

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД НА ОСНОВЕ ДРОБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Р.О. Зубцов¹, М.С. Кириленко^{1,2}

¹Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет),

²Институт систем обработки изображений РАН

Смоделировано распространения светового пучка через параболическую среду. Для моделирования были рассмотрены 5 методов, 3 из которых реализованы в среде Matlab. Численно рассчитаны собственные функции преобразования. Проведено их сравнение с аналитическими собственными функциями для случая бесконечной прямой.

Дробное преобразование Фурье (ДрПФ) относится к семейству линейных преобразований, обобщающих преобразование Фурье. Преобразование Фурье обычно интерпретируют как переход из временной области сигнала в его частотную область.

Каноническое ДрПФ рассмотрено в работе [1] как преобразование Фурье степени α , где α – действительное число. Также можно рассматривать ДрПФ как операцию вращения частотно-временного распределения (функции Вигнера) на некоторый угол [2].

Изначально ДрПФ применялось в области квантовой механики. Однако в последнее время оно привлекло повышенное внимание исследователей в оптике, в результате чего были выполнены обширные исследования по его свойствам, оптической реализации и потенциальных приложениях в оптике. Таким образом, в настоящее время ДрПФ активнее используется в оптической обработке информации [3]. Кроме того, что дробное преобразование является удобным инструментом при описании различных явлений в оптике и квантовой механике, дробление некоторого преобразования даёт новую степень свободы (порядок дробления), которая может быть использована для более полного описания объекта/сигнала или как дополнительный кодирующий параметр.

ДрПФ применяется при решении дифференциальных уравнений, в квантовой механике и квантовой оптике, в оптической теории дифракции, в описании оптических систем и оптической обработке сигналов, включая применение частотных фильтров, временной фильтрации и мультиплексирования, а также при распознавании образов, в вейвлет-преобразованиях, при операциях над chirp-функциями, при кодировании, создании нейронных сетей и др. Подробный обзор приложений можно найти в работе Т. Алиевой с соавторами [3].

Среди методов оптической реализации ДрПФ можно назвать модульную линзовую систему, систему из нескольких сферических и/или цилиндрических линз [4–8]. Некоторые из таких систем, особенно с цилиндрическими линзами, используются для астигматического преобразования с целью формирования вихревых пучков [5, 8–10].

Одним из приложений ДрПФ является моделирование распространения светового излучения в средах с градиентным показателем преломления [11, 12].

В данной работе применяется одномерное ДрПФ для моделирования распространения оптических сигналов в оптическом волноводе с параболической зависимостью показателя преломления. Собственными функциями данного преобразования являются моды Гаусса-Эрмита.

Особое внимание при моделировании уделено пучкам Эйри-Гаусса, которые переносят конечную мощность, сохраняя свойства недифрагирующего распространения на ограниченном участке, и могут быть реализованы экспериментально с очень хорошим приближением. [13]

Распространение светового луча через ABCD – систему в одномерном случае описывается интегралом Гюйгенса:

$$U_2(x_2) = \sqrt{\frac{k}{i2\pi B}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x_1) e^{\frac{ik}{2B}(Ax_1^2 - 2x_1x_2 + Dx_2^2)} dx_1, \quad (1)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Для среды с градиентным показателем преломления $n = n_0 \left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right)$ матрица ABCD системы будет иметь следующий вид (при распространении пучка от $z_1 = 0$ до $z_2 = z$):

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{z}{a}\right) & a \sin\left(\frac{z}{a}\right) \\ -\sin\left(\frac{z}{a}\right)/a & \cos\left(\frac{z}{a}\right) \end{bmatrix} \quad (2)$$

При данном виде матрицы интеграл (1) переходит в дробное преобразование Фурье.

Полный набор собственных функций дробного преобразования Фурье – функции Гаусса – Эрмита:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\alpha[\psi_n(x)] &= e^{-i\alpha n\pi/2} \psi_n(x), \\ \psi_n(x) &= \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\sqrt{2\pi}x) e^{-\pi x^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $H_n(x)$ – полином Эрмита n -го порядка

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (4)$$

Смоделировано распространение световых пучков через градиентную среду.

