ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТОВОГО ИМПУЛЬСА В ПЛАНАРНОМ ВОЛНОВОДЕ

А.А. Дегтярев, М.О. Праслова

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Рассматривается задача контроля погрешности вычисления решения волнового уравнения, записанного с помощью рядов Фурье. Предложен алгоритм уточнения длины частичной суммы бесконечного ряда, вычисленной на основе оценки его остатка. Применение разработанного алгоритма позволило без потери точности многократно сократить избыточность числа суммируемых элементов ряда при реализации алгоритма численного моделирования распространения светового импульса в планарном волноводе.

Ключевые слова: ряд Фурье, оценка остатка ряда, короткий световой импульс, фронт волны, вычислительный эксперимент, численное моделирование.

Введение

Важнейшим этапом разработки прикладной программы для численного моделирования физического процесса является исследование фактической погрешности реализованного метода на специальных тестовых задачах. В качестве тестовых примеров естественно использовать такие задачи, которые допускают решение альтернативным методом с достаточно высокой точностью, позволяющей вычислять погрешность численного метода [1–3].

Настоящая работа посвящена созданию алгоритма решения краевой задачи для волнового уравнения, описывающей процесс распространения светового импульса в планарном волноводе. Для контроля погрешности используется оценка остатка ряда Фурье, равномерная по независимым переменным. Зачастую такие оценки оказываются весьма грубыми и их практическое применение приводит к существенному превышению количества суммируемых элементов ряда, гарантирующего достижения требуемой точности. Для проверки качества оценки остатка ряда предложена методика вычислительного эксперимента, позволяющая определить степень избыточности числа суммируемых элементов ряда, необходимых для достижения требуемой точности. При небольшой избыточности, не приводящей к существенному увеличению времени работы программы, такую оценку остатка ряда целесообразно использовать в программе для контроля погрешности. В противном случае целесообразно использовать экспериментальные зависимости между уровнем допустимой погрешности и числом суммируемых элементов ряда.

При решении задач численного моделирования распространения светового импульса в оптической среде используют различные математические описания импульса [4–6]. Ниже рассмотрены два варианта описания импульса, принципиально различающиеся степенью гладкости функции входного сигнала.

1. Математическая модель процесса распространения светового импульса в планарном волноводе

Для описания процесса распространения импульса будем использовать следующую краевую задачу относительно волнового уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{n^2}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \\ x \in [0, l_x],\ z \in [0, l_z],\ t \in [0, T]; \\ E\big|_{x=0} = 0,\ E\big|_{x=l_x} = 0, \quad z \in [0, l_z],\ t \in [0, T]; \\ E\big|_{z=0} = \psi(x,t), \qquad x \in (0, l_x),\ t \in (0, T]; \\ \left.\dfrac{\partial E}{\partial z}\right|_{z=l_z} = 0, \qquad x \in (0, l_x),\ t \in [0, T]; \\ E\big|_{t=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial E}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, l_x],\ z \in [0, l_z], \end{cases}$$

где E – проекция вектора напряженности электрического поля TE-поляризованной плоской волны [7] на ось y; l_x и l_z – толщина и длина планарного волновода соответственно; n – коэффициент преломления среды; c – скорость света; T – длина временного интервала; $\psi(x,t)$ – функция, описывающая форму импульса.

Предполагается, что грани волновода $x = 0$ и $x = l_x$ являются идеально проводящими, а среда в начальный момент времени не возмущена.

Записанную краевую задачу можно рассматривать как тестовую при отладке прикладной программы численного моделирования распространения импульса в волноводе с использованием разностных схем. В этом случае необходимо обеспечить контроль погрешности решения тестовой задачи, гарантируя ее достаточную малость.

Далее рассмотрим два варианта задания импульса:

$$\psi_1(x,t) = \varphi(x)\gamma(t)\sin\omega t,$$

$$\psi_2(x,t) = \varphi(x)\gamma(t)\sin\omega t \sin^2\omega^* t,$$

где

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1,\ t \in [0, t^*]; \\ 0,\ t \in (t^*, T], \end{cases} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda},\ \omega^* = \frac{2\pi c}{\lambda j},\ t^* = \frac{j\lambda}{c},$$

t^* – длительность импульса на входе в волновод,

j – целое положительное число.

Функция $\psi_1(x,t)$ является кусочно-гладкой по переменной t, поскольку ее производная по времени терпит разрывы при $t=0$ и $t=t^*$. Функция $\psi_2(x,t)$ обладает свойством гладкости второго порядка.

