Об одной задаче декодирования символов по неполным данным в радиоканале

В.П. Цветов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443010, ул. академика Павлова, 1, Самара, Россия

Аннотация

В работе рассматривается математическая модель передачи данных в радиоканале с использованием методов ортогональной частотной и квадратурной амплитудной модуляций. Ставится задача восстановления кода передаваемого символа по неполному числу временных отсчетов сигнала на принимающей стороне. Задача сводится к нахождению нормального решения плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений, для ее решения применяется метод регуляризации Тихонова и определение параметра регуляризации методом касательных по невязке.

Ключевые слова: квадратурная модуляция; неполные временные отсчеты; регуляризация Тихонова

1. Введение

Ортогональная частотная модуляция (ОЧМ) применяется в современных системах цифровой радиосвязи. Эта технология использует для передачи данных одновременно от нескольких десятков до нескольких сотен (под)несущих частот, что позволяет достигать высокой степени уплотнения канала. Передаваемый поток данных преобразуется в множество параллельных битовых потоков меньшей скорости, которыми модулируются отдельные (под)несущие. Уменьшение скорости передачи одного символа в (под)несущей с одновременным сохранением общей пропускной способности ОЧМ-канала позволяет противостоять искажениям сигнала, связанными с его многолучевым распространением. Еще одним достоинством ОЧМ является ее устойчивость к частотно-избирательному затуханию. Для борьбы с межсимвольной интерференцией вводятся защитные интервалы, которые вследствие относительно небольшой скорости передачи символа в (под)несущей не оказывают серьезного влияния на общую скорость передачи данных [1].

Простой и надежный способ модуляции (под)несущих обеспечивает квадратурная амплитудная модуляция (КАМ), которая использует сумму двух несущих колебаний одной чистоты, сдвинутых по фазе на $\frac{\pi}{2}$ и модулированных по амплитуде *M*-уровневыми последовательностями импульсов. На практике число *M* уровней модуляции задается исходя из худшего прогнозируемого или априорно измеренного значения отношения сигнал/шум (ОСШ) для каждой (под)несущей.

Относительно невысокая символьная скорость в (под)несущей побуждает искать различные способы для увеличения общей пропускной способности ОЧМ-канала, в том числе, за счет учета и использования эффекта изменения во времени ОСШ. В частности, за время передачи КАМ-ОЧМ-символа в коротковолновом радиоканале, воздействующие помехи могут приобрести характер нестационарных, т.е. ОСШ будет изменяться в сторону многократного увеличения или уменьшения относительно нижнего или среднего уровня. В случае увеличения ОСШ появится потенциальная возможность идентифицировать КАМ-ОЧМ-символ за некоторое время до завершения его передачи и увеличить скорость передачи данных без изменения схемы *M*-уровневой модуляции. В случае уменьшения ОСШ возникнет необходимость восстановления сигнала, по его части, полученной до изменения ОСШ ниже приемлемого уровня. В каждом из этих случаев становится актуальной задача восстановления КАМ-ОЧМ-символа по неполным измеренным значениям переданного сигнала.

2. Модель передачи данных в КАМ-ОЧМ-радиоканале

Рассмотрим следующую модель передачи данных в радиоканале, использующем КАМ-ОЧМ технологию.

Передаваемый КАМ-символ кодируется кортежем комплексных значений $Z = \langle z_0, z_1, .., z_{N-1} \rangle$, где $z_k = x_k + I \cdot y_k$, а x_k и y_k задают, так называемые, квадратурную и синфазную дискретные составляющие символа. Как правило, $x_k, y_k \in \{h \cdot k \mid k \in 1,..,2 \cdot m, m \in \mathbb{N}\}$.Кодировка символа преобразуется в непрерывный сигнал $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \cdot e^{\frac{I 2\pi kt}{T}}$ на интервале $t \in [0, T]$.

