

# Моделирование процессов управления орбитами космических аппаратов с двигателями малой тяги

В.В. Салмин<sup>1</sup>, К.В. Петрухина<sup>1</sup>, А.А. Кветкин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы разработки и моделирования схем перевода космического аппарата с двигателями малой тяги с высокоэллиптической на геостационарную орбиту. Разработаны алгоритм и программное обеспечение для решения задачи оптимизации перелета между эллиптической и геостационарной орбитами. Приведены примеры моделирования разработанного закона управления для различных видов исходных данных.

## 1. Введение

В настоящее время наиболее распространенной орбитой для размещения спутников связи является геостационарная (ГСО). В большинстве случаев для переводов космических аппаратов (КА) с опорной орбиты на ГСО используются традиционные импульсные схемы, подразумевающие несколько включений маршевого двигателя большой тяги. Однако в течение последних десятилетий исследователи все чаще проявляют интерес к альтернативным схемам перелетов на геостационарную орбиту, в том числе и схемам, подразумевающим использование на космическом аппарате комбинации двигателей большой и малой тяги. Причиной этому послужили успешные примеры использования электрореактивных двигателей на этапах довыведения на геостационарную орбиту космических аппаратов «АЕНФ-1», «Экспресс-АМ5», «SES-9».

Использование на космическом аппарате (КА) комбинации двигателей большой и малой тяги обеспечивает возможность доставки на целевые орбиты КА со значительно большей массой ПН, чем при использовании традиционных средств выведения. Применительно к различным типам космических маневров показано, что повышение эффективности космических аппаратов за счет использования комбинированных схем выведения значительно для перелетов на геостационарную орбиту (ГСО), причем при существенной разнице в наклонениях орбит выведения и геостационарной.

Промежуточная орбита может быть сформирована третьей ступенью ракеты-носителя тяжелого класса («Протон», «Delta-IV», «Arian»). Схему выведения с использованием круговой промежуточной орбиты можно условно назвать традиционной, поскольку рациональная схема выведения и закон управления движением КА с ЭРД в данном случае хорошо исследованы. Использование промежуточных эллиптических орбит в настоящее время исследовано значительно слабее. Наличие дополнительных степеней свободы (величины эксцентриситета и аргумента перигея промежуточной орбиты) дает дополнительные возможности по оптимизации схемы выведения КА на рабочую орбиту. Исследования показывают, что

использование эллиптической промежуточной орбиты для многих проектов выведения КА на ГСО значительно эффективнее, чем использование круговых промежуточных орбит. Более того, оптимальное значение эксцентриситета промежуточной орбиты может быть достаточно велико (достигать значения 0,7 и даже больше), поэтому можно говорить о схеме выведения на высокую рабочую орбиту с использованием высокоэллиптической промежуточной орбиты.

### 2. Факторы, учитываемые при моделировании управляемого движения КА

Космические аппараты с электрореактивными двигателями могут иметь весьма большую протяжённость активных участков, измеряемых сутками, месяцами, поэтому анализ активного участка полета аппаратов с ЭРД проводится на основе исследования полной математической модели в оскулирующих элементах, где тяга рассматривается как возмущающая сила [4]:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{2p}{(1-e)^2} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot [e \sin \vartheta \cdot S + (1 + e \cos \vartheta) \cdot T], \\ \frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[ \sin \vartheta \cdot S + \frac{e \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta + e}{1 + e \cos \vartheta} \cdot T \right], \\ \frac{di}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \frac{\cos u}{1 + e \cos \vartheta} \cdot W, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \left[ -\cos \vartheta \cdot S + \frac{\sin \vartheta (2 + e \cos \vartheta)}{1 + e \cos \vartheta} \cdot T - \frac{e \sin u \cdot \operatorname{ctgi}}{1 + e \cos \vartheta} \cdot W \right] \\ \frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \frac{\sin u}{\sin i (1 + e \cos \vartheta)} \cdot W, \\ \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{p^2} \cdot \left[ (1 + e \cos \vartheta)^2 - \frac{p^2}{(1 + e \cos \vartheta) \mu} \cdot \operatorname{ctgi} \cdot \sin u \cdot W \right], \end{cases}$$

где  $p = A(1 - e^2)$  - фокальный параметр;  $\vartheta = u - \omega$  - истинная аномалия;  $e$  - эксцентриситет;  $\omega$  - угловое расстояние перицентра от узла;  $\Omega$  - долгота восходящего узла;  $i$  - наклонение орбиты;  $\tau$  - время прохождения через перицентр;  $t$  - время;  $\vartheta$  - истинная аномалия;  $u$  - аргумент широты;  $S, T, W$  - проекции реактивного ускорения на направление радиуса-вектора, на перпендикулярное к нему в плоскости орбиты и на перпендикулярное к плоскости орбиты;  $\mu = fM$  – произведение гравитационной константы на массу притягивающего центра.

