

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

М.С. Кириленко

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия,  
Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия

Рассмотрен оператор распространения оптического пучка через турбулентную среду с помощью аппроксимации Френеля. Корреляционная функция случайного поля, описывающего неоднородную среду, задана в виде Гауссовой функции. Продемонстрирован процесс моделирования случайного поля с помощью преобразования Фурье. Рассчитана выборочная корреляционная функция, определено отклонение от заданной. Приведены графики интенсивности после распространения оптических пучков в свободном пространстве и в случайной среде. В качестве входного пучка были рассмотрены такие оптические распределения, как моды Эрмита-Гаусса и прямоугольный импульс.

**Ключевые слова:** турбулентная среда, случайное поле, преобразование Фурье, преобразование Френеля, моды Эрмита-Гаусса, распространение лазерных пучков

## Введение

Распространение оптического сигнала в свободном пространстве может быть подвержено искажениям, связанным с турбулентностью среды [1, 2]. Из-за свойств турбулентности случайные изменения атмосферного показателя преломления могут стать причиной искажения интенсивности лазерного излучения. Классические методы описания распространения волны через турбулентную атмосферу основаны на применениях метода Рытова [3] и метода параболических уравнений [4], связь между которыми была продемонстрирована ранее [5]. С помощью этих методов было исследовано распространение оптических сигналов от частично-когерентного источника [6, 7], а также изучены особенности распространения в турбулентной среде таких лазерных пучков, как гиперболические косинусоидальные пучки Эрмита и Гаусса [8, 9, 10], синусоидальные пучки Эрмита-Гаусса [11] и другие.

В данной работе рассматривается моделирование произвольных оптических пучков через турбулентную атмосферу с заданной корреляционной функцией в виде функции Гаусса.

## 1. Прохождение через турбулентную атмосферу

Распространение лазерного пучка через турбулентную атмосферу для одномерного случая может быть описано с помощью приближения Френеля для среды со случайными неоднородностями [12]:

$$F(u, z) = \sqrt{\frac{-ik}{2\pi z}} \exp(ikz) \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp[\psi(x, u, z)] \exp\left[-\frac{ik}{2z}(x^2 - 2xu + u^2)\right] dx, \quad (1)$$

где  $f(x) = F(x, 0)$  – входное оптическое распределение,  $F(u, z)$  – выходное распределение,  $z$  – дальность распространения,  $k$  – волновое число,  $\psi(x, u, z)$  – случайная комплексная фаза, полученная с помощью метода Рытова.

Отметим, что подобным образом комплексную фазу можно внедрить и в другие интегральные преобразования, например, в дробное преобразование Фурье [13], описывающее распространение оптического сигнала в параболическом волокне [14, 15].

Известна корреляционная функция случайного поля:

$$\begin{aligned} R\left\{\exp\left[\psi\left(x_1, u_1, 0\right)\right], \exp\left[\psi\left(x_2, u_2, z\right)\right]\right\} = \\ = \exp\left[-\frac{1}{\rho_0^2(z)}\left(x_1 - x_2\right)^2\right] = R_{\exp[\psi]}\left(x_1 - x_2, z\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho_0(z) = \left(0,545 C_n^2 k^2 z\right)^{-3/5}$  – длина когерентности распространения сферической волны через турбулентную атмосферу,  $C_n^2$  – структурная постоянная среды. Отметим, что данная корреляционная функция зависит от разности между координатами  $x_1$  и  $x_2$ , а не от каждой из них по отдельности. Более того, она не зависит от координат в выходной плоскости  $u_1$  и  $u_2$ , а зависит лишь от расстояния  $z$  до неё.

Будем считать, что средняя интенсивность гауссова пучка, проходящего через турбулентную атмосферу, сохраняется, а для этого зададим среднюю амплитуду случайного поля равной единице:

$$\left\langle \exp\left[\psi\left(x, u, z\right)\right] \right\rangle = 1. \quad (3)$$

## 2. Генерация случайного поля

Для упрощения будем рассматривать случайное поле с нулевым математическим ожиданием, т.е. поле вида:

$$U\left(x, u, z\right) = \exp\left[\psi\left(x, u, z\right)\right] - \left\langle \exp\left[\psi\left(x, u, z\right)\right] \right\rangle, \quad (4)$$

так как после его моделирования легко получить желаемую выборку:

$$\exp\left[\psi\left(x, u, z\right)\right] = U\left(x, u, z\right) + \left\langle \exp\left[\psi\left(x, u, z\right)\right] \right\rangle. \quad (5)$$

Корреляционная функция при этом не изменится:

$$R_{\exp[\psi]}\left(x_1 - x_2, z\right) = R_U\left(x_1 - x_2, z\right) = R_U\left(x, z\right). \quad (6)$$

Опустим все переменные, кроме  $x$ , и предположим, что требуемое случайное поле  $U(x)$  может быть получено через прохождение комплекснозначного белого шума  $\xi(x)$  с единичной дисперсией и корреляционной функцией, равной дельта-функции Дирака  $\delta(x)$  через линейный фильтр:

$$U(x) = h(x) * \xi(x), \quad (7)$$

где звёздочкой \* обозначена операция свёртки,  $h(x)$  – детерминированная функция (импульсная характеристика). Тогда задача генерации сводится к отысканию функции  $h(x)$ .

