

Моделирование вторичных резонансных эффектов при сферическом движении твёрдого тела с маховиками

В.В. Любимов¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Методы асимптотического анализа применяются для исследования эволюция движения асимметричного твёрдого тела с маховиками. Показывается, что влияние малых моментов, возникающих в результате смещения центра масс и малых управляющих моментов от маховиков, приводит к возникновению нелинейных резонансных эволюционных эффектов. Целью этой работы является изучение резонансных эффектов в сферическом движении асимметричного твёрдого тела с маховиками. Применение метода интегральных многообразий и метода усреднения позволило исследовать указанные резонансные эффекты. Усреднённые уравнения показали, что резонансные эффекты могут приводить либо к регулярной прецессии, либо к длительному резонансу.

1. Введение

Основные затруднения в исследовании резонансов и резонансных эффектов при возмущенном вращении твердого тела относительно неподвижной точки связаны с нелинейности системы уравнений движения и переменностью частот системы [1]-[2]. В ряде задач о вращении твердого тела может применяться метод интегральных многообразий [3], позволяющий существенно упростить систему уравнений движения и понизить ее порядок. В указанных задачах диссипативные внешние моменты способствуют притяжению траекторий системы к интегральному многообразию [2]. При этом движение по интегральному многообразию описывается одночастотной системой, а характер движения твердого тела является близким к прецессионным движениям. При обращении в ноль единственной частоты в системе наблюдается резонанс низшего порядка, оказывающий значительное влияние на изменение медленных переменных. Применение метода интегральных многообразий и метода усреднения (в нерезонансном случае) позволяет существенно упростить систему уравнений движения твердого тела. Полученные в результате усредненные уравнения не содержат быстрой фазы и могут быть использованы для анализа резонансных эффектов при движениях твердого тела, близких к прецессионным. В ряде известных работ, например [4], при получении усредненных уравнений движения твердого тела были изучены движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии.

Из ранних работ по тематике вторичных резонансных эффектов в задачах о вращении твердого тела известны две статьи [5], [6]. Следует отметить, что реализация вторичных резонансных эффектов в данных работах может иметь место при изменении резонансных соотношений частот в знаменателях третьего приближения метода усреднения. Вторичный резонансный

эффект как динамическое явление получило свое название и впервые был описано Садовым Ю.А. применительно к двухчастотной почти-гамильтоновой механической системе общего вида [7]. В последующей работе [8] указанного автора показывается, что вторичные резонансные эффекты возможны в многочастотных системах. Известно также, что данное явление было описано также в работе [9] при исследовании вращательного движения спутника с магнитным демпфером. В работе [2] вторичные резонансные эффекты были исследованы при вращении тяжёлого твёрдого тела с малой асимметрией вокруг неподвижной точки в случае, близком к случаю Лагранжа. В данной работе вторичные резонансные эффекты обуславливались действием малого момента от постоянного смещения центра масс относительно оси динамической симметрии и малого постоянного в связанной системе координат возмущающего момента. При изучении вторичных резонансных эффектов основное внимание уделяется исследованию медленных составляющих движения твердого тела на нерезонансных участках, прилегающих к рассматриваемому резонансу. С математической точки зрения вторичные резонансные эффекты объясняются влиянием величин резонансных соотношений частот, содержащихся в знаменателях высших приближений усредненных уравнений, на эволюцию медленных переменных системы. Одним из наиболее очевидных вторичных резонансных эффектов является увеличение скорости изменения медленных переменных при приближении резонансного соотношения частот к нулевому значению, которому соответствует резонанс. На практике, вторичные резонансные эффекты могут способствовать сильной раскрутке изделия или вызвать эволюцию переменных системы до значений угловой скорости, при которых реализуется длительный резонанс. В частности, указанные эффекты были также подробно исследованы применительно к задаче о движении асимметричного твердого тела в сопротивляющейся среде [10] и исследовании возмущенного вращательного движения асимметричного твердого тела с сильным магнитом в геомагнитном поле [11]. Многие современные исследования были сосредоточены на изучении вращательного движения при спуске космического аппарата (КА) в атмосферах Земли и Марса. Известно, что наличие малых массовой и аэродинамической асимметрий может привести к резонансу в атмосферном движении КА [10]. Следует отметить, что длительный резонанс вызывает нарушение технологических ограничений по углу атаки. Кроме того, вторичные резонансные эффекты также могут способствовать развитию чрезвычайной ситуации во время атмосферного спуска КА [10]. Действительно, эти динамические явления могут привести к значительному увеличению угловой скорости КА. Вторичные резонансные эффекты представляют собой эволюционные явления, вызванные резонансом в нерезонансных областях, прилегающих к резонансу [8].

