.
- [14] Lyubimov, V.V. External Stability of a Resonance in a Nonlinear System with Slowly Changing Variables / V.V. Lyubimov // *Mechanics of Solids*. – 2002. – Vol.37(6). – P. 42-47.
- [15] Lyubimov, V.V. Resonant Mechanical Moment During Rotation of the Microsatellite with a Magnet and Flywheels on Board: Features, Time Interval, Measurement Methods / V.V. Lyubimov // *ICINS*. – Proceedings. – 2017. – P. 7995672. DOI:10.23919/ICINS.2017.7995672.
- [16] Shchepakina, E. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications. Lecture Notes in Mathematics 2114 / E. Shchepakina, V. Sobolev, M. P. Mortell. – Cham: Springer International Publishing Switzerland, 2014. – P.212.
- [17] Ярошевский, В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере / В.А. Ярошевский. – М.: Машиностроение, 1978. – 168 с.
- [18] Sanders, J.A. Averaging methods in nonlinear dynamical systems. *Applied Mathematical Sciences* / J.A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock. – New York: Springer-Verlag, 2007. – P.434.
- [19] Моисеев, Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1986. – 380 с.

# Modeling of the Induced Resonant Torques during the Motion of an Asymmetric Spacecraft in the Atmosphere

V.V. Lyubimov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** This paper investigates an uncontrolled motion of an asymmetric spacecraft in the atmosphere. Suppose that the spacecraft is a rigid body with small mass-inertial and small aerodynamic asymmetries. The aim of the research is to study of mathematical models of the small mechanical torques caused by the principal resonance. The proposed study solves the following problems: revealing specific features of the mechanical torque, determining the magnitude of a domain of activity of the torque. The author concludes that the application of the averaging method allows us to research the mechanical torque induced by the resonance. This torque results in a significant angular speed evolution of rotation of a spacecraft in the non-resonance areas adjacent to the resonance.

**Keywords:** Mathematical Model, Resonant Torque, Spacecraft, Atmosphere, Domain.