2. Точное решение волнового уравнения

Используя метод разделения переменных [8], решение краевой задачи для волнового уравнения можно представить в виде бесконечных рядов Фурье. Например, при задании импульса функцией $\psi_1(x,t)$, а амплитуды волны в начальный момент функцией $\varphi(x)=\sin(\eta_1 x),\ (\eta_1=\pi/l_x)$, решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&E(x,z,t)=\sin(\eta_1 x)\sin(\omega t)+\\
&+\frac{4}{\pi}\sin(\eta_1 x)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_m(1+2m)}\sin\xi_m z\times\\
&\times\frac{1}{\omega_m^2-\omega^2}\left(b^2\omega_m\sin(\omega t)-\frac{c^2}{n^2}\xi_m^2\omega\sin(\omega_m t)\right),
\end{aligned}$$

если $t\in\left[0,t^*\right]$;

$$\begin{aligned}
&E_y(x,z,t)=\frac{4}{\pi}\sin(\eta_1 x)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2m)}\sin(\xi_m z)\times\\
&\times\left[\ \frac{\cos(\omega_m(t-t^*))}{\omega_m}\left(\frac{b^2}{\omega_m^2-\omega^2}-1\right)\times\right.\\
&\times\left(\omega_m\sin(\omega t^*)-\omega\sin(\omega_m t^*)\right)+\\
&+\frac{\omega\sin(\omega_m(t-t^*))}{\omega_m}\left(\frac{b^2}{\omega_m^2-\omega^2}+1\right)\times\\
&\left.\times\left(\cos(\omega t^*)-\cos(\omega_m t^*)\right)\ \right],
\end{aligned}$$

если $t\in\left[t^*,T\right]$.

При записи последних формул использованы следующие обозначения:

$$\eta_1=\frac{\pi}{l_x},\quad \xi_m=\frac{\pi(1+2m)}{2l_z},\quad b^2=\omega^2-\frac{c^2}{n^2}\eta_1^2,$$

$$\omega_m^2=\frac{c^2}{n^2}\left(\eta_1^2+\xi_m^2\right).$$

Аналогично через бесконечные ряды Фурье записывается решение волнового уравнения для гладкого импульса, описываемого функцией $\psi_2(x,t)$.

3. Контроль погрешности усечения рядов

Практическое использование приведенных выше формул для расчета напряженности электрического поля предполагает усечение бесконечных рядов. Если удается получить оценку остатка ряда

$$E(x,z,t)=\sum_{m=1}^{\infty} e_m(x,z,t)$$

в виде

$$|R_M| = \left| \sum_{m=M+1}^{\infty} e_m(x,z,t) \right| \le S(M), \tag{1}$$

где $S(M)$ - положительная монотонно убывающая при $M \to +\infty$ функция, то эту оценку можно использовать с целью контроля погрешности усечения. Для этого следует найти число $M(\delta)$, являющееся наименьшим значением M, удовлетворяющим неравенству $S(M) \le \delta$, и для приближенного вычисления значений функции $E(x,z,t)$ использовать частичную сумму

$$E_{M(\delta)} = \sum_{m=1}^{M(\delta)} e_m(x,z,t). \tag{2}$$

Очевидно, что в этом случае фактическая погрешность вычисленного значения в выбранной точке не превзойдет требуемого уровня δ, т.е.

$$\delta_{fact} = \left| E - E_{M(\delta)} \right| = \left| R_{M(\delta)} \right| \le S\big(M(\delta)\big) \le \delta.$$

Для рассмотренных выше двух способов задания светового импульса были получены оценки остатков соответствующих рядов при следующих значениях t^* и ω^*:

$$\omega^* = \frac{\pi c}{5\lambda}, \quad t^* = \frac{10\lambda}{c}.$$

Для случая кусочно-гладкого импульса, заданного функцией $\psi_1(x,t)$, оценка имеет вид

$$|R_M| < \frac{8}{\pi}\left(\frac{2 l_z n}{\lambda(1+2M)} + \frac{\beta^2 \alpha_1 n^2 l_z^2}{(1+2M)^2} + \frac{8 n^3 \alpha_1 \beta^2 l_z^{\,3}}{3\lambda(1+2M)^3} \right), \tag{3}$$

где β и α_1 определяются формулами

$$\beta^2 = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{n l_x}\right)^2, \quad (\alpha_1)^{-1} = 1 - \frac{2\beta n l_z}{3 + 2[\beta n l_z - 0,5]}.$$

В последней формуле квадратные скобки означают операцию взятия целой части.