Также на начальном этапе перелета при низком значении перигея промежуточной орбиты целесообразно учитывать возмущения, вызываемые действием атмосферы и нецентральной гравитационного поля Земли.

### 3. Постановка задачи оптимизации и способы ее решения

Сформулируем задачу об оптимальном изменении большой полуоси, эксцентриситета и наклонения, минимизирующем невязки по этим элементам.

В качестве математической модели движения КА с ЭРДУ возьмем систему дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах.

Как известно, эта система уравнений имеет особенности при  $e=0$  и  $i=0$ . На практике наиболее распространенным приемом является переход к равноденственным элементам. В данном же случае при моделировании движения КА с ЭРДУ обычная система дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах является более предпочтительной, поэтому перед интегрированием будем задавать фиксированные конечные значения эксцентриситета и наклонения, отличные от нуля и соответствующие требуемой точности решения задачи.

Введем две правые системы координат: орбитальную ( $O_{nrb}$ ) и связанную с КА ( $OXYZ$ ). Вектор тяги  $\vec{P}$  направлен вдоль оси  $OX$ .

Запишем выражения для компонент реактивного ускорения в орбитальной системе координат:

$$T = \delta a \cos \lambda \cos \psi, \quad S = \delta a \sin \lambda \cos \psi, \quad W = \delta a \sin \psi. \tag{1}$$

Здесь  $a$  - модуль полного реактивного ускорения ( $a = \frac{a_0}{1 - a_0 t / c}$ ),  $\delta$  - функция включения-выключения двигателей ( $\delta = \{0, 1\}$ );  $\lambda$  - угол ориентации вектора тяги в плоскости орбиты ( $\lambda \in [0^\circ; 180^\circ]$ );  $\psi$  - угол ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта ( $\psi \in [-90^\circ; 90^\circ]$ ) (рис. 1). Очевидно, что минимальное время перелета достигается при постоянной работе двигателя ( $\delta \equiv 1$ ) с переключениями компонент реактивного ускорения.

При выполнении плоских маневров (изменении большой полуоси и эксцентриситета орбиты) основной вклад вносит трансверсальная составляющая реактивного ускорения  $T$ , а при управлении наклонением орбиты используется только бинормальная компонента  $W$ , знак которой дважды меняется на витке.

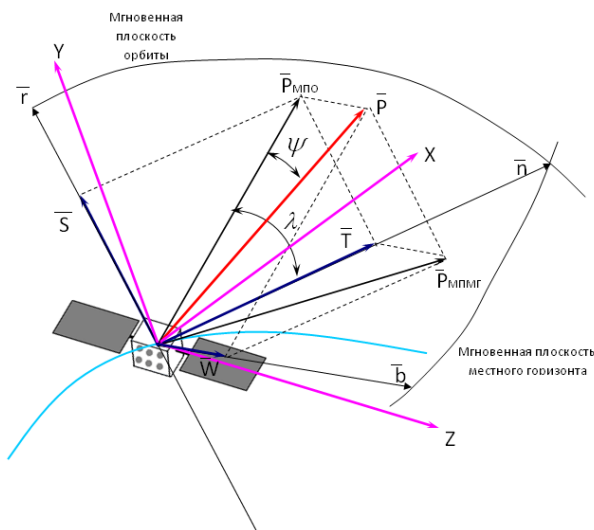


Рисунок 1. К определению углов ориентации вектора тяги КА с ЭРДУ.