Пучки Эйри-Гаусса:

$$\begin{aligned} U_1(x_1; \kappa_1, \delta_1, S_1, q_1) &= Ai\left(\frac{x_1 + \delta_1}{\kappa_1}\right) e^{iS_1\left(\frac{x_1 + \delta_1}{\kappa_1}\right) + i\frac{1}{3}S_1^3} e^{\frac{ikx_1^2}{2q_1}}, \\ \kappa_1, \delta_1, S_1, q_1 &\in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (5)$$

Распределение в виде косинуса:

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cos(\omega x + \varphi), \\ A, \omega, \varphi &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

А также моды Гаусса-Эрмита, прямоугольный, треугольный импульсы.

Вычисление дробного преобразования Фурье.

Метод 1: непосредственное численное вычисление интеграла дробного преобразования Фурье по определению.

Интеграл (1) редко может быть взят аналитически, поэтому используется численное интегрирование. Численное интегрирование квадратичных экспонент, которые часто появляются в теории дифракции, требует очень большого количества точек, из-за быстрых колебаний ядра, если используются обычные методы. Проблема особенно выражена, когда α близко к 0 или ± 2 . Если мы предполагаем, что функция и её преобразование Фурье ограничены по ширине (отличны от нуля на конечном интервале), эту трудность можно обойти. Если $\alpha \in [0.5, 1.5]$ или $\alpha \in [2.5, 3.5]$, мы рассчитываем значение интеграла напрямую. Если $\alpha \in (-0.5, 0.5)$ или $\alpha \in (1.5, 2.5)$, мы используем свойство аддитивности: $\mathcal{F}^\alpha = \mathcal{F}^1 \mathcal{F}^{\alpha-1}$, при этом преобразование порядка $\alpha - 1$ может быть вычислено непосредственно.

Для интегрирования была использована формула Симпсона (n - чётное):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n) \right) =$$

$$= \frac{h}{3} \sum_{j=1}^{n/2} (f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})),$$

$$x_j = a + jh, j = \overline{0, n-1}, h = (b-a)/n. \quad 7)$$

Хотя этот метод вычисления ДрПФ может давать точные результаты, он работает медленно и имеет вычислительную сложность $O(N^2)$ [14].

Метод 2: быстрое вычисление ДрПФ.

ДрПФ – частный случай более общего класса преобразований, которые иногда называют линейными каноническими преобразованиями или квадратично-фазовыми преобразованиями. Члены этого класса преобразований могут быть разбиты на последовательность простых операций, таких как chirp-умножение, chirp-свертка, масштабирование, и обычное преобразование Фурье. Далее представлено две различных декомпозиции, ведущих к различным алгоритмам.

Метод 3: разбиение дробного преобразования на chirp-умножение, с последующей chirp-сверткой и еще одним chirp-умножением.

При этом подходе мы предполагаем, что $-1 \leq \alpha \leq 1$. Преобразовывая (1) мы можем записать:

$$f_\alpha(x) = e^{-\frac{i\pi}{\lambda a} x^2 \operatorname{tg}(\frac{\varphi}{2})} g'(x), \quad 8)$$

$$g'(x) = A_\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\pi}{\lambda a} \beta (x-x')^2} g(x') dx', \quad 9)$$

$$g(x) = e^{-\frac{i\pi}{\lambda a} x^2 \operatorname{tg}(\frac{\varphi}{2})} f(x), \quad 10)$$

где $g(x)$, $g'(x)$ представляют промежуточный результат, $\varphi = \frac{z}{a}$, $\beta = \csc \varphi$, $A_\varphi = \sqrt{\frac{\beta}{i\lambda a}}$.

Метод 4: еще один вариант декомпозиции с привлечением интерполяционной формулы Уиттекера-Шеннона (интерполяция sinc-функцией, sinc-интерполяция). Определяющее уравнение для ДрПФ (1) может быть записано в форме:

$$\{\mathcal{F}^\alpha f\}(x) = A_\varphi e^{\frac{i\pi}{\lambda a} \alpha x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i2\pi\beta}{\lambda a} x x'} \left[e^{\frac{i\pi}{\lambda a} \alpha x'^2} f(x') \right] dx'. \quad 11)$$

Функция $e^{\frac{i\pi}{\lambda a} \alpha x'^2} f(x')$ может быть представлена интерполяционной формулой Шеннона:

$$e^{i\pi \alpha x'^2} f(x') = \sum_{-N}^N e^{\frac{i\pi}{\lambda a} \alpha (n/2\Delta x)^2} f\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \operatorname{sinc}\left(2\Delta x \left(x' - \frac{n}{2\Delta x}\right)\right). \quad 12)$$