Для случая гладкого импульса, заданного функцией $\psi_2(x,t)$, оценка определяется неравенством

$$\left|R_M\right| < \frac{\alpha_2 n^2 l_z^{\,2}}{\pi\lambda^2}\left(\frac{92{,}16}{(1+2M)^2}+\frac{245{,}76 n l_z}{\lambda\left(1+2M\right)^3}\right), \tag{4}$$

где α_2 вычисляется по формулам

$$\left(\alpha_2\right)^{-1} = 1-\frac{2\beta n l_z}{5\lambda\left(3+2\left[d-0{,}5\right]\right)},\quad d=\frac{\beta n l_z}{5\lambda}.$$

Приведенные оценки погрешности усечения рядов являются равномерными по всем независимым переменным.

4. Методика уточнения количества суммируемых элементов ряда с помощью вычислительного эксперимента

Предложенные оценки погрешности усечения рядов нельзя назвать идеальными, поскольку они получены с использованием нескольких строгих неравенств. К тому же они являются равномерными. Следовательно, использование этих оценок для нахождения длины частичной суммы ряда в фиксированных точках может привести (и приводит) к превышению количества слагаемых ряда, достаточного для обеспечения требуемой точности. В этом случае целесообразно принять меры для уменьшения избыточности слагаемых в частичной сумме при гарантированном соблюдении требуемой точности.

Изложим методику, направленную на уменьшение числа элементов частичной суммы.

Обозначим через N натуральное число, удовлетворяющее неравенству $N \le M\left(\delta_1\right)$, где $\delta_1 < \delta$. Для частичной суммы E_N фактическая погрешность будет удовлетворять следующему очевидному неравенству:

$$\delta_{fact}\left(N\right) = \left|E-E_N\right| \le \left|E-E_{M(\delta_1)}\right| + \left|E_{M(\delta_1)}-E_N\right|.$$

Варьируя N в пределах $1 \le N \le M\left(\delta_1\right)$, найдем такое наименьшее его значение $N\left(\delta_2\right)$, при котором выполняется неравенство

$$\left|E_{M(\delta_1)}-E_N\right| \le \delta_2\,, \tag{5}$$

где $\delta_2 = \delta - \delta_1$.

Ясно, что при таком выборе δ_2 и обеспечении справедливости неравенства (5), фактическая погрешность $\delta_{fact}\left(N\left(\delta_2\right)\right)$ не превзойдет величины δ.

Итак, для уменьшения числа слагаемых в частичной сумме (2) необходимо

1. задать число $\delta_1 < \delta$ и затем найти значение $M\left(\delta_1\right)$, являющееся наименьшим значением M, удовлетворяющим неравенству $S\left(M\right) \le \delta_1$, где $S\left(M\right)$ – функция в правой части оценки (1);

2. варьируя N в пределах $1 \le N \le M(\delta_1)$, найти число $N(\delta_2)$, при котором справедливо неравенство (5);
3. меняя с заданным шагом соотношение между числами δ_1 и δ_2 ($\delta_1 + \delta_2 = \delta$), вновь выполнить этапы 1) и 2);
4. из всех полученных значений $N(\delta_2)$ выбрать наименьшее.

В результате практической реализации изложенного алгоритма можно ожидать существенного уменьшения числа слагаемых в частичной сумме и при этом гарантировать, что фактическая погрешность δ_{fact} не превзойдет допустимый уровень δ.

В таблицах 1 и 2 приведены типичные результаты вычислительных экспериментов, направленных на уменьшение избыточности слагаемых в частичной сумме (2). Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $\lambda = 1\,мкм$, $n = 1$, $l_x = 10\,мкм$, $l_z = 12\,мкм$, $x = 5\,мкм$, $\tilde{t}^* = t^* c/n = 5\,мкм$, $\lambda = 10^{14}\,мкм$. Значения величины δ задавались в долях от максимального значения амплитуды волны.

Табл. 1. Зависимость количества слагаемых $M(\delta_1)$ и $N(\delta_2)$ от координаты z при различных значениях δ для кусочно-гладкого импульса

δ	10^{-3}	10^{-4}	**10^{-5}**
$M(\delta)$	61665	611709	**6112104**
***z*, мкм**		$N(\delta_2)$	
0,1	41	65	**119**
0,5	29	47	**95**
0,9	41	103	**135**
1,3	54	84	**204**
2,1	44	44	**239**
2,5	43	62	**86**
3,7	64	82	**175**
4,5	96	144	**551**
4,9	135	135	**366**
4,999	2562	3234	**3332**
4,99999	12219	102200	**256347**
5	12245	122252	**1222332**
5,00001	12219	10202	**256347**
5,001	2562	3236	**3332**
5,1	**135**	**366**	**367**