2. Постановка задачи

Пусть твердое тело (ТТ) имеет смещение центра масс относительно начала координат O связанной с ТТ системы координат $OXYZ$: $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$. Предполагается, что на величины моментов инерции ТТ накладываются ограничения: $I = I_x = I_y > I_z$, $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$. Поскольку движение ТТ относительно точки O считается близким к классическому случаю Лагранжа, поэтому величины осевых смещений центра масс ограничены: $\Delta z \gg \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Анализ уравнений движения ТТ показывает, что в дальнейшем без потери общности результатов можно учитывать, что $\Delta x = 0$ (при $\Delta y \neq 0$ и $\Delta z \neq 0$). Предполагается, что на ТТ в связанной системе координат $OXYZ$ действуют возмущающие моменты от трех маховиков, установленных на ТТ таким образом, что их оси вращения совпадают с осями X, Y, Z . Положение системы координат $OXYZ$ относительно неподвижной системы координат $OX_1Y_1Z_1$ определяются посредством трёх углов Эйлера: угла нутации θ , угла прецессии ψ и угла собственного вращения φ . Ось OZ_1 неподвижной системы координат $OX_1Y_1Z_1$ является вертикальной при сферическом движении ТТ. Вращение ТТ осуществляется в окрестности

статически устойчивого положения равновесия $\theta=0$. Взаимное расположение систем координат $Ox_1y_1z_1$, $OXYZ$ и ТТ с маховиками показано на рисунок 1.

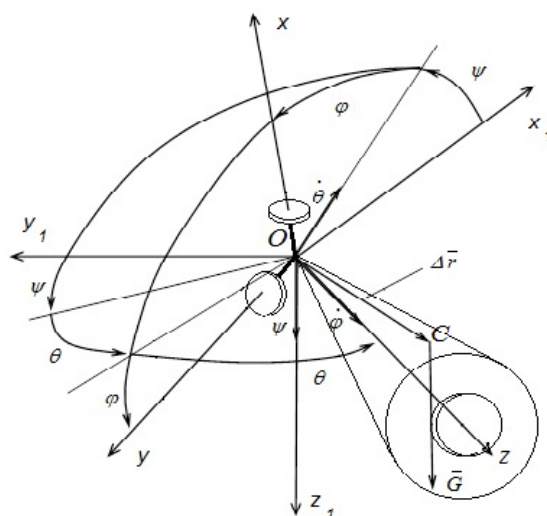


Рисунок 1. Взаимное расположение систем координат $Ox_1y_1z_1$ и $OXYZ$.

3. Математические модели

Исходная система уравнений движения ТТ с маховиками относительно неподвижной точки записываются в форме (при $\bar{I}_z = I_z / I$, $I_x = I_y = I$, $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$), удобной для применения метода интегральных многообразий [2]:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{M_{z1}}{I}, \tag{1}$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \tag{2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{M_{xn}}{I} + \frac{(Q - \bar{I}_z \omega_z \cos \theta)(Q \cos \theta - \bar{I}_z \omega_z)}{\sin^3 \theta}, \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_z - \omega_\psi \cos \theta, \tag{4}$$