По определению корреляционная функция  $U(x)$  равна:

$$\begin{aligned} R_U(x) &= \langle U(x+x')U^*(x') \rangle = \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)\xi(x+x'-\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\beta)\xi^*(x'-\beta)d\beta \right\rangle = \\ &= \iint_{\square^2} h(\alpha)h^*(\beta) \langle \xi(x+x'-\alpha)\xi^*(x'-\beta) \rangle d\alpha d\beta = \\ &= \iint_{\square^2} h(\alpha)h^*(\beta)R_\xi(x-\alpha+\beta)d\alpha d\beta = \\ &= \iint_{\square^2} h(\alpha)h^*(\beta)\delta(x-\alpha+\beta)d\alpha d\beta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x+\beta)h^*(\beta)d\beta. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, мы получаем, что корреляционная функция  $R_U(x)$  может быть определена как автокорреляция функции  $h(x)$ :

$$R_U(x) = h(x) \epsilon h(x), \quad (9)$$

где звёздочкой  $\epsilon$  обозначена операция взаимной корреляции. Используя преобразование Фурье, получаем:

$$F [R_U(x)] = |F [h(x)]|^2, \quad (10)$$

откуда:

$$F [h(x)] = \sqrt{F [R_U(x)]}. \quad (11)$$

Последняя формула даёт возможность отыскать функцию  $h(x)$ , используя обратное преобразование Фурье. Однако, для расчётов по формуле (7) проще всего вновь воспользоваться преобразованием Фурье, чтобы избежать операции свёртки:

$$\begin{aligned} U(x) &= F^{-1} [F [h(x')]F [\xi(x')]] = \\ &= F^{-1} [\sqrt{F [R_U(x')]F [\xi(x')]}]. \end{aligned} \quad (12)$$

Моделирование случайного поля  $U(x)$  может быть реализовано по формуле (12) с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье. Отметим, что преобразование Фурье от белого шума также будет являться белым шумом.

### 3. Моделирование распространения

В процессе моделирования использовались следующие параметры: длина волны  $\lambda = 2\pi/k = 633\text{нм}$ , ширина входной области  $[-a; a] = [-60\text{мм}; 60\text{мм}]$ , структурная постоянная  $C_n^2 = 10^{-15} \text{м}^{-2/3}$ . Формулы преобразования Френеля (1) и генерации случайного поля (12) были реализованы с помощью быстрого преобразования Фурье.

Входное оптическое распределение проходит последовательно 6 раз через преобразование Френеля (1) при  $z=10\text{м}$ ; таким образом, поле распространяется на протяжении 60 метров.

Отметим, что прохождение на 60 метров с помощью только одного преобразования не меняет общей картины, поскольку случайное поле имеет корреляционную функцию, зависящую от дальности распространения.

На рисунках 1а, 1б приведён пример генерации случайного поля в области  $[-250\text{мм}; 250\text{мм}]$ .

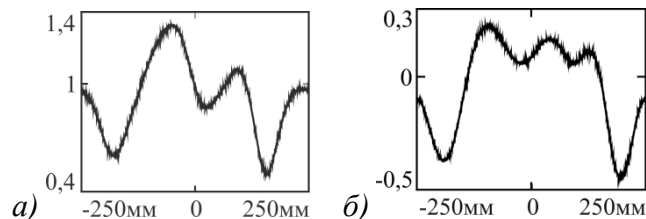


Рис. 1. Пример случайного поля: амплитуда (а) и фаза (б)

Вид корреляционной функции и выборочной корреляционной функции показан на рисунке 2.

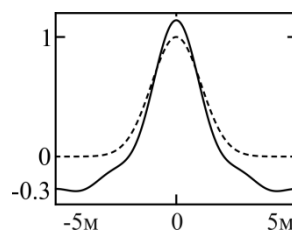


Рис. 2. Выборочная корреляционная функция (сплошная линия) в сравнении с заданной (пунктирная линия)

В качестве входного пучка рассматриваются функция Гаусса  $f_1(x)$  (мода Эрмита-Гаусса нулевого порядка), мода Эрмита-Гаусса  $f_2(x)$  четвертого порядка и прямоугольная функция  $f_3(x)$ :

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \exp(-x^2 / 2\sigma^2), \\
 f_2(x) &= \exp(-x^2 / 2\sigma^2) H_4(x / \sigma), \\
 f_3(x) &= \text{rect}(x / 2\gamma) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \gamma, \\ 0, & |x| > \gamma, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{13}$$

где  $\sigma = 1\text{мм}$ ,  $\gamma = 30\text{мм}$ ,  $H_4(x / \sigma)$  – четвертый многочлен Эрмита.

Результаты изображены на рисунках 3, 4 и 5, соответственно, в сравнении с распространением поля в свободном пространстве без неоднородностей.

