О НАХОЖДЕНИИ РАЗНОСТИ ХОДА ЛУЧЕЙ В НЕПАРАКСИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.В. Устинов

Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия

В докладе обсуждается вопрос о соответствии объёмного рефракционного элемента и аналогичного ему тонкого дифракционного элемента. Доказано, что для эквивалентности их действия фазовая функция ДОЭ должна отличаться от функции, описывающей поверхность объёмного элемента.

Ключевые слова: объёмный рефракционный элемент, дифракционный оптический элемент, фазовая функция, разность хода лучей

Введение

Как известно, объёмный рефракционный оптический элемент имеет определённые недостатки: он имеет достаточно большую массу, что в ряде случаев существенно; также возникают трудности изготовления при достаточно сложной форме элемента. Этих недостатков можно избежать путём перехода к тонкому элементу – рефракционному либо дифракционному.

Применение тонкого рефракционного элемента (френелевского элемента) значительно снижает его массу и поглощение энергии падающего пучка, но при этом появляются теневые области, которых не было при объёмном элементе, и возникают сильные осцилляции интенсивности. Примеры преодоления этих недостатков для случая конического аксикона приведены в [1].

Одной из причин появления нежелательных эффектов при использовании тонкого рефракционного элемента является нарушение гладкости его поверхности, что, среди прочего, усиливает дифракционные эффекты. Естественным выглядит другой вариант перехода к тонкому элементу – чисто дифракционный элемент. Вопросы такого перехода обсуждались в ряде работ. В [2] анализировалось действие тонкого элемента в зависимости от масштаба рельефа ДОЭ и неточности его изготовления. Факт, что дифракционная линза в виде киноформа в некоторой степени сохраняет рефракционные эффекты, которые усиливаются, если максимальная фаза не равна 2π, а кратна этой величине, упомянут в [3]. В [4] элемент с максимальной фазой $2\pi m$ назван гармонической дифракционной линзой и доказано, что он имеет существенно меньшую хроматическую аберрацию, чем простая дифракционная линза. Хроматические свойства дифракционной многоуровневой линзы также рассматривались в работе [5].

В этих исследованиях, как правило, рассматривалась только параксиальная область. Однако следует учитывать, что в непараксиальной области набег фазы должен вычисляться иначе, чем в параксиальной. В данном докладе предлагается способ расчёта, пригодный для обеих областей.

Параксиальная область

Для пояснения того, что́ именно надо изменить, приведём расчёт для параксиальной области. Ход центрального и периферийного лучей показан на рисунке 1.

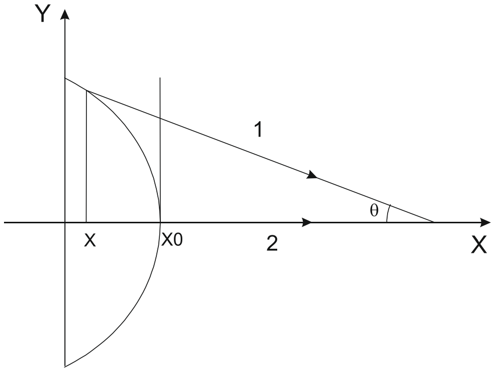

Рис. 1. Ход лучей при прохождении через элемент. Начальная плоскость совмещена с плоскостью выхода крайнего луча из элемента, чем исключена общая для обоих лучей разность хода

Угол между первым и вторым лучами выражается равенством

$$\theta = \alpha_t - \alpha_i \qquad (1)$$

в котором α_i - угол падения, α_t - угол преломления. В параксиальной области принимается, что $\cos\theta \approx 1$. Поэтому имеем следующие соотношения:

луч 1: $l_1 = x_0 - x$; луч 2: $l_2 = n(x_0 - x)$.

Разность хода

$$\Delta l = (x_0 - x)(n-1) = (n-1)(x_0 - x(y)) \qquad (2)$$

Зависимость $x(y)$ определяется формой поверхности. Очевидно, что $\Delta l \geq 0$. Расчёт разности хода по формуле (2) за пределами параксиальной области возможен при нахождении комплексной функции пропускания ступенчатого ДОЭ.

Непараксиальная область

Отличие состоит в том, что при вычислении длины первого луча точно учитывается значение угла θ.

луч 1: $l_1 = \dfrac{x_0 - x}{\cos\theta}$; луч 2: $l_2 = n(x_0 - x)$.

Разность хода

$$\Delta l = (x_0 - x)\left(n - \frac{1}{\cos\theta}\right) = (x_0 - x(y))\left(n - \frac{1}{\cos\theta(y)}\right) \qquad (3)$$

Зависимости $x(y), \theta(y)$ определяются формой поверхности. В принципе может оказаться, что вдали от оси $\Delta l < 0$. Далее применим формулу (3) для некоторых оптических элементов.

Сферическая линза.