Запишем граничные условия:

$$\begin{matrix} t = t_0 & t = t_K \\ A(t_0) = A_0 & A(t_K) = A_K \\ e(t_0) = e_0 & e(t_K) = e_K \\ i(t_0) = i_0 & i(t_K) = i_K \end{matrix} \rightarrow \tag{2}$$

Расширим множество допустимых режимов. Условия на переменные  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $u$ , не накладываются, поэтому уравнения  $\frac{d\omega}{dt}$ ,  $\frac{d\Omega}{dt}$ ,  $\frac{du}{dt}$  могут быть исключены из математической модели вариационной задачи, но учитываться в ходе дальнейшего моделирования. Этот прием позволяет получить предельную оценку критерия оптимальности динамической задачи – моторного времени перелета (совпадающего с общей продолжительностью при  $\delta \equiv 1$ ).

Введем терминальный критерий в виде квадратичного функционала, представляющий собой сумму квадратов невязок по большой полуоси, эксцентриситету и наклонению орбиты, умноженные на соответствующие им весовые (неопределенные) коэффициенты:

$$I = \Delta x_K^T \alpha \Delta x_K \rightarrow \min, \tag{3}$$

где  $\Delta x_K = [\Delta A, \Delta e, \Delta i]^T$ .

Здесь  $\Delta A = A(t) - A_K$ ,  $\Delta e = e(t) - e_K$ ,  $i = i(t) - i_K$ .

$$\alpha = [\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}, \quad \sum \alpha_{ij} = 1,$$

где  $\alpha_A = \alpha_{11}$ ,  $\alpha_e = \alpha_{22}$ ,  $\alpha_i = \alpha_{33}$  - весовые коэффициенты (элементы диагональной матрицы) по большой полуоси, эксцентриситету и наклонению соответственно [5].

### 3.1 Методика, основанная на принципе максимума Л.С. Понтрягина

Решение вариационной задачи будем проводить в соответствии с принципом максимума Л.С.Понтрягина [6] при условии, что ЭРДУ работает без выключений ( $\delta \equiv 1$ ), поскольку в этом случае обеспечивается минимум общей продолжительности перелета.

В результате решения задачи в соответствии с принципом максимума Л.С. Понтрягина получены аналитические уравнения для углов ориентации вектора тяги.

Применение принципа максимума позволяет свести оптимизационную задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи оптимального управления элементами орбиты в строгой постановке, вытекающей из формализма Лагранжа – Понтрягина, связано с большими вычислительными трудностями, кроме того, на первый план выходит проблема сходимости и устойчивости алгоритма решения краевой задачи и единственности решения. Поэтому исходная задача расширялась до задачи локальной оптимизации.

### 3.2 Методика локальной оптимизации. Условия применимости. Оценка проигрыша.

Локально-оптимальными управлениями в дальнейшем будем называть такие управления  $\tilde{u}(t, x)$ , которые минимизируют не функционал динамической задачи  $I$  (интегральный), а подынтегральное выражение, то есть производную  $\frac{dI}{dt}$  в каждый момент времени. Если подынтегральное выражение не меняет знака и представляет собой монотонную функцию, описанная постановка эквивалентна исходной [7].

В общем случае синтез локально-оптимальных управлений не гарантирует абсолютного оптимума в исходной постановке задачи, однако, существует класс задач, содержащих малый параметр (в частности, реактивное ускорение, создаваемое ЭРД), в которых локально-оптимальные управления тем ближе к оптимальным, чем меньше малый параметр, т.е. чем слабее корректирующее управление.

Будем искать локально-оптимальный закон управления, обеспечивающий совместное изменение большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты.

Потребуем монотонного изменения большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты, тогда поставленную задачу отыскания законов управления ориентацией вектора тяги КА с ЭРДУ можно свести к задаче выбора локально-оптимального закона с последующей проверкой условия монотонности функционала.

Проведем отыскание локально-оптимального закона совместного управления большой полуосью, эксцентриситетом и наклоном орбиты, обеспечивающий минимум функционала  $I$ , определяемого выражением (3), при заданных начальных условиях.

Заменим этот функционал локальным критерием, обеспечивающим максимальную скорость изменения  $I$ :

$$\frac{dI}{dt} = 2\alpha_1 \left( \frac{A}{A_0} - \frac{A_k}{A_0} \right) \cdot \frac{1}{A_0} \frac{dA}{dt} + 2\alpha_2 e \frac{de}{dt} + 2\alpha_3 i \frac{di}{dt} \rightarrow \max \tag{4}$$

Результатом поиска максимума выражения (4) по двум переменным  $\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt}(\lambda(t), \psi(t)) \rightarrow \max$  являются аналитические выражения для углов ориентации вектора тяги  $\lambda$  и  $\psi$ , где  $\psi$  - угол отклонения тяги от мгновенной плоскости орбиты,  $\lambda$  - угол между проекцией вектора тяги на плоскость орбиты и трансверсалью.