На передающей стороне сигнал $s(t)$ поступает на вход квадратурного модулятора, а затем в радиоканал. На принимающей стороне происходит демодуляция сигнала, который с учетом искажений может быть представлен в виде $\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{z}_k \cdot e^{\frac{I 2\pi kt}{T}}$. Для восстановления Z на принимающей стороне применяется дискретизация сигнала по временным отсчетам $t_n = \frac{T}{N}\cdot n,$ после чего полученный кортеж значений $\tilde{S} = \left\langle \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, .., \tilde{s}_{N-1} \right\rangle$, где $\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{z}_k \cdot e^{\frac{I2\pi kn}{N}}$, может трактоваться как обратное дискретное преобразование Фурье кортежа $\tilde{Z} = \left\langle \tilde{z}_0, \tilde{z}_1, .., \tilde{z}_{N-1} \right\rangle$. Для восстановления $\tilde{Z}$ остается применить прямое масштабированное преобразование Фурье к $\tilde{S}$, воспользовавшись равенствами $\tilde{z}_k = \frac{1}{N}\cdot \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{s}_n \cdot e^{\frac{-I2\pi kn}{N}}$, при $k \in \{0,1,..,N-1\}$. Тем самым, стандартный алгоритм декодирования переданного КАМ-символа сводится к измерению принятого сигнала на конечном числе временных отсчетов $t_n = \frac{T}{N}\cdot n,$ при $n \in \{0,1,..,N-1\}$, и нахождению решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $F_{NN}\tilde{Z} = \tilde{S}$, которое имеет вид $\tilde{Z} = \frac{1}{N} F_{NN}^{*} \tilde{S},$ где $F_{NN} = \left(\varepsilon_N^{kn}\right) = \left(e^{\frac{I2\pi kn}{N}}\right)$ - квадратная матрица размерности $N \times N,$ а $F_{NN}^{*} = \left(\varepsilon_N^{-nk}\right) = \left(e^{\frac{-I2\pi kn}{N}}\right)$ - эрмитово сопряженная матрица к матрице F_{NN} . Для вычисления $\tilde{Z}$ обычно применяют алгоритм быстрого преобразования Фурье, который, при заданном уровне помех и подходящем выборе шага h в квадратурной и синфазной составляющей кода, позволяет однозначно восстановить исходное значение Z .

3. Задача декодирования по неполным данным

Заметим, что в силу свойств ε_N^{kn} для восстановления $\tilde{Z}$ можно использовать произвольную дискретизацию $t_n = \frac{T}{M}\cdot n,$ при $M \ge N$, и измерять значения $\tilde{S} = \left\langle \tilde{s}_0, \tilde{s}_1, .., \tilde{s}_{M-1} \right\rangle$. Нетрудно убедиться в справедливости равенств $F_{MN}\tilde{Z} = \tilde{S}$ и $\tilde{Z} = \frac{1}{M} F_{NM}^{*} \tilde{S}$, с прямоугольными матрицами $F_{MN} = \left(\varepsilon_M^{kn}\right) = \left(e^{\frac{I2\pi kn}{M}}\right)$ и $F_{NM}^{*} = \left(\varepsilon_M^{-nk}\right) = \left(e^{\frac{-I2\pi kn}{M}}\right)$ размерностей $M \times N$ и $N \times M$, соответственно.

Рассмотрим задачу об определении КАМ-символа $Z = \left\langle z_0, z_1, .., z_{N-1} \right\rangle$ по измерениям сигнала $\tilde{s}(t)$ на некотором подинтервале $\left[0, T_0\right]$ стандартного интервала $\left[0, T\right]$ длительности передачи символа. Для этого зададим дискретизацию $t_n = \frac{T}{M}\cdot n,$ при $M > N$, и будем измерять значения $\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{z}_k \cdot e^{\frac{I2\pi kn}{M}}$, для $n \in \{0,1,..,M_0 - 1\}$, где $M > M_0 \ge N$.

Понятно, что отношение $\frac{M}{M_0}$ характеризует отношение длины стандартного интервала длительности передачи символа $\left[0, T\right]$ к длине подинтервала $\left[0, T_0\right]$, при $T_0 = \frac{M_0}{M}\cdot T,$ то есть является мерой неполноты временных отсчетов, использующихся для декодирования символа, например, в случае резкого увеличения уровня нестационарных помех после начала передачи КАМ-символа. Это отношение также можно трактовать как потенциально возможный временной выигрыш предугадывания переданного символа сигнала по сравнению со стандартным алгоритмом. Например, при $M = 2\cdot N$ и $M_0 = N$ символ может быть декодирован в два раза быстрее.

Поставленная задача естественным образом сводится к нахождению нормального (псевдо)решения СЛАУ $F_{M_0 N}^{M} Z = S$ с матрицей $F_{M_0 N}^{M} = \left(\varepsilon_M^{nk}\right) = \left(e^{\frac{I2\pi kn}{M}}\right)$ размерности $M_0 \times N$ и неточно заданной правой части $\tilde{S}$ с a priori известной погрешностью $\delta \ge \left\| S - \tilde{S} \right\|_{M_0}$.

