

# Оптимальная фильтрация многомерных случайных полей, порожденных авторегрессиями с кратными корнями характеристических уравнений

Н.А. Андриянов<sup>1,2</sup>, К.К. Васильев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ульяновский государственный технический университет, Северный Венец 32, Ульяновск, Россия, 432027

<sup>2</sup>Ульяновский институт гражданской авиации им. Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Можайского 8/8, Ульяновск, Россия, 432071

**Аннотация.** Использование математических моделей позволяет осуществлять сравнительный анализ теоретических выражений и результатов имитационного моделирования. Для описания изображений могут быть использованы авторегрессионные случайные поля, однако такие модели обладают ярко выраженной анизотропией, а изображения получаются слишком резкими. Устранение данного недостатка возможно за счет использования моделей с кратными корнями характеристических уравнений. Анализ показывает, что их применение при фильтрации изображений с плавно изменяющейся яркостью, обеспечивает меньшие ошибки, чем применение авторегрессионных случайных полей. Однако исследований зависимостей эффективности фильтрации от различных параметров моделей и отношений сигнал/шум для многомерных авторегрессионных случайных полей почти не проводилось. В статье рассматривается решение задачи оптимальной фильтрации изображений на основе моделей с кратными корнями характеристических уравнений. Получены теоретические зависимости относительной дисперсии ошибки фильтрации от размерности случайных полей.

## 1. Введение

В настоящее время для описания изображений существует множество различных математических моделей случайных полей (СП) [1-5]. Популярность такого подхода объясняется рядом преимуществ, которые обеспечивают математические модели. В первую очередь, это генерация достаточно больших объемов материала для исследования, а также математические модели выступают инструментом отработки различных алгоритмов. Простейшие авторегрессионные модели порождают СП с ярко выраженной анизотропией и подходят для описания лишь узкого класса реальных многомерных изображений. Дважды стохастические модели обеспечивают изменение вероятностных свойств порождаемого СП в каждой точке, однако в среднем свойства такой модели зависят от выбранной модели для основного СП. Поэтому для получения СП, близких к изотропным фрагментам многозональных изображений, необходимо использовать авторегрессии с кратными корнями характеристических уравнений [6-8].

Вместе с тем одной из главных задач обработки сигналов является задача фильтрации. При этом часто считается, что наблюдаемый сигнал представляет собой аддитивную смесь

исходного сигнала и белого шума. В настоящей работе выполняется анализ эффективности пространственной винеровской фильтрации многомерных авторегрессионных СП с кратными корнями характеристических уравнений на фоне белого шума. При этом исследуются такие модели разных кратностей, которые обеспечивают эквивалентные корреляционные свойства.

## 2. Модель многомерного случайного поля и ее линейный фильтр

Для описания многомерного авторегрессионного гауссовского СП обычно используются следующие уравнения

$$x_{\bar{i}} = \sum_{\bar{j} \in D} \alpha_{\bar{j}} x_{\bar{i}-\bar{j}} + \sigma_x \beta_0 \xi_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega, \quad (1)$$

где  $X = \{x_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$  – моделируемое СП, определенное на  $N$ -мерной сетке  $\Omega = \{\bar{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N) : i_k = 1 \dots M_k, k = 1 \dots N\}$ ;  $\{\beta_0, \alpha_{\bar{j}}, \bar{j} \in D\}$  – коэффициенты модели;  $\{\xi_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega\}$  – белое гауссовское СП, для которого математическое ожидание случайных величин равно нулю, а дисперсия равна единице;  $\sigma_x^2$  – дисперсия СП  $x_{\bar{i}}$ ;  $D \subset \Omega$  – каузальная область локальных состояний.

Для такой модели несложно найти передаточную функцию линейного фильтра. Используя  $Z$ -преобразование для модели (1) можно получить пространственный линейный фильтр, который описывается передаточной функцией следующего вида

$$H(\bar{z}) = \frac{\sigma_x \beta_0}{1 - \sum_{\bar{j} \in D} \alpha_{\bar{j}} \bar{z}^{-\bar{j}}}, \quad (2)$$

где  $\bar{z}^{-\bar{j}} = z_1^{-j_1} z_2^{-j_2} \dots z_N^{-j_N}$ .