Для сферической линзы имеем следующие равенства (см. [6]):

$$\begin{aligned} & x_0 = R \quad x = \sqrt{R^2 - y^2} \quad y_{\lim} = \frac{R}{n} \\ & \sin\alpha_i = \frac{y}{R} \quad \sin\alpha_t = \frac{ny}{R} \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), получим

$$\begin{aligned} & \cos\theta = \cos(\alpha_t - \alpha_i) = \cos\alpha_t \cos\alpha_i + \sin\alpha_t \sin\alpha_i = \\ & = \sqrt{1-\sin^2\alpha_t} \cdot \sqrt{1-\sin^2\alpha_i} + \sin\alpha_t \sin\alpha_i = \\ & = \frac{1}{R^2}\left[\sqrt{R^2 - n^2y^2} \cdot \sqrt{R^2 - y^2} + ny^2\right] \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим выражение для разности хода лучей

$$\begin{aligned} & \Delta l = \left(R - \sqrt{R^2 - y^2}\right) \cdot \\ & \cdot \left[n - \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - n^2y^2} \cdot \sqrt{R^2 - y^2} + ny^2}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

В параксиальной области можно получить более точную формулу, чем (2), если в (3) подставить приближённое равенство $\cos\theta \approx 1 - \frac{y^2}{2R^2}(n-1)^2$. Тогда получим

$$\Delta l \approx \left(R - \sqrt{R^2 - y^2}\right)(n-1)\left(1 + \frac{y^2}{2R^2}(n-1)\right) \tag{7}$$

Найдём также, на какой высоте (расстоянии от оптической оси) разность хода станет равна нулю. Решая уравнение $\cos\theta = 1/n$, получим

$$y(\Delta l = 0) = R / n = y_{\lim} \tag{8}$$

Когда высота превысит значение (8), то, если мы всё же хотим формально использовать выражение для разности хода (6), то надо считать, что $\sqrt{R^2 - n^2y^2} = -i\sqrt{n^2y^2 - R^2}$. Знак «минус» берётся, чтобы Δl имела отрицательную мнимую часть, что обеспечит убывание амплитуды, что видно из выражения для набега фазы

$$e^{-i\Delta\phi} = e^{-ik\Delta l} = e^{-ik(\Delta l_1 + i\Delta l_2)} = e^{-ik\Delta l_1} \cdot e^{+k\Delta l_2}$$

Первый множитель определяет собственно набег фазы, а второй (меньший единицы) показывает убывание амплитуды. Если фазовый множитель записан в виде $e^{+i\Delta\phi}$, то, наоборот, требуется брать мнимый корень со знаком «плюс».

Обобщённо-параболическая линза.

Для обобщённо-параболической линзы имеем следующие равенства (см. [6]):

$$x = x_0 - ay^{\gamma} \quad \sin\alpha_i = \frac{a\gamma y^{\gamma-1}}{\sqrt{1+a^2\gamma^2 y^{2\gamma-2}}} \quad \sin\alpha_t = n\sin\alpha_i$$
$$y_{\lim} = \frac{1}{(n^2-1)^{1/(2\gamma-2)} a^{1/(\gamma-1)} \gamma^{1/(\gamma-1)}}$$
$$\gamma > 1:\ y_{\lim} - \textit{верхняя граница} \quad 0<\gamma<1:\ \textit{нижняя} \tag{9}$$

Подставляя (9) в (1), получим

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1+(1-n^2)a^2\gamma^2 y^{2\gamma-2}} + na^2\gamma^2 y^{2\gamma-2}}{1+a^2\gamma^2 y^{2\gamma-2}} \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (3), получим выражение для разности хода лучей

$$\Delta l = ay^{\gamma}\left(n - \frac{1+a^2\gamma^2 y^{2\gamma-2}}{\sqrt{1+(1-n^2)a^2\gamma^2 y^{2\gamma-2}} + na^2\gamma^2 y^{2\gamma-2}}\right) \tag{11}$$

Разность хода станет равной нулю на высоте

$$y(\Delta l = 0) = \frac{1}{(n^2-1)^{1/(2\gamma-2)} a^{1/(\gamma-1)} \gamma^{1/(\gamma-1)}} = y_{\lim} \tag{12}$$

Если высота будет больше (при $\gamma > 1$) или меньше (при $0<\gamma<1$) значения (12), то мнимый корень надо брать со знаком «минус». (Структура формулы (11) аналогична (6)).

То, что в обоих случаях разность хода становится равной нулю на высоте, совпадающей с границей внутреннего отражения, не является случайным совпадением. Легко доказать, что при любой форме поверхности на границе отражения будет $\cos\theta = 1/n \propto \Delta l = 0$. (Доказательство основывается на формуле (1) и том, что на границе отражения $\sin\alpha_i = 1/n; \quad \sin\alpha_t = 1$.) Причём других корней нет.

Заключение

Таким образом, показано, что дифракционный оптический элемент, наилучшим образом приближающий действие объёмного элемента, имеет фазовую функцию, которая не повторяет в точности форму объёмного элемента, хотя и однозначно ею определяется. Также нужно учесть, что если у объёмного элемента имеет место полное внутреннее отражение, то размер дифракционного элемента ограничен областью в соответствии с наступлением полного внутреннего отражения.

Литература

1. Chebbi, B. Homogenization of on-axis intensity distribution produced by a Fresnel refractive axicon / B. Chebbi, I. Golub, K. Gourley // Optics Communications. – 2012. – Vol. 285. – P. 1636-1641.

2. Rossi, M. Refractive and diffractive properties of planar micro-optical elements / M. Rossi, R.E. Kunz, H.P. Herzig // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, No.26. – P. 5996-6007.
3. Sales, T.R.M. Diffractive-refractive behavior of kinoform lenses / T.R.M. Sales, G.M. Morris // Applied Optics. – 1997. – Vol. 36, No.1. – P. 253-257.
4. Sweeney, D.W. Harmonic diffractive lenses / D.W. Sweeney, G.E. Sommargren // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, No.14. – P. 2469-2475.
5. Казанский Н.Л. Формирование изображений дифракционной многоуровневой линзой / Н.Л. Казанский, С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, А.А. Морозов, С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский // Компьютерная оптика – 2014. – Т.38, №3 – С. 425-434
6. Устинов, А.В. Геометро-оптический анализ обобщённой рефракционной линзы / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Известия Самарского научного центра РАН – 2012. – Т.14, №4 – С. 28-37.