Из таблиц 1 и 2 видно, что применение равномерных оценок (3) и (4) для усечения соответствующих рядов позволяет получить лишь весьма грубые значения количества слагаемых $M(\delta_1)$ частичной суммы. Эти значения во много раз (от 5 до 2000 раз и более, в зависимости от δ и z) превосходят значения $N(\delta_2)$, полученные в результате применения изложенного алгоритма. Обращает на себя внимание существенная неравномерность распределения значений $N(\delta_2)$ по переменной z. Как видно из таблицы 1 (кусочно-гладкий импульс), для вычисления значений напряженности электрического поля в диапазоне $0{,}1мкм \le z \le 4{,}9мкм$ достаточно просуммировать не более 551 первых слагаемых соответствующего ряда. При этом погрешность не превзойдет величины 10-5. Последнее справедливо и для всех других выбранных значений переменной z из указанного интервала, не приведенных в таблице 1. Однако для значений $4,9мкм \le z \le 5,1мкм$ необходимое количество слагаемых резко увеличивается и достигает величины 1,2 106. Такой рост количества слагаемых ряда является следствием слабого разрыва функции $\psi_1(x,t)$, описывающей входной импульс, поэтому в точках, близких к фронту волны ($z = 5мкм$) ряд сходится очень медленно. Конечно, медленную сходимость ряда в указанной фронтальной зоне легко предвидеть, однако указать необходимую длину частичной суммы ряда без предварительного вычислительного эксперимента проблематично.

Табл. 2. Зависимость количества слагаемых $M(\delta_1)$ и $N(\delta_2)$ от координаты z при различных значениях δ для гладкого импульса

δ	10^{-3}	10^{-4}	**10^{-5}**
$M(\delta)$	9279	29325	**92714**
z*, *мкм		$N(\delta_2)$	
0,1	15	41	**65**
0,5	1	46	**47**
0,9	34	41	**51**
1,3	34	44	**54**
2,1	32	41	**53**
2,5	37	43	**61**
3,7	37	46	**46**
4,5	40	8	**97**
4,9	1	45	**138**
4,999	1	123	**260**
4,99999	1	123	**262**
5	1	123	**262**
5,00001	1	123	**262**
5,001	1	123	**260**
5,1	**1**	**47**	**138**

Для случая описания импульса гладкой функцией $\psi_2(x,t)$ также наблюдается неравномерность распределения значений $N(\delta_2)$ по переменной z, однако она выражена в гораздо меньшей степени.

Заключение

Разработан и программно реализован алгоритм уточнения длины частичной суммы бесконечного ряда, основанный на использовании оценки сверху остатка ряда и обеспечивающий достижения требуемой точности вычисления суммы ряда.

Применение разработанного алгоритма для конкретных рядов Фурье, описывающих распространение светового импульса в планарном волноводе, позволило без потери точности существенно уменьшить (от 5 до 2000 раз и более) длину частичной суммы ряда, вычисленную непосредственно с помощью оценки остатка ряда.

Благодарности

Авторы выражают благодарность профессору Казанскому Н.Л. за полезные замечания по существу работы.

Литература

1. Baruch, G. Fourth-order schemes for time-harmonic wave equation with discontinuous coefficients / G. Baruch, G. Fibich, S. Tsynkov, E. Turkel // Commun. Comput. Phys. – 2009. – Vol. 5. – P. 442-455.
2. Feng, X. A high-order compact scheme for the one-dimensional Helmholtz equation with a discontinuous coefficient / X. Feng // International Journal of Computer Mathematics. – 2012. – Vol. 1. – P. 1-7.
3. Дегтярев, А.А. Исследование погрешности разностного решения однонаправленного уравнения Гельмгольца методом вычислительного эксперимента / А.А. Дегтярев, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 1. – С. 36-45. – ISSN 0134-2452.
4. Котляр, В.В. Моделирование распространения короткого двумерного импульса света / В.В. Котляр, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 2. – С. 158-164. – ISSN 0134-2452.
5. Котляр, В.В. Моделирование предвестников Зоммерфельда и Бриллюэна в среде с частотной дисперсией на основе разностного решения волнового уравнения / В.В. Котляр, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 2. – С. 146-154. – ISSN 0134-2452.
6. Fuchs, U. Ultra-short pulse propagation in complex optical systems / U. Fuchs, U. Zeitner and A. Tunnermann // Optics Express. – 2005. – Vol. 13, Issue 10. – P. 3852-3861.
7. Евтихов, М.Г. Соотношения Синеллиуса и Френеля для электромагнитных волн с постоянной линейной поляризацией / М.Г. Евтихов // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т. 55, № 8. – С. 915-922.
8. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с.