Следует отметить, что передаточная функция (2) также зависит от параметров модели сигнала, как и энергетический спектр такого СП. При этом связь передаточной функции (2) и энергетического спектра СП  $X$  определяется выражением

$$S_x(\bar{z}) = H(\bar{z}) H(\bar{z}^{-1}). \quad (3)$$

Анализ вероятностных свойств СП упрощается, если передаточная функция многомерного фильтра может быть факторизована:  $H(\bar{z}) = \prod_{k=1}^N H_k(z_k)$ . Тогда энергетический спектр

$S_x(\bar{z}) = \prod_{k=1}^N S_k(z_k)$  и корреляционная функция (КФ)  $B(\bar{r}) = \prod_{k=1}^N B_k(r_k)$  также факторизуются.

Простое и весьма полезное для приложений многомерное разделимое СП  $x_{\bar{i}}$  можно представить с помощью пространственной авторегрессии

$$\prod_{k=1}^N (1 - \rho_k z_k^{-1})^{m_k} x_{\bar{i}} = \sigma_x \beta_0 \xi_{\bar{i}}, \bar{i} \in \Omega, \quad (4)$$

с корнями  $\rho_k$  характеристических уравнений кратности  $m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Передаточная функция такого СП будет факторизуемой и запишется в виде

$$H(\bar{z}) = \sigma_x \beta_0 / \prod_{k=1}^N (1 - \rho_k z_k^{-1})^{m_k}, \quad (5)$$

где  $\beta_0 = \prod_{k=1}^N \beta_k$ ;  $\beta_k(m_k) = (1 - \rho_k^2)^{2m_k - 1} / \sum_{l=0}^{m_k - 1} (C_{m_k - 1}^l \rho_k^l)^2$ ,  $C_j^i = j! / (i!(j-i)!)$ .

## 3. Эффективность фильтрации многомерных случайных полей с кратными корнями характеристических уравнений

Одной из сложных задач фильтрации последовательностей изображений на многомерных сетках, является анализ эффективности такой фильтрации. При этом необходимым критерием

для анализа выступают зависимости дисперсии ошибки фильтрации от различных параметров модели и шума. Формально, пространственные ковариационные матрицы ошибок оценивания можно вычислить с помощью рекуррентных соотношений для фильтра Калмана [6,7]. Однако, если необходимо провести сравнение алгоритмов при различных значениях параметров стохастических уравнений и уровнях помех, то определение даже установившихся значений элементов ковариационных матриц становится весьма трудоемкой задачей.

Рассмотрим относительно простой способ определения эффективности оценивания однородных полей на бесконечных сетках, основанный на основных положениях теории фильтра Винера [8]. Пусть на основе наблюдений

$z_{\vec{j}} = x_{\vec{j}} + n_{\vec{j}}$ ,  $\vec{j} = (j_1 j_2 \dots j_N)^T \in \Omega$ , смеси информационного СП и

белого СП с дисперсией  $\sigma^2 = M\{n_{\vec{j}}^2\}$  необходимо дать наилучшую (в смысле минимума дисперсии ошибки) линейную оценку  $\hat{x}_0 = \sum_{\vec{j} \in \Omega} h_{\vec{j}} z_{\vec{j}}$  элемента  $x_0$  информационного СП. Для

такой оценки коэффициенты  $h_{\vec{j}}$  будут определять оптимальную фильтрацию. Условие

минимума  $\sigma_{\varepsilon}^2 = M\{(\hat{x}_0 - x_0)^2\} = M\left\{\left(\sum_{\vec{j} \in \Omega} h_{\vec{j}} z_{\vec{j}} - x_0\right)^2\right\}$  запишется как система линейных

уравнений

$$h_{\vec{q}} \sigma^2 + \sum_{\vec{j} \in \Omega} h_{\vec{j}} B(\vec{r} - \vec{j}) = B(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Omega, \quad (6)$$

которую можно рассматривать как пространственный аналог уравнений Винера-Хопфа. С помощью многомерного  $Z^{-1}$ -преобразования может быть найдено решение системы и выражение для относительной дисперсии ошибки [8]:

$$\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_x^2} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta_0^2}{\prod_{k=1}^N (1 + \rho_k^2 - 2\rho_k \cos \lambda_k)^{m_k} + q\beta_0^2} d\vec{\lambda}, \quad (7)$$

где  $q = \sigma_x^2 / \sigma^2$  - отношение сигнал/шум,  $N$  - размерность СП,  $m_k$  - кратность модели в  $k$ -й размерности,  $\rho_k$  - корреляционный параметр в  $k$ -й размерности.