где $Q=W$, $\omega_z = R / \bar{I}_z$, $\omega_\psi = \frac{d\psi}{dt} = \frac{Q - \bar{I}_z \omega_z \cos \theta}{\sin^2 \theta}$, $M_{z1} = M_x \sin \varphi \sin \theta + M_y \cos \varphi \sin \theta + M_z \cos \theta$,

$$M_x = G\Delta y \cos \theta - G\Delta z \sin \theta + \Delta M_x + m^\omega \omega_x, M_y = G\Delta z \sin \theta \sin \varphi + \Delta M_y + m^\omega \omega_y$$

$$M_z = -G\Delta y \sin \theta \sin \varphi + \Delta M_z, M_{xn} = M_{xn}^0 + \Delta M_{xn}, M_{xn}^0 = -G\Delta z \sin \theta,$$

$$\Delta M_{xn} = G\Delta y \cos \theta \cos \varphi + \Delta M_x \cos \varphi - \Delta M_y \sin \varphi + m^\omega \frac{d\theta}{dt} + \Delta M_x \cos \varphi - \Delta M_y \sin \varphi + m^\omega \frac{d\theta}{dt},$$

$G_z = G \cos \theta$, $G_n = G \sin \theta$, $G = \frac{m_b g}{I}$, m_b - масса ТТ с маховиками, g – ускорение свободного падения, $\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$ - возмущающие моменты от маховиков, действующие в направлении осей X, Y, Z ; m^ω - малый коэффициент демпфирующего момента.

Уравнение $\frac{d\psi}{dt} = \frac{Q - \bar{I}_z \omega_z \cos \theta}{\sin^2 \theta}$ не зависит от угла ψ , по этой причине оно может быть проинтегрировано отдельно. Введем в системе (1)-(4) малый параметр $\varepsilon > 0$:

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon U(u, \varphi, \theta, \frac{d\theta}{dt}), \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\Phi(u, \theta), \quad (6)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + F(u, \theta) = \varepsilon[f_1(u, \varphi, \theta) + f_2(u, \theta)\frac{d\theta}{dt}]. \quad (7)$$

Здесь $u = (Q, \omega_z)$ - вектор медленных переменных, Q – проекция вектора кинетического момента ТТ на ось OZ_1 , отнесённая к моменту инерции I , ω_z - угловая скорость ТТ относительно оси OZ_1 ; θ и φ – быстрые переменные; $\varepsilon U = (\varepsilon U_1, \varepsilon U_2)$, $\varepsilon U_1 = M_{z1}$, $\varepsilon U_2 = M_z / I_z$;

$$F(u, \theta) = -M_{xn}^0 - F_1(u, \theta)F_2(u, \theta), \quad \Phi(u, \theta) = \omega_z - F_1(u, \theta)\cos\theta, \quad F_1(u, \theta) = (Q - I_z\omega_z\cos\theta) / \sin^2\theta, \\ F_2(u, \theta) = (Q\cos\theta - I_z\omega_z) / \sin\theta, \quad \varepsilon f_1 = G\Delta y\cos\theta\cos\varphi + \Delta M_x\cos\varphi - \Delta M_y\sin\varphi, \quad \varepsilon f_2 = m^\omega.$$

Малый параметр ε в системе уравнений (5)-(7) характеризует величину смещения центра масс Δy , а также величины возмущающих моментов $\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$, величину коэффициента демпфирующих моментов m^ω .