Полученный закон управления  $\tilde{\psi}(t), \tilde{\lambda}(t)$  имеет достаточно простую структуру и позволяет провести расчет динамического манёвра без процедуры решения краевой задачи.

Как следует из (4), от значений весовых коэффициентов  $\alpha_A, \alpha_e, \alpha_i$  зависит скорость изменения большой полуоси, эксцентриситета и наклона орбиты.

За счет подбора значений весовых коэффициентов можно контролировать скорость изменения элементов орбиты и добиться одновременности выполнения конечных условий.

В первом приближении можно принять  $\alpha_A = \alpha_e = \alpha_i$ .

Проводилось сравнение результатов, полученных с использованием законов локально-оптимального управления, с результатами точного решения задач перелёта между некомпланарными орбитами (В. Н. Лебедев). Оказалось, что для широкого диапазона граничных условий результаты решений отличаются не более чем на 1,5...2%, что позволяет рассматривать локально-оптимальные управления в качестве хорошего начального приближения для решения вариационных задач механики полёта с малой тягой.

#### 4. Алгоритм и ПО решения задачи оптимизации перелета между эллиптической и геостационарной орбитами

Ниже приведены результаты расчетов выведения тяжелого геостационарного спутника связи (типа «Экспресс АМ-5», «AMOS-6»), имеющего в своем составе электроракетную двигательную установку. Исходный эллипс формируется мощным импульсом 3-ей ступени тяжелой ракеты-носителя. Исходные данные для перелета приведены в таблице 1.

**Таблица 1.** Исходные данные, где  $H_p$ - высота перигея;  $H_a$ - высота апогея;  $i$ - наклонение орбиты;  $m_0$ - стартовая масса КА;  $m_{сух}$ - сухая масса КА;  $P$ - тяга двигателя;  $I_{уд}$ - удельный импульс.

| $H_p$ , км | $H_a$ , км | $i$ , град. | $m_0$ , кг | $m_{сух}$ , кг | $P$ , мН | $I_{уд}$ , сек. |
|------------|------------|-------------|------------|----------------|----------|-----------------|
| 200        | 80000      | 28          | 3500       | 2600           | 360      | 1600            |
| 200        | 80000      | 51.6        | 3500       | 2600           | 360      | 1600            |

Время достижения необходимого значения каждого элемента орбиты, приведены в таблице 2.

**Таблица 2.** Конечные элементы орбиты, где  $e$ - эксцентриситет;  $R_p$ - радиус перигея;  $R_a$ - радиус апогея;  $A$ - большая полуось;  $p$ - фокальный параметр.

| $i$ , град | Элемент орбиты | Необходимое значение | Время достижения необходимого значения |
|------------|----------------|----------------------|--|
| 28         | $e$            | 0                    | 287.2                                  |
|            | $A$ , км       | 42164                | 289.5                                  |
|            | $i$ , град.    | 0                    | 289                                    |
|            | Невязка        | 0                    | $<10^{-4}$ к 282.2                     |
| 51.6       | $e$            | 0                    | 323,7                                  |
|            | $A$ , км       | 42164                | 327.4                                  |
|            | $i$ , град.    | 0                    | 326                                    |
|            | Невязка        | 0                    | $<10^{-4}$ к 318                       |

Масса рабочего тела, затраченного на перелет в случае с  $i=28^\circ$ , составила 552.9 кг. С наклоном равным  $51.6^\circ$  масса рабочего тела на перелет составляет 618.1 кг.

Также в результате расчета двух перелетов были подобраны весовые коэффициенты по правилу одновременного времени достижения элементами орбиты своих конечных значений; они приведены в таблице 3.