На рисунке 1 (а) (для малых  $k_0$ ) и (б) (для больших  $k_0$ ) представлены зависимости относительной ошибки дисперсии фильтрации от интервала корреляции  $k_0$  для моделей разных размерностей и порядков при  $q=0.1$ . Данный интервал определяет эквивалентность моделей различных кратностей. На графиках размерность указана как  $N$ , кратность как  $m$ .

Анализ полученных зависимостей показывает, что при достаточно малых интервалах корреляции ( $k_0 < 10$ ) дисперсии ошибок фильтрации авторегрессионных СП 1-го и 2-го порядков достаточно близки. Увеличение размерностей и дальнейшее увеличение интервала корреляции приводит к отдалению кривых. При этом самые маленькие значения относительных дисперсий ошибок фильтрации получены для случаев  $N=3, m=(2,2,2)$ ,  $N=4, m=(2,2,2,2)$ . Это объясняется тем, что при  $m=1$  авторегрессии вдоль осей получаются достаточно колючими и их фильтрация представляет более сложную задачу.

Используя выражение (7), можно получить следующие уравнения для моделей различных размерностей, представленные в таблице 1.

На рисунке 2 представлены зависимости относительной ошибки дисперсии фильтрации от отношения сигнал/шум  $q$  для моделей трехмерного СП разных порядков при  $k_0=50$ .

Анализ кривых на графике показывает, что в случае большой размерности СП ( $N=3$ ) дисперсии ошибки фильтрации достаточно малы. В связи с этим эффективная фильтрация получается как

при маленьких отношениях сигнал/шум, так и при больших. Вместе с тем повышение кратности моделей приводит к уменьшению относительной дисперсии ошибки фильтрации.

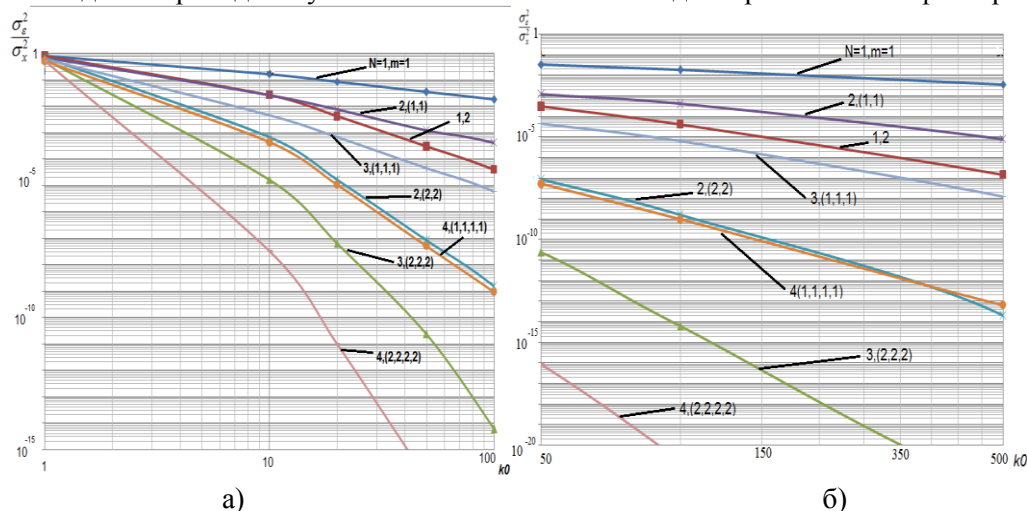


Рисунок 1. Относительные дисперсии ошибок многомерного СП.