Известна модификация метода интегральных многообразий [3], согласно которой данный диссипативный момент может иметь малое значение. Применение указанной модификации метода интегральных многообразий позволяет понизить порядок системы уравнений (5)-(7). В результате получим систему с быстрой фазой φ , описывающую с точностью до членов $O(\varepsilon)$ движение ТТ с маховиками по интегральному многообразию:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \varepsilon\Lambda(\lambda, \varphi), \quad (8)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \Delta(\lambda) + \varepsilon\Omega(\lambda, \varphi). \quad (9)$$

Здесь $\lambda = (\omega_z, \theta)$ - вектор медленных переменных ω_z, θ ; $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, $\Lambda_1 = -[\Delta y G \sin\theta \sin\varphi + \Delta M_z + m^\omega \omega_z] / I_z$, $\Lambda_2 = -m^A \cos(\varphi + \varphi_A) + m^\omega \omega_{1,2} \sin\theta [3\omega_{1,2} - (1 + \bar{I}_z)\omega_z] / F^{(\theta)}$;

$$\bar{I}_z = I_z / I; \quad F^{(\theta)} = \partial F / \partial \theta; \quad \Omega(\lambda, \varphi) = \pm \frac{m^B \operatorname{ctg}\theta}{2I\omega_\theta} \cos(\varphi + \varphi_B); \quad m^A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2},$$

$$m_1^A = \Delta M_y [(1 + \bar{I}_z)\omega_z - 3\omega_{1,2}] / IF^{(\theta)}, \quad m_2^A = \frac{\Delta y G \cos\theta + \Delta M_x [(1 + \bar{I}_z)\omega_z - 3\omega_{1,2}] - \Delta y G \sin^2\theta \omega_{1,2}}{IF^{(\theta)} \cos\theta},$$

$$\cos\varphi_A = -m_1^A / m^A, \quad \sin\varphi_A = m_2^A / m^A; \quad m^B = \sqrt{(m_1^B)^2 + (m_2^B)^2}, \quad m_1^B = \Delta y G \cos\theta + \Delta M_x, \quad m_2^B = \Delta M_y,$$

$$\cos\varphi_B = m_1^B / m^B, \quad \sin\varphi_B = m_2^B / m^B.$$

Управляющие моменты от действия маховиков задаются в следующем виде:

$$\Delta M_j = k_{1j}\Delta^2 + k_{2j}. \quad (10)$$

В выражении (10) индексы j равны $j=x,y,z$. Здесь k_{1j}, k_{2j} - малые положительные коэффициенты управления; $\Delta = \omega_z - \omega_{1,2}$ - резонансное соотношение частот $\omega_{1,2} = \bar{I}_z\omega_z / 2 \pm \omega_\theta$;

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{\bar{I}_z^2\omega_z^2}{4} + \omega^2}; \quad \omega^2 = \frac{G\Delta z \cos\theta}{I}. \quad \text{Уравнения системы (8)-(9) содержат в своих правых частях}$$

периодическую зависимость от быстрой переменной φ , что существенно затрудняет исследование эволюций в рассматриваемой системе. Применяя известный метод усреднения уравнений в нерезонансном случае получаем уравнения для определения усреднённых переменных $\bar{\omega}_z$ и $\bar{\theta}$, которые не зависят от быстрой фазы φ . В дальнейшем, указанные усредненные переменные будем обозначать следующим образом: ω_z, θ . Усредненные уравнения для медленных переменных ω_z и θ , записанные с учётом первых двух приближений, имеют вид:

$$\left\langle \frac{d\omega_z}{dt} \right\rangle = \varepsilon m^\omega \omega_z / I_z + \varepsilon^2 \frac{G\Delta y \bar{m}^A \omega^2 \cos \theta \cos \varphi_A}{2I_z \Delta} \mp \varepsilon^2 \frac{G^2 \Delta y \bar{m}^A \omega^2 \Delta z \sin^2 \theta \cos \varphi_A}{4I_z I \omega_\theta \Delta^2} \mp \varepsilon^2 \frac{G\Delta y \bar{m}^B \omega^2 \cos \theta \sin \varphi_B}{4I_z I \omega_\theta \Delta}, \quad (11)$$