**Таблица 3.** Значения весовых коэффициентов.

| Весовой коэффициент | i, град |      |
|---------------------|---------|------|
|                     |         | 28   |
| e                   | 0.1     | 0.15 |
| A                   | 0.5     | 0.4  |
| i                   | 0.4     | 0.45 |

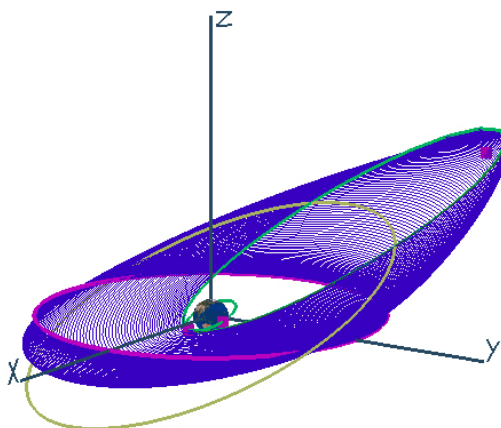
Разное время достижения элементами орбиты необходимого значения обусловлено неточностью подбора весовых коэффициентов. При необходимости меньшей разницы по времени установления элементов орбиты можно провести итерационный подбор весовых коэффициентов.

В ходе моделирования полета КА с учетом воздействия атмосферы Земли выяснено, что её воздействие очень мало, так как КА выходит из действия атмосферы уже через несколько витков и находится в ней короткий промежуток времени. В обоих случаях учет атмосферы увеличивает время перелета не более чем на 1 час. Столь небольшое влияние объясняется тем, что сила аэродинамического сопротивления  $F_A$  в нижней точке траектории (наиюольшее сопротивление на 1-м витке) примерно равна силе тяги  $F_T$  ( $F_A=320$  мН,  $F_T=360$  мН), а длительность и протяженность участка воздействия крайне мала (рисунок 2). За счет этого высота перигея орбиты выходит за пределы действия атмосферы за 3-4 витка.

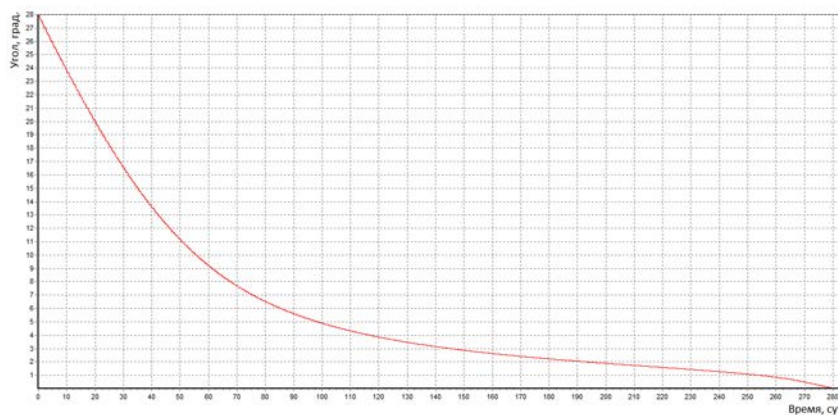


**Рисунок 2.** Полет КА в зоне воздействия атмосферы.

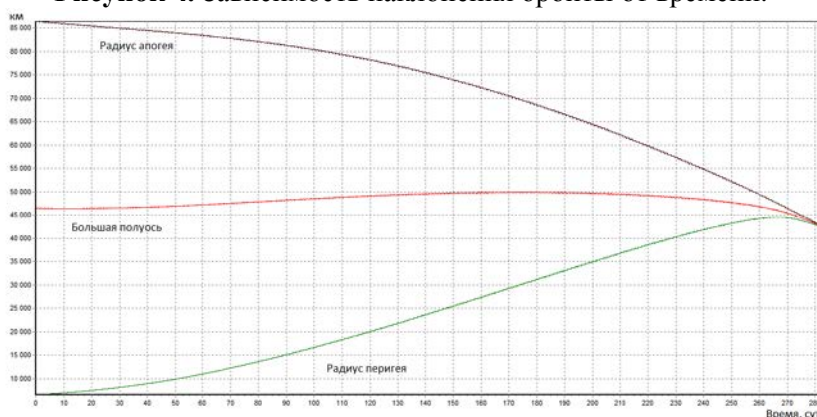
В результате моделирования были получены следующие зависимости от времени (для  $i=28^\circ$ ) (рисунок 3).