Подставляя (12) в (11), изменяя порядок интегрирования и суммирования и выполнив некоторые алгебраические преобразования получим:

$$\{\mathcal{F}^\alpha f\}\left(\frac{m}{2\Delta x}\right) = \frac{A_\varphi}{2\Delta x} e^{\frac{i\pi}{\lambda a} (\alpha-\beta) \left(\frac{m}{2\Delta x}\right)^2} \sum_{-N}^N e^{\frac{i\pi}{\lambda a} \beta \left(\frac{m-n}{2\Delta x}\right)^2} e^{\frac{i\pi}{\lambda a} (\alpha-\beta) \left(\frac{n}{2\Delta x}\right)^2} f\left(\frac{n}{2\Delta x}\right). \quad 17)$$

Существуют и другие методы, описанные, например в [15] но они не слишком хорошо подходят для построения графиков на плоскости.

Результаты моделирования показаны на рисунках 1-3.

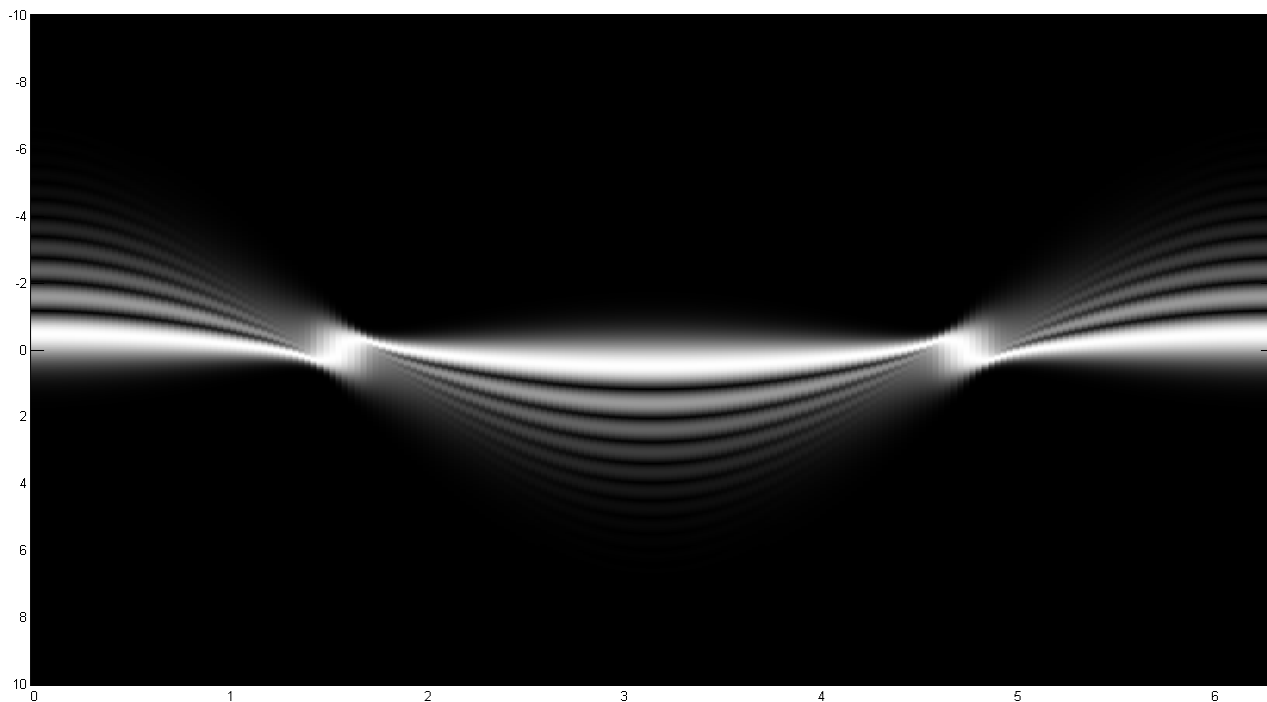


Рисунок 5 – Распространение пучка Эйри-Гаусса (вариант 1)