Основная проблема, возникающая при решении этой задачи, вызвана ее неустойчивостью, которая выражается, в частности, в плохой обусловленности матрицы $F_{M_0 N}^{M}$ при $M >> N,$ и $M_0 = N.$ Например, при $M_0 = N = 16,$ и $M \in \{N, N+1, .., 2\cdot N\}$, зависимость числа обусловленности матрицы $F_{M_0 N}^{M}$ от отношения $\frac{M}{M_0}$ имеет экспоненциальный вид $\mu\left(F_{M_0 N}^{M}\right) \approx e^{\frac{9.02\cdot M}{M_0} - 0.78}$. Заметим, что матрица $F_{M_0 N}^{M}$ является матрицей полного ранга N , т.к. ее главный минор совпадает с определителем Вандермонда.

Стандартный метод нахождения нормального решения СЛАУ по неточно заданной правой части состоит [2-6] в построении кортежа $Z(\alpha)$, который доставляет минимум сглаживающему функционалу $M^{\alpha}\left[Z,\tilde{S}\right]=\left\|F_{M_0N}^{M}Z-\tilde{S}\right\|_{M_0}^{2}+\alpha\cdot\left\|Z\right\|_{N}^{2}$ с параметром регуляризации, определяемым по невязке, т.е. из условия $\left\|F_{M_0N}^{M}Z(\alpha)-\tilde{S}\right\|_{M_0}=\delta\geq\left\|S-\tilde{S}\right\|_{M_0}$, где $\left\|Z\right\|_{N}^{2}=\sum_{k=0}^{N-1}\left|z_k\right|^2$, $\left\|\tilde{S}\right\|_{M_0}^{2}=\sum_{n=0}^{M_0-1}\left|\tilde{s}_n\right|^2$.

Обозначим $z_k(\alpha)=x_k(\alpha)+I\cdot y_k(\alpha)$, $Z(\alpha)=\left\langle z_0(\alpha),z_1(\alpha),..,z_{N-1}(\alpha)\right\rangle$, $X(\alpha)=\mathrm{Re}\left(Z(\alpha)\right)=\left\langle x_0(\alpha),x_1(\alpha),..,x_{N-1}(\alpha)\right\rangle$, $Y(\alpha)=\mathrm{Im}\left(Z(\alpha)\right)=\left\langle y_0(\alpha),y_1(\alpha),..,y_{N-1}(\alpha)\right\rangle$. Нетрудно показать, что $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$ должны удовлетворять следующей СЛАУ

$$\begin{cases}\left(\mathrm{Re}\left(F_{NM_0}^{M*}\circ F_{M_0N}^{M}\right)+\alpha E\right)X(\alpha)-\mathrm{Im}\left(F_{NM_0}^{M*}\circ F_{M_0N}^{M}\right)Y(\alpha)=\mathrm{Re}\left(F_{NM_0}^{M*}\tilde{S}\right)\\ \mathrm{Im}\left(F_{NM_0}^{M*}\circ F_{M_0N}^{M}\right)X(\alpha)+\left(\mathrm{Re}\left(F_{NM_0}^{M*}\circ F_{M_0N}^{M}\right)+\alpha E\right)Y(\alpha)=\mathrm{Im}\left(F_{NM_0}^{M*}\tilde{S}\right)\end{cases}, \tag{1}$$

где E - единичная матрица размерности $N\times N$, $F_{NM_0}^{M*}$ - эрмитово сопряженная матрица к матрице $F_{M_0N}^{M}$, а $\circ$ - операция умножения матриц.

Для нахождения приближенного решения уравнения $\varphi(\alpha)=\left\|F_{M_0N}^{M}Z(\alpha)-\tilde{S}\right\|_{M_0}=\delta$ можно применить метод касательных Ньютона, в силу того, что, как показано в [5,6], функция $\psi(\beta)=\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right)$ является убывающей и выпуклой вниз. Если β_0 - решение уравнения $\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right)=\psi(\beta)=\delta$, то, очевидно, $\alpha_0=\frac{1}{\beta_0}$ - решение уравнения $\varphi(\alpha)=\delta$. Итерационные приближения к искомому решению β_0 определяются следующей формулой [7]

$$\beta_n=\beta_{n-1}+\frac{\psi(\beta_{n-1})-\delta}{\psi'(\beta_{n-1})}. \tag{2}$$