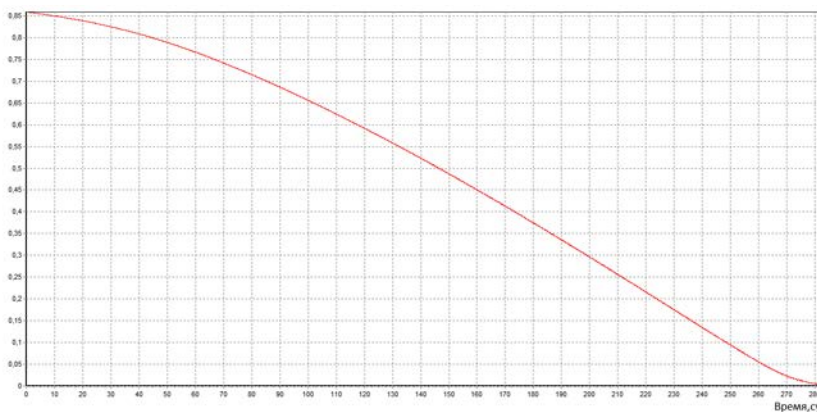
**Рисунок 3.** Траектория пространственного движения КА.



**Рисунок 4.** Зависимость наклона орбиты от времени.



**Рисунок 5.** Зависимость изменения радиуса апогея, большой полуоси и радиуса перигея от времени.



**Рисунок 6.** Зависимость эксцентриситета орбиты от времени.

В период от 0 до 200 суток полета видно постепенное монотонное уменьшение положительных амплитудных значений отклонения вектора  $\lambda$  от  $70^\circ$  до  $7^\circ$  связанное с увеличением большой полуоси. В период с 200 суток до 280 размер большой полуоси начинает сначала медленно, а с 260 суток резко убывать, с чем связано возрастание угла  $\lambda$  до  $85^\circ$ . Несимметричность относительно нуля связана с высоким значением эксцентриситета начальной орбиты.

На рисунке 8 видно, что на протяжении всего полета угол  $\psi$  меняется в пределах от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$  градусов, причем смена направления ориентации вектора изменяется 2 раза за виток.



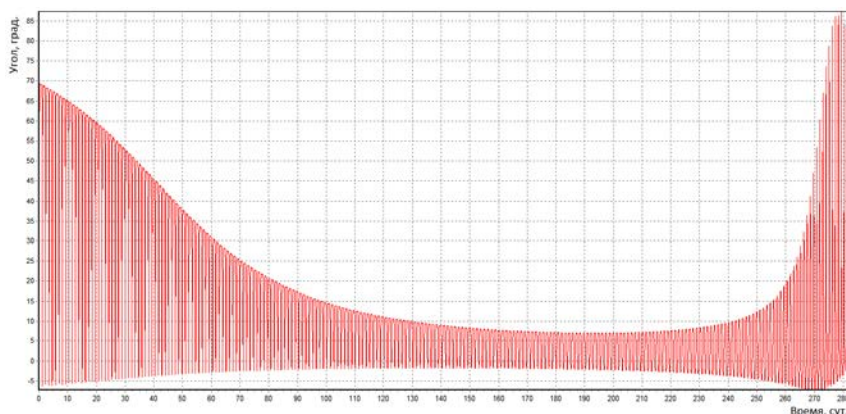


Рисунок 7. Зависимость управляющего угла  $\lambda$  от времени.

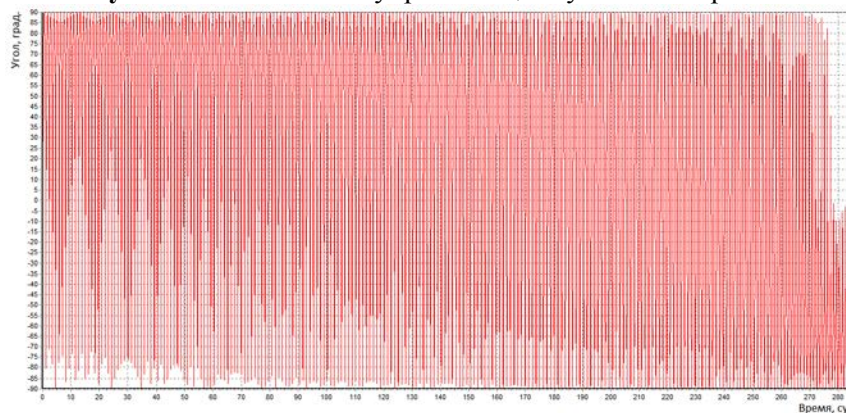


Рисунок 8. Зависимость управляющего угла  $\psi$  от времени.

Моделирование показало, что производная функционала не меняет свой знак, а сам функционал монотонно убывает до нуля, минимизируя невязки по большой полуоси, эксцентриситету и наклонению орбиты.