$$\left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle = -\varepsilon^2 \frac{(\bar{m}^A)^2 \omega^4}{2\Delta} \frac{\partial \varphi_A}{\partial \theta} - \varepsilon^2 \frac{G\Delta y \bar{m}^A \omega^2 \sin \theta \sin \varphi_A}{2I_z \Delta} \frac{\partial \varphi_A}{\partial \omega_z} - \varepsilon^2 \frac{G\Delta y \omega^2 \sin \theta \cos \varphi_A}{2I_z \Delta} \frac{\partial \bar{m}^A}{\partial \omega_z} \pm \varepsilon^2 \frac{\bar{m}^A \bar{m}^B \omega^4 \operatorname{ctg} \theta \cos(\varphi_A - \varphi_B)}{4I \omega_\theta \Delta} + \varepsilon^2 \left[\left(1 - \frac{\bar{I}_z}{2} \right) \mp \frac{\bar{I}_z^2 \omega_z}{4\omega_\theta} \right] \frac{G\Delta y \bar{m}^A \omega^2 \sin \theta \cos \varphi_A}{2I_z \Delta^2}. \quad (12)$$

В уравнениях (11)-(12) предполагается равенство нулю возмущающего момента от маховика, имеющего ось вращения, которая совпадает с осью OZ : $\Delta M_z = 0$. Выполнение равенства $\Delta = \omega_z - \omega_{1,2} = 0$ приводит к реализации резонанса низшего порядка. Решая уравнение $\omega_z - \omega_{1,2} = 0$, находим резонансное значение угловой скорости:

$$\omega_z^r = \pm \omega / \sqrt{1 - \bar{I}_z}. \quad (13)$$

4. Анализ резонансных эффектов

Характерной особенностью усредненных уравнений (11)-(12) является тот факт, что они содержат в знаменателях второго приближения резонансные соотношения частот $\Delta = \omega_z - \omega_{1,2}$. Известно [7-11], что медленное изменение данных резонансных соотношений в немалой окрестности резонанса $\Delta = 0$ может привести к эволюционным явлениям, называемым вторичными резонансными эффектами. Исследуем указанные явления применительно к задаче о возмущенном вращении асимметричного ТТ с маховиками. При реализации вторичных резонансных эффектов требуется, чтобы первые приближения метода усреднения были равны нулю: $A_1^{\omega_z} = m^\omega \omega_z / I_z = 0$ и $A_1^\theta = 0$. Результаты численного моделирования показывают, что величина первого приближения $A_1^{\omega_z} = m^\omega \omega_z / I_z$ не оказывает существенного влияния на реализацию вторичных резонансных эффектов при малых m^ω и малых начальных угловых скоростях $\omega_z(0)$. Кроме того, из уравнения (12) следует выполнение условия $A_1^\theta = 0$. По аналогии с работой [11] можно показать, что реализация вторичных резонансных эффектов предполагает выполнение условия: $\sqrt{\varepsilon} < |\Delta| < 1/\varepsilon$. Анализ эволюций медленных переменных системы (11)-(12) позволяет выделить три характерных результата, получаемых при использовании закона управления (10) в рассматриваемой задаче.

Первый случай проявляется следующим образом: при приближении угловой скорости ω_z к резонансным значениям ω_z^r на нерезонансных участках движения наблюдается увеличение модулей скоростей изменения усреднённых переменных ω_z и θ . Данное явление объясняется уменьшением модулей соотношений Δ , расположенных в знаменателях уравнений (11)-(12). Резонансный эффект первого вида был изучен в статье [2] применительно к задаче о движении ТТ $\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$ относительно неподвижной точки с малой асимметрией и малыми неизменными внешними моментами в случае, близком к случаю Лагранжа. В рассматриваемой постановке задачи в соответствии с выражением (10) предполагается, что при постепенном уменьшении модуля соотношения частот Δ наблюдается уменьшение величин моментов $\Delta M_x, \Delta M_y$. При этом реализуются два вида эволюций вращательного движения ТТ. Во-первых, если изменения величин $\Delta M_x, \Delta M_y$ не существенны, то наблюдается эволюция угловой