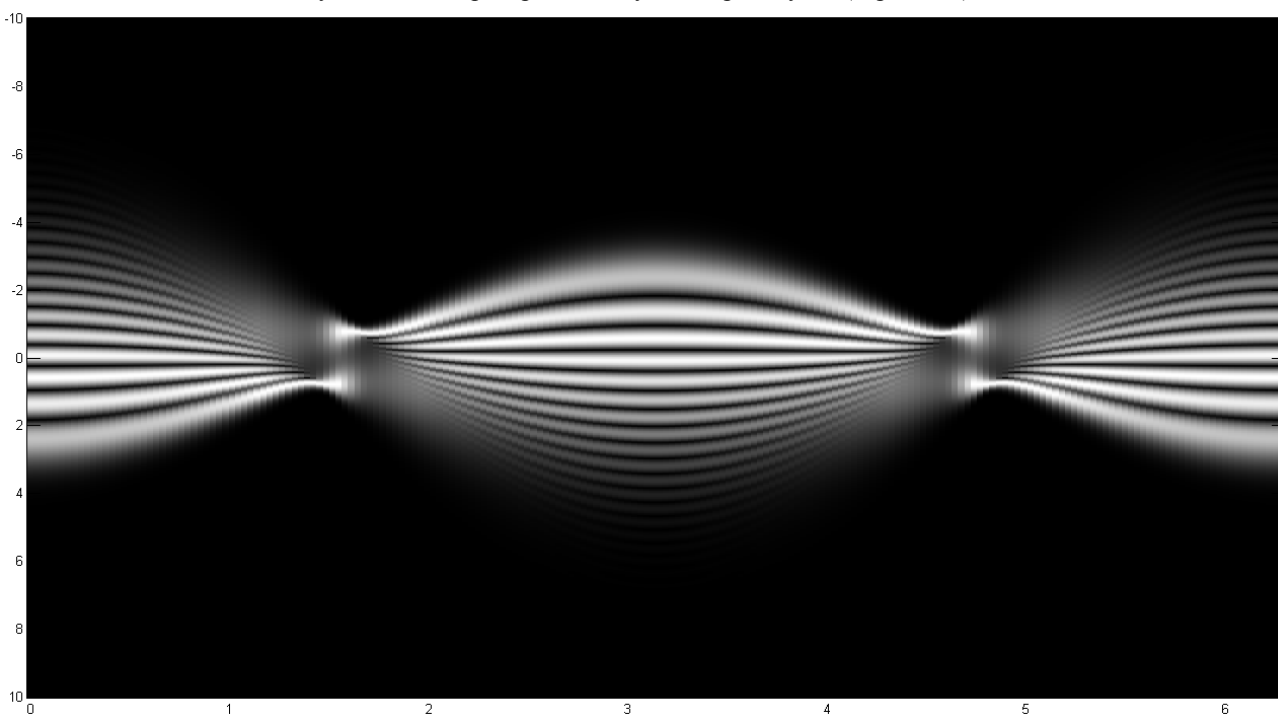


Рисунок 6 – Распространение пучка Эйри-Гаусса (вариант 2)