На рисунке 9 представлен вид главного окна программы для расчета и моделирования межорбитальных переходов.

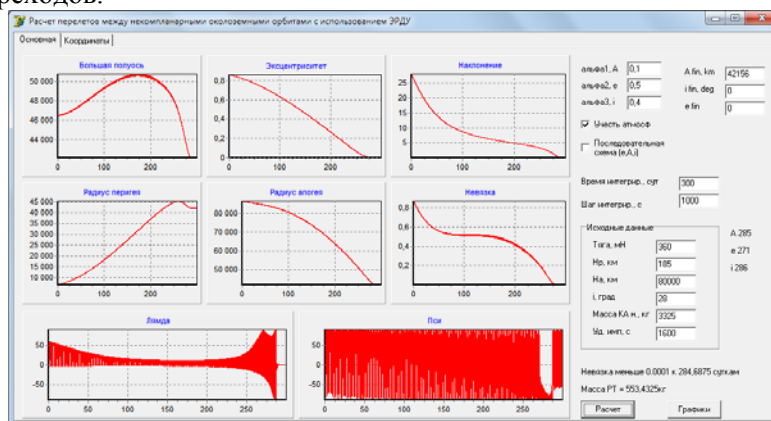


Рисунок 9. Вид главного окна программы, применительно к расчету перелетас высокоэллиптической орбиты на геостационарную.

### 5. Заключение

Получен закон управления орбитой КА с малой тягой, имеющий достаточно простую структуру и позволяющий проводить расчеты динамических манёвров без процедуры решения краевой задачи.



Проведено математическое моделирование межорбитальных перелётов между произвольными некомпланарными орбитами в широком диапазоне граничных условий. Проведён качественный анализ изменения элементов орбиты, углов ориентации вектора тяги КА с ЭРДУ для локально-оптимальной схемы управления элементами орбиты на примере расчёта выведения тяжёлого геостационарного спутника связи (типа «Экспресс АМ-5», «АМОС-6»), имеющего в своем составе электроракетную двигательную установку.

Предложен регулярный алгоритм решения динамической задачи оптимизации для произвольных граничных условий, позволивший сформировать блок расчёта динамической характеристики перелётов с малой тягой в общей схеме оптимизации баллистических и проектных параметров.

Разработан интерактивный исследовательский программно-методический комплекс расчёта проектно-баллистических характеристик перелёта и графической визуализации схемы движения космического аппарата с малой тягой.

## 6. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (Соглашение № 14.578.21.0229, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57817X0229).

## 7. Литература

- [1] Полярный, П. Спасение АЕНФ-1 / П. Полярный // Новости космонавтики. – 2011. – Т. 21, №12. – С. 47.
- [2] Официальный сайт АО «Информационные Спутниковые Системы» имени академика М.Ф. Решетнёва» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.iss-reshetnev.ru/media/news/news-110314>.
- [3] Черный, И. С пятой попытки / И. Черный // Новости космонавтики. – 2016. – Т. 26, № 5.
- [4] Лебедев, В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой / В.Н. Лебедев. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 108 с.
- [5] Петрухина, К.В. Оптимизация баллистических схем перелётов между некомпланарными орбитами с помощью комбинации двигателей большой и малой тяги / К.В. Петрухина, В.В. Салмин // Вестник Самарского научного центра РАН. – 2010. – Вып. 4. – С. 186-201.
- [6] Petukhov, V.G. Optimization of Multi-Orbit Transfers between Noncoplanar Elliptic Orbits / V.G. Petukhov // Cosmic Research. – 2004. – Vol. 42(3). – P. 260-279.
- [7] Моисеев, Н.Н. Элементы теории оптимальных систем / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1975. – 528 с.

# Modeling of control processes of spacecraft orbits with low-thrust engines

V.V. Salmin<sup>1</sup>, K.V. Petrukhina<sup>1</sup>, A.A. Kvetkin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoyehosse, 34, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** The issues of development and modeling of the spacecraft transfer schemes with low-thrust engines from a high-elliptical to a geostationary orbit are considered. An algorithm and software are developed to solve the problem of flight optimization between elliptical and geostationary orbits. Examples of modeling of the developed control law for different types of source data are given.

**Keywords:** modeling; low-thrust electric propulsion engine, geostationary orbit, thrust vector orientation angles, terminal criterion, locally optimal control law.