Таблица 1. Эффективность фильтрации моделей разных размерностей.

| N | $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2}$   |
|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta_0^2}{(1 + \rho_1^2 - 2\rho_1 \cos \lambda_1)^{m_1} + q\beta_0^2} d\lambda_1$  |
| 2 | $\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta_0^2}{(1 + \rho_1^2 - 2\rho_1 \cos \lambda_1)^{m_1} (1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos \lambda_2)^{m_2} + q\beta_0^2} d\lambda_1 d\lambda_2$   |
| 3 | $\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta_0^2}{(1 + \rho_1^2 - 2\rho_1 \cos \lambda_1)^{m_1} (1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos \lambda_2)^{m_2} (1 + \rho_3^2 - 2\rho_3 \cos \lambda_3)^{m_3} + q\beta_0^2} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$  |
| 4 | $\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta_0^2}{(1 + \rho_1^2 - 2\rho_1 \cos \lambda_1)^{m_1} (1 + \rho_2^2 - 2\rho_2 \cos \lambda_2)^{m_2} (1 + \rho_3^2 - 2\rho_3 \cos \lambda_3)^{m_3} (1 + \rho_4^2 - 2\rho_4 \cos \lambda_4)^{m_4} + q\beta_0^2} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_4$ |

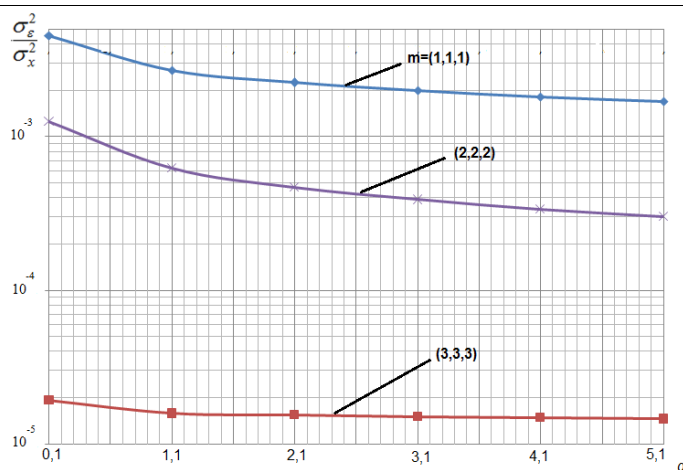


Рисунок 2. Относительные дисперсии ошибок фильтрации трехмерного СП.

На рисунке 3 представлены зависимости относительных дисперсий ошибок фильтрации от размерности СП для случаев  $k\theta=100$ ,  $q=0.01$  и кратностей  $m=1$  и  $m=2$ .

Анализ представленных на рисунке 3 кривых показывает, что повышение размерности СП приводит к значительному повышению эффективности фильтрации, что связано с большим

количеством корреляционных связей в многомерной модели. При этом большие размерности обеспечивают дисперсии ошибок фильтрации, стремящиеся к 0 ( $\sim 10^{-15}$ ) уже при кратностях вдоль каждой оси  $m=2$ . В то же время при  $m=1$  дисперсия ошибки фильтрации на несколько порядков больше.

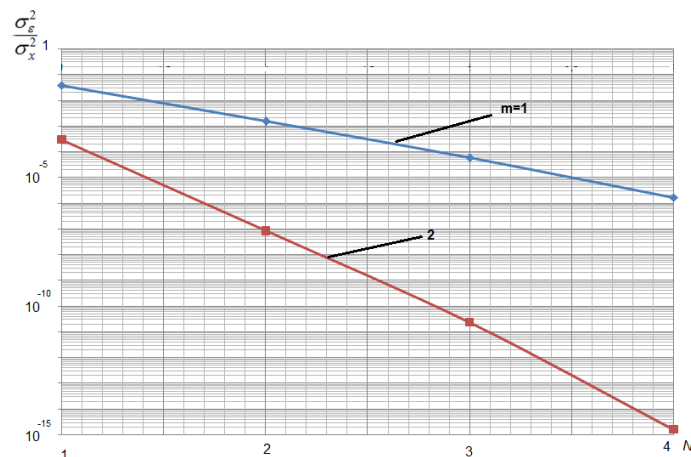


Рисунок 3. Зависимость относительной дисперсии ошибки от размерности.