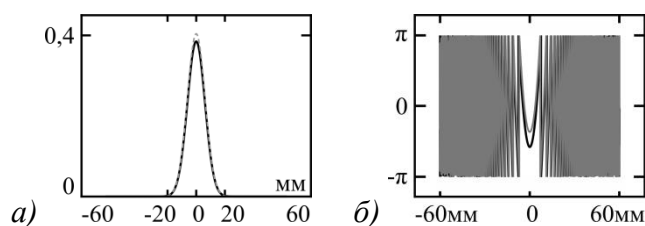


Рис. 3. Распространение пучка Гаусса в свободном пространстве (серый график) и в турбулентной среде (чёрный график): амплитуда (а) и фаза (б)

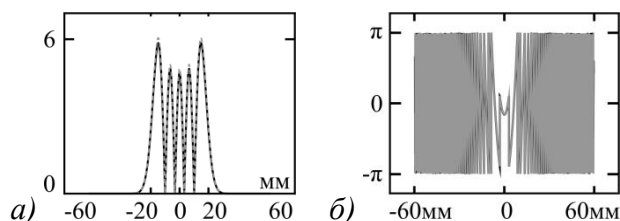


Рис. 4. Распространение моды Эрмита-Гаусса в свободном пространстве (серый график) и в турбулентной среде (чёрный график): амплитуда (а) и фаза (б)

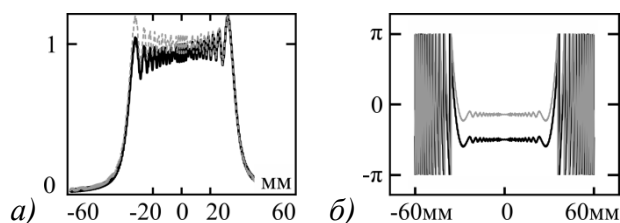


Рис. 5. Распространение прямоугольного сигнала в свободном пространстве (серый график) и в турбулентной среде (чёрный график): амплитуда (а) и фаза (б)

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, а также гранта РФФИ №16-07-00825.

## Литература

1. Grabner, M. Measurement of the structure constant of refractivity at optical wavelengths using a Scintillometer / M. Grabner, V. Kvicera // Radioengineering. – 2012. – Vol. 21(1). – P. 455-458.
2. Majumdar, A.K. Free-space laser communications: principles and advances, Vol. 2. / A.K. Majumdar, J.C. Ricklin. – New York: Springer Science & Business Media, 2008. – 418 p.
3. Tatarskii, V.I. Wave Propagation in a Turbulent Medium / V. I. Tatarskii. – New York: McGraw-Hill, 1961. – 285 p.
4. Tatarskii, V.I. The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation / V.I. Tatarskii. – Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1971. – 472 p.
5. Manning, R. M. The relationship between the solutions of the parabolic equation method and first Rytov approximation in stochastic wave propagation theory / R.M. Mannin // Waves in Random and Complex Media. – 2008. – Vol. 18(4). – P. 615-621.
6. Ricklin, J.C. Atmospheric turbulence effects on a partially coherent Gaussian beam: implications for free-space laser communication / J.C. Ricklin, F.M. Davidson // Journal of the Optical Society of America A. – 2002. – Vol. 19(9). – P. 1794-1802.
7. Wang, S.C.H. Optical beam propagation for a partially coherent source in the turbulent atmosphere / S.C.H. Wang, M.A. Plonus // Journal of the Optical Society of America A. – 1979. – Vol. 69(9). – P. 1297- 1304.

8. Eyyubođlu, H.T. Propagation of Hermite-cosh-Gaussian laser beams in turbulent atmosphere / H.T. Eyyubođlu // Optics communications. – 2005. – Vol. 245(1). – P. 37-47.
9. Eyyubođlu, H.T. Average intensity and spreading of cosh-Gaussian laser beams in the turbulent atmosphere / H.T. Eyyubođlu, Y. Baykal // Applied optics. – 2005. – Vol. 44(6). – P. 976-983.
10. Zhou, G. Propagation of a higher-order cosh-Gaussian beam in turbulent atmosphere / G. Zhou // Optics express. – 2011. – Vol. 19(5). – P. 3945-3951.
11. Baykal, Y. Correlation and structure functions of Hermite-sinusoidal-Gaussian laser beams in a turbulent atmosphere / Y. Baykal // Journal of the Optical Society of America A. – 2004. Vol. 21(7). – P. 1290-1299.
12. Feizulin, Z.I. Broadening of a laser beam in a turbulent medium / Z.I. Feizulin, Y.A. Kravtsov // Radiophysics and Quantum Electronics. – 1967. – Vol. 10(1). – P. 33-35.
13. Namias, V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics / V. Namias // Journal of the Institute of Mathematics and its Applications. – 1980. – Vol. 25. – P. 241-265.
14. Стрилец, А.С. Согласование и исследование методов, основанных на дифференциальном и интегральном операторах распространения лазерного излучения в среде с малыми неоднородностями / А.С. Стрилец, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2008. – № 32, Т. 1. – С. 3-38.
15. Кириленко, М.С. Вычисление собственных функций ограниченного дробного преобразования Фурье / М.С. Кириленко, Р.О. Зубцов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, №3. – 332-338.