скорости ω_z до резонансных величин ω_z^r , сопровождающаяся увеличением модулей усредненных производных (11) и (12). Во-вторых, если на рассматриваемом нерезонансном интервале времени движения ТТ происходит уменьшение величин $\Delta M_x, \Delta M_y$, которое не приводит к достижения угловой скоростью ω_z своих резонансных значений, то производные (11) и (12) могут при малых углах нутации эволюционировать к нулевым значениям. Действительно, из уравнений (11)-(12) также следует, что в случае малых углов нутации θ при $A_1^{\omega_z} \approx 0$, $A_1^\theta = 0$, $\Delta M_z = \Delta M_y = 0$, $\Delta M_x = -\Delta y G \cos \theta$ до членов второго порядка малости включительно получаем: $\langle d\omega_z / dt \rangle = 0$, $\langle d\theta / dt \rangle = 0$. Угловая скорость $\omega_\psi = \omega_{1,2} / \cos \theta$ в данном случае принимает неизменное значение и ТТ совершает сферическое движение близкое к регулярной прецессии. Это второй характерный случай поведения системы (11)-(12).

Известно, что присутствие в знаменателях правых частей $\langle d\omega_z / dt \rangle$ и $\langle d\theta / dt \rangle$ соотношений частот Δ и Δ^2 может привести к образованию в малой окрестности резонансных значений стационарных точек, к которым эволюционируют усреднённые переменные ω_z, θ . Данный вторичный резонансный эффект наблюдается как при неизменных величинах $\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$, так при изменяющихся в соответствии с выражением (10) величинах возмущающих моментов. Из уравнений (11)-(12) следует, что указанный эффект реализуется только при немалых величинах углах нутации θ . Действительно, при малых θ в уравнениях (11)-(12) величины слагаемых, пропорциональных $1/\Delta^2$ по крайней мере на один порядок малости выше, чем величины слагаемых, содержащих в знаменателях Δ . В результате реализации данного резонансного эффекта при малых углах нутации не происходит. Напротив, при немалых углах θ и уменьшающихся величинах $\Delta M_x, \Delta M_y$ резонансный эффект второго вида может привести к реализации стационарных (в среднем) значений переменных ω_z, θ , наблюдающихся в несовпадающие моменты времени движения ТТ (третий характерный случай). В этом случае движение ТТ не будет близким к регулярной прецессии. Исследование эволюций усреднённых переменных ω_z и θ при уменьшающихся величинах $\Delta M_x, \Delta M_y$ показывает, что образование стационарных точек в третьем случае является более редким явлением, чем реализация регулярной прецессии (согласно усредненным уравнениям) во втором характерном случае.

При численном моделировании поведения медленных переменных ω_z, θ в нерезонансном случае движения применялись исходные уравнения (1)-(4), нелинейные «низкочастотные» уравнения (8)-(9), усредненные уравнения (11)-(12) и выражение для резонансных значений угловой скорости (13). Некоторые результаты численного моделирования резонансных эффектов представлены на рисунках 2-4. Массово-геометрические параметры твердого тела с маховиками и начальные условия интегрирования принимали следующие величины:

$$\Delta x = 0, \Delta y = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \Delta z = 0,05 \text{ м}, m_b = 0,1 \text{ кг}, I_z = 5 \cdot 10^{-5} \text{ кг м}^2, I_x = I_y = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ кг м}^2,$$

$$\omega_z(0) = 0,25 \text{ с}^{-1}, \theta(0) = \pi / 20 \text{ рад}, \varphi(0) = \pi / 6 \text{ рад} \text{ (рисунки 2-4)}.$$

При построении рисунков 2-3 коэффициенты управления в выражении (10) принимали значения: $k_{1j} = 0, k_{2j} = 10^{-4} \text{ Нм}$. На фиг.2 проиллюстрирован первый характерный случай. Здесь резонансный эффект приводит к нерезонансному увеличению модуля скорости изменения усредненного значения угловой скорости ω_z (две верхние кривые) при приближении к резонансному значению ω_z^r (нижняя кривая). Жирная верхняя кривая на рисунке 2 построена посредством численного интегрирования системы уравнений (8)-(9). Для построения тонкой верхней кривой на фиг.2 применялось усредненное уравнение (11).