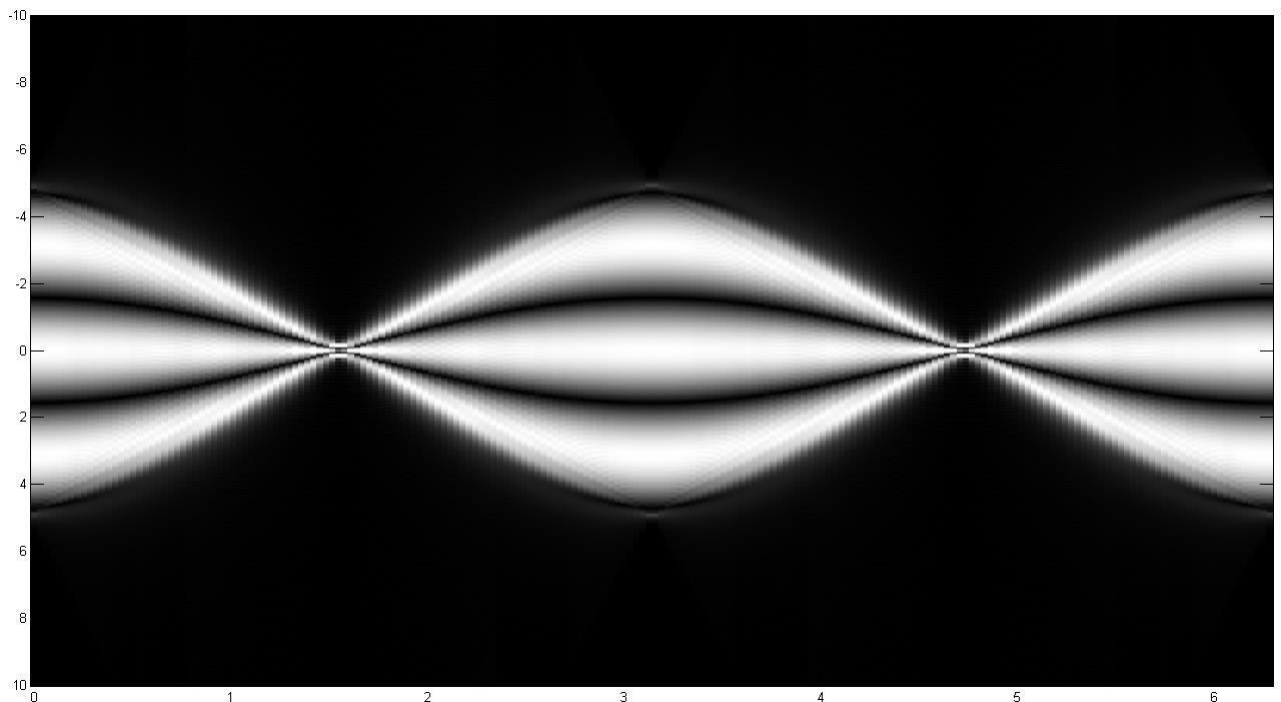


Рисунок 7 - Распространение косинусоидального пучка

Литература

1. Namias V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics / V. Namias // J. Inst. Math. Appl. – 1980. – Vol. 25. – P. 241-265.
2. Abet, S. Generalization of the fractional Fourier transformation to an arbitrary linear lossless transformation: an operator approach / S. Abet and J.T. Sheridan // J. Phys. A: Math. – 1994. – Gen. 27. – P.4179-4187.
3. Alieva, T. Fractional transforms in optical information processing / T. Alieva, M.J. Bastiaans, M.L. Calvo // EURASIP Journal on Applied Signal Processing. – 2005. – Vol. 10. – P. 1-22.
4. Dorsch, R.G. Fractional Fourier transform used for a lens-design problem / R.G. Dorsch and A.W. Lohmann // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34(2). – P. 4111-4112.
5. Cai, L.Z. Optical implementation of scale invariant fractional Fourier transform of continuously variable orders with a two-lens system / L.Z. Cai, Y.Q. Wang // Optics & Laser Technology. – 2002. – Vol. 34. – P. 249-252.
6. Малютин, А.А. Использование дробного Фурье-преобразования в $\pi/2$ -конвертерах лазерных мод / А.А. Малютин // Квантовая электроника. – 2004. – № 2. – С. 165-171.
7. Hahn, J. Optical implementation of iterative fractional Fourier transform algorithm / J. Hahn, H. Kim, B. Lee // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, Issue 23. – P. 11103-11112.
8. Хонина, С.Н. Расширение функциональных возможностей модовых астигматических конвертеров на основе применения дифракционных оптических элементов / С.Н. Хонина, С.В. Карпеев, А.В. Устинов // Известия Самарского научного центра РАН. – 2009. – № 11(5). – С. 13-23.
9. Abramochkin, E. Beams transformations and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83. – P. 123-135.
10. Beijersbergen, M.W. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum / M.W. Beijersbergen, L. Allen, H.E.L.O. van der Veen, J.P. Woerdman // Optics Communications. – 1993. – Vol. 96. – P. 123-132.
11. Ozaktas, H.M. Fourier transforms of fractional order and their optical interpretation / H.M. Ozaktas, D. Mendlovic // Optics Communications. – 1993. – Vol. 101. – P. 163-169.
12. Mendlovic, D. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I / D. Mendlovic, H.M. Ozaktas // J. Opt. Soc. Am. A. – 1993. – Vol. 10(9). – P. 1875-1881.
13. Bandres, M.A., Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems / M.A. Bandres, and J.C. Gutiérrez-Vega // Optics Express – 2007. – Vol. 15(25). – P. 16719-16728.
14. Ozaktas, H.M., Digital computation of the Fractional Fourier Transform / Haldun M. Ozaktas, H.M Orhan Ankan, Alper Kutay, Gozde Bozdaki // IEEE Transactions On Signal Processing – 1996 – Vol. 44(9). – P. 2141-2150.
15. Marinho, F.J., Numerical calculation of fractional Fourier transforms with a single fast-Fourier-transform algorithm / Francisco J. Marinho, Lui's M. Bernardo // J. Opt. Soc. Am. A. – 1998. – Vol. 15(8). – P. 2111-2116.