#### 4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследована эффективность фильтрации многомерных СП с кратными корнями характеристических уравнений. При этом увеличение размерностей и порядков моделей приводит к значительному уменьшению относительной дисперсии ошибки фильтрации. Поэтому целесообразно использовать менее сложные в вычислительном плане математические модели СП, которые обеспечивают достаточно малые ошибки. Например, уже для размерности  $N=3$  можно добиться относительной ошибки порядка  $10^{-5}$  при  $q=0.01$  для кратностей  $m=(3,3,3)$ . Кроме того, проведены исследования эффективности фильтрации в зависимости от размерности СП. Следует отметить, что в логарифмических осях данные зависимости близки к линейным для размерностей  $N=1, \dots, 4$ .

#### 5. Литература

- [1] Ohtsu, K. Time Series Analysis Through AR Modeling. In: Time Series Modeling for Analysis and Control / K. Ohtsu, H. Peng, G. Kitagawa // Springer Briefs in Statistics, Springer, Tokyo. – 2015. – P. 7-56.
- [2] Aue, A. Quasi-Likelihood Estimation In Stationary And Nonstationary Autoregressive Models With Random Coefficients / A. Aue, L. Horvath // Statistica Sinica. – 2011. – Vol. 21. – P. 973-999.
- [3] Пралине, Е.Ю. Тенденции в обработке случайных полей при моделировании // Сборник научных трудов по материалам МНПК «Новая парадигма науки и образования: на пути к конвергенции знаний, технологий, общества». – Смоленск, 2017. - С. 72-73.
- [4] Vasil'ev, K.K. Doubly stochastic models of images / K.K. Vasil'ev, V.E. Dement'ev, N.A. Andriyanov // Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications). – 2015. - Vol. 25(1). – P. 105-110.
- [5] Bolin, D. Models and Methods for Random Fields in Spatial Statistics with Computational Efficiency from Markov Properties // Faculty of Engineering, Centre for Mathematical Sciences, Mathematical Statistics, Lund University, 2012. – P. 118-126.
- [6] Андриянов, Н.А. Применение авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений для представления и фильтрации изображений / Н.А. Андриянов, К.К. Васильев // Сборник трудов ИТНТ-2018. – Самара: Новая техника. – 2018. – С. 1023-1031.
- [7] Васильев, К.К. Анализ авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений / К.К. Васильев, Н.А. Андриянов // Радиотехника. – 2017. – № 6. – С. 13-17.

- [8] Васильев, К.К. Эффективность фильтрации случайных полей с кратными корнями характеристических уравнений // К.К. Васильев, Н.А. Андриянов, Х.А. Абдулкадим // Радиотехника. – 2018. – № 6. – С. 20-23.

### Благодарности

Результаты получены при поддержке гранта РФФИ №17-01-00179.

## Optimal filtering of multidimensional random fields generated by autoregressions with multiple roots of characteristic equations

N.A. Andriyanov<sup>1,2</sup>, K.K. Vasiliev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ulyanovsk State Technical University, Severny Venets street 32, Ulyanovsk, Russia, 432027

<sup>2</sup>Ulyanovsk Institute of Civil Aviation, Mozhaiskogo street 8/8, Ulyanovsk, Russia, 432071

**Abstract.** The main methods used in digital image processing can be divided into those based on the mathematical description of random fields, and on private highly specialized algorithms that allow one to obtain an effective solution to a specific problem. At the same time, in the second case, the applied nature of research prevails, while the methods focused on modeling are fundamental. Furthermore, the use of mathematical models is a good tool for a comparative analysis of theoretical expressions and simulation results. Autoregressive random fields can be used for image description, however, such models have pronounced anisotropy, and the images are too sharp. The elimination of this drawback is possible by using models with multiple roots of characteristic equations. The analysis shows that such models provides fewer errors than the autoregressive models when filtering images with smoothly varying brightness. However, studies of the dependences of filtration efficiency for multidimensional autoregressive random fields have almost not been carried out. The article discusses the solution of the problem of optimal filtering of images based on models with multiple roots of characteristic equations. Theoretical dependences of the relative variance of the filtering error on the dimension of random fields are obtained.