На рисунках 3-4 показан резонансный эффект, при котором нерезонансные эволюции переменных ω_z, θ (усреднённые величины) одновременно стремятся к своим стационарным значениям. Движение твердого тела в указанном стационарном режиме является близким к регулярной прецессии (второй характерный случай). В отличие от предыдущих рисунков при

построении рисунков 3-4 коэффициенты управления принимали следующие значения: $k_{1j} = 10^{-4} \text{ кгм}^2, k_{2j} = 0$. Верхняя кривая на рисунке 3 описывает изменение угловой скорости ω_z , а нижняя характеризует резонансные значения ω_z^r .

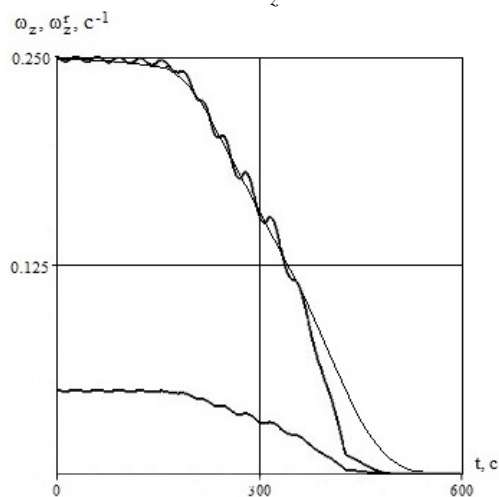


Рисунок 2. Эволюция угловой скорости при достижении резонансного значения.

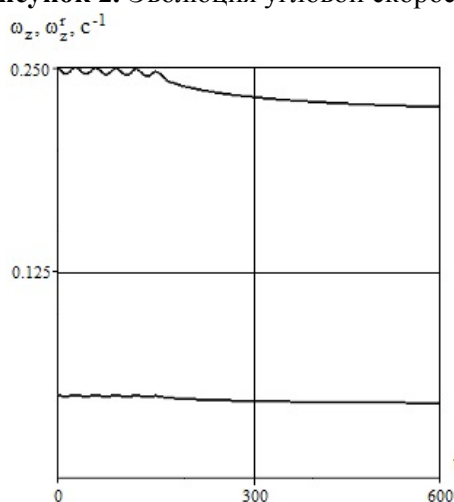


Рисунок 3. Эволюция угловой скорости при переходе в стационарное значение.

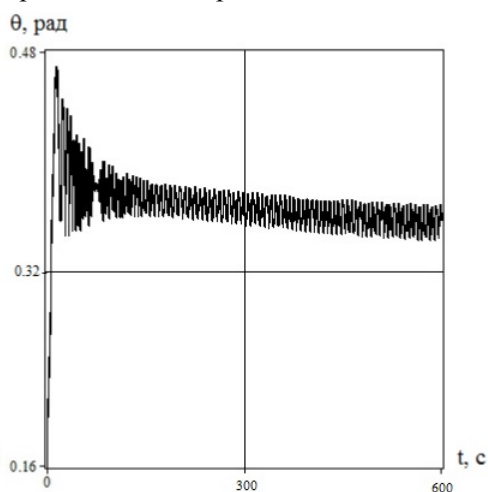


Рисунок 4. Эволюция угла нутации при переходе в стационарное значение.