Для вычисления значений $\psi'(\beta)$, фигурирующих в итерационной формуле (2) воспользуемся равенствами

$$\psi'(\beta)=-\frac{\varphi'\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta^2},\ \varphi'(\alpha)=\frac{\mathrm{Re}\left(\left(F_{NM_0}^{M*}\circ F_{M_0N}^{M}Z'(\alpha),Z(\alpha)\right)_N-\left(F_{M_0N}^{M}Z'(\alpha),\tilde{S}\right)_{M_0}\right)}{\left\|F_{M_0N}^{M}Z(\alpha)-\tilde{S}\right\|_{M_0}}, \tag{3}$$

где $\left(Z',Z\right)_N=\sum_{k=0}^{N-1}z_k'\cdot\overline{z}_k$, $\left(\tilde{S},S\right)_{M_0}=\sum_{n=0}^{M_0-1}\tilde{s}_n\cdot\overline{s}_n$, $Z'=\left\langle z_0',z_1',..,z_{N-1}'\right\rangle$, $Z=\left\langle z_0,z_1,..,z_{N-1}\right\rangle$, $\tilde{S}=\left\langle\tilde{s}_0,\tilde{s}_1,..,\tilde{s}_{M_0-1}\right\rangle$, $S=\left\langle s_0,s_1,..,s_{M_0-1}\right\rangle$, $\overline{z}_k$ и $\overline{s}_k$ - комплексно сопряженные к z_k и s_k.

СЛАУ для нахождения $\mathrm{Re}\left(Z'(\alpha)\right)=X'(\alpha)$ и $\mathrm{Im}\left(Z'(\alpha)\right)=Y'(\alpha)$ определяется непосредственным дифференцированием (1) по α

$$\begin{cases}\left(\mathrm{Re}\left(F_{NM_0}^{M*}\circ F_{M_0N}^{M}\right)+\alpha E\right)X'(\alpha)-\mathrm{Im}\left(F_{NM_0}^{M*}\circ F_{M_0N}^{M}\right)Y'(\alpha)=-EX(\alpha)\\ \mathrm{Im}\left(F_{NM_0}^{M*}\circ F_{M_0N}^{M}\right)X'(\alpha)-\left(\mathrm{Re}\left(F_{NM_0}^{M*}\circ F_{M_0N}^{M}\right)+\alpha E\right)Y'(\alpha)=-EY(\alpha)\end{cases}. \tag{4}$$

Соотношения (1)-(4) определяют итерационный алгоритм решения поставленной задачи декодирования с условием завершения итераций

$$\left|\psi(\beta_n)-\delta\right|<\varepsilon, \tag{5}$$

где ε определяет заданную точность решения уравнения $\psi(\beta)=\delta$.

Предложенный метод допускает очевидное обобщение на случай произвольной выборки $\tilde{s}_{n_i}=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{z}_k\cdot e^{\frac{I2\pi kn_i}{M}}$, для $i\in\left\{0,1,..,M_0-1\right\}$, где $M>M_0\geq N$, $n_i\in\left\{0,1,..,M-1\right\}$, и $i\neq j\Rightarrow n_i\neq n_j$.

4. Заключение

В работе рассмотрена модель передачи данных в радиоканале, использующем КАМ-ОЧМ технологию. Предложен метод и алгоритм восстановления кода передаваемого символа по неполному числу временных отсчетов сигнала на принимающей стороне. Полученные результаты могут найти применение при разработке цифровых беспроводных систем передачи данных.

Литература

[1] Леонович, Г.И. Низкочастотный радиотелеметрический канал на основе пространственно распределенной приемной антенной системы и ортогонального частотного мультиплексирования / Г.И. Леонович, М.С. Сорокин, А.Ф. Крутов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. –2011. – Т. 13, № 6. – С. 48-51.

[2] Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – 2-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 384 с.

[3] Тихонов, А.Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990. – 230 с.

[4] Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

[5] Морозов, В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации / В.А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. –1966. – Т. 6, № 1. – С. 170-175.

[6] Морозов, В.А. О принципе оптимальности невязки при приближенном решении уравнений с нелинейными операторами / В.А. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. –1974. – Т. 14, № 2. – С. 819-827.

[7] Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – 6-е изд. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008.– 636 с.