5. Заключение

Следует отметить, что из рассмотренных резонансных эффектов наиболее существенное влияние на движение твердого тела относительно неподвижной точки оказывает эффект первого вида. С теоретической точки зрения вторичные резонансные эффекты характеризуют особенности эволюций медленных переменных системы (усредненных значений угловой скорости и угла нутации), наведённые резонансом $\Delta = \omega_z - \omega_{1,2} = 0$ на нерезонансных участках движения ТТ с маховиками. Результаты исследования резонансных эффектов в задаче управления сферическим движением твердого тела представляют не только теоретическую, но определенную практическую ценность. Пусть малое смещение центра твердого тела является конструктивной особенностью, которая может иметь место при функционировании реального изделия. В работе показано, что установка на ТТ маховиков, действующих на тело посредством малых моментов (16), приводит к эволюции переменных системы до значений, при которых реализуется длительный резонанс. Кроме того, если реализация длительного резонанса представляет собой недопустимый режим движения ТТ, то выбор коэффициентов в законе

управления (16) может обеспечить стабилизацию усредненных значений угловой скорости и угла нутации.

6. Литература

- [1] Akulenko, L.D. Evolution of Rotations of a Rigid Body Under the Action of Restoring and Control Moments / L.D. Akulenko, T.A. Kozachenko, D.D. Leshchenko // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2002. – Vol. 41(6). – P. 868-874.
- [2] Zabolotnov, Yu.M. Non-linear Resonance Evolutionary Effects in the Motion of a Rigid Body about a Fixed Point / Yu.M. Zabolotnov, V.V. Lyubimov // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2002. – Vol. 66(3). – P. 401-408.
- [3] Shchepakina, E. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M.P. Mortell // *Lecture Notes in Mathematics*. – Cham: Springer International Publishing Switzerland, 2014. – Vol. 2114. – 212 p.
- [4] Акуленко, Л.Д. Возмущённые движения твёрдого тела, близкие к регулярной прецессии / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько // *Известия РАН. Механика твёрдого тела*. – 1986. – Т. 5. – С.3-10.
- [5] Вильке, В.Г. Эволюция вращения симметричного спутника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью / В.Г. Вильке, А.В. Шатина // *Космические исследования*. – 1993. – Т. 31, № 6. – С. 22-30.
- [6] Вильке, В.Г. Эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на круговой орбите // *Космические исследования*. – 1994. – Т. 32, № 4-5. – С. 51-61.
- [7] Садов, Ю.А. Вторичный резонансный эффект в двухчастотной почти гамильтоновой системе с быстрыми фазами / Ю.А. Садов // *Сборник: Устойчивость движения*. – Новосибирск: Наука, 1985. – С. 179-184.
- [8] Sadov, Y.A. Secondary Resonance Effects in Mechanical Systems / Y.A. Sadov // *Mechanics of Solids*. – 1990. – Vol. 4. – P. 20-24.
- [9] Sadov, Y.A. Fast Rotation of a Satellite with Magnetic Damper. 4: Dissipative Evolution. Resonance Effects / Y.A. Sadov // *Cosmic Research*. – 1986. – Vol. 24(4). – P. 553-563.
- [10] Lyubimov, V.V. Asymptotic analysis of the secondary resonance effects in the rotation of a SC with small asymmetry in the atmosphere / V.V. Lyubimov // *Russian Aeronautics*. – 2014. – Vol. 57(3). – P. 245-252.
- [11] Lyubimov, V.V. External stability of resonances in the motion of an asymmetric rigid body with a strong magnet in the geomagnetic field / V.V. Lyubimov // *Mechanics of Solids*. – 2010. – Vol. 45(1). – P. 10-21.

Modeling of the Secondary Resonance Effects in the Spherical Motion of a Rigid Body with Flywheels

V.V. Lyubimov¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The evolution of the motion of an asymmetric rigid body with flywheels can be explored by the methods of asymptotic analysis. It is shown, that the effect of small moments resulting from the displacement of the centre of mass and of small control moments from the flywheels lead to the emergence of non-linear resonance evolutionary effects. The aim of this work is to investigate the resonance effects in the spherical motion of the asymmetrical rigid body with flywheels. To explore these resonance effects we applied the method of integral manifolds and the averaging method. The averaged equations have shown that resonance effects may result in either regular precession or prolonged resonance.