Орбитальный угловой момент вихревых лазерных пучков Ханкеля с круговой поляризацией

М.А. Волынов[а], В. В. Котляр[а,б], А. А. Ковалев[а,б]

[а] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия*
[б] *Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, ул. Молодогвардейская , 151, Самара, Россия*

Аннотация

Получены явные выражения для амплитуд всех проекций векторов напряженности электрического и магнитного поля для вихревых пучков Ханкеля с правой и левой круговой поляризацией.. Эти амплитуды точно удовлетворяют уравнениям Максвелла. Приводится сравнение с полученными ранее результатами для пучков Ханкеля с линейной поляризацией.
Ключевые слова: векторные пучки; пучок Ханкеля; круговая поляризация; орбитальный угловой момент; сферические волны

1. Введение

Наиболее известными решениями непараксиального уравнения Гельмгольца являются плоские и сферические волны, моды (пучки) Бесселя. По данным решениям были получены явные аналитические выражения для проекций электрического и магнитного векторов полей электромагнитной волны пучка Бесселя нулевого порядка и его TE и TM модовых состояний и для произвольного порядка с линейной и круговыми поляризациями [1,2]. Также в [3] были рассмотрены ассиметричные бесселевы моды, отличающиеся смещением по действительной и мнимой координатам. Недавно было найдено новое решение непараксиального уравнения Гельмгольца, названное пучком Ханкеля. Амплитуда таких пучков описывается функцией Ханкеля полуцелого порядка. Пучок Ханкеля нулевого порядка совпадает со сферической волной. В работе [4] были рассмотрены скалярные вихревые пучки Ханкеля 1-ого, 2-ого и 3-его типов. В [5] были получены выражения для всех проекций E-, H-векторов напряженности электромагнитной волны векторного пучка Ханкеля в случае с линейной поляризацией с помощью метода углового спектра.

В данной работе рассмотрены векторные непараксиальные пучки Ханкеля с правой и левой круговой поляризацией. Получены явные выражения для проекций электрического и магнитного вектора. Рассмотрено приближение в дальней зоне.

2. Проекции векторов электромагнитного поля для правой и левой круговой поляризации

Метод углового спектра, более подробно рассмотренный в работе [6], позволяет вычислить проекции электрического и магнитного векторов пучка Ханкеля с правой и левой круговой поляризацией. Согласно данному методу, данные проекции вычисляются с использованием трех интегралов, выражения для которых найдены в [5,6].

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A(\rho,\theta)\times\exp\left[ikr\rho\cos(\varphi-\theta)-kz\sqrt{\rho^2-1}\right]\rho d\rho d\varphi\,, \\
I_2 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{A(\rho,\theta)}{\sqrt{\rho^2-1}}\times\exp\left[ikr\rho\cos(\varphi-\theta)-kz\sqrt{\rho^2-1}\right]\rho d\rho d\varphi\,, \\
I_3 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A(\rho,\theta)\sqrt{\rho^2-1}\times\exp\left[ikr\rho\cos(\varphi-\theta)-kz\sqrt{\rho^2-1}\right]\rho d\rho d\varphi\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $A(\rho,\theta)$ - комплексная амплитуда спектра плоских волн, (x,y,z) - декартовы координаты, z – координата вдоль оптической оси, (r,φ,z) - цилиндрические координаты и (ρ,θ) - безразмерные полярные координаты спектра плоских волн.

Выделяя «вихревую» составляющую амплитуды спектра плоских волн:

$$A(\rho,\theta)=A(\rho)\exp(in\theta)\,, \tag{2}$$

и предполагая, что $A(\rho)=\rho^n$, можно вычислить интегралы (1) и получить следующие выражения для них:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= i^{n-1}\pi\lambda^{1/2}zr^n e^{in\varphi}\Psi_{n+3/2}(R) \\
I_2 &= i^{n-1}\pi\lambda^{1/2}r^n e^{in\varphi}\Psi_{n+1/2}(R)\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$I_3 = i^{n-1}\pi\lambda^{1/2} r^n e^{in\varphi}\left[z^2\Psi_{n+5/2}(R) - \frac{1}{k}\Psi_{n+3/2}(R)\right],$$

где $\Psi_{n+l}(R) = \dfrac{H_{n+l}(R)}{R^{n+l}}$, $R = \sqrt{r^2+z^2}$. (4)

Электрическое поле задается выражением:

$$\hat{E}(x,y,z) = (\alpha_z\hat{x} + \beta_z\hat{y})E(x,y,z) + E_z(x,y,z)\hat{z}. \tag{5}$$

Для круговой поляризации $\alpha_z = 1$, $\beta_z = \pm i$. (6)

Выражения для нахождения компонент векторов электрического и магнитного поля запишем следующим образом:

$$\begin{cases} E_x = \alpha_z I_1 \\ E_y = i\alpha_z I_1 = iE_x \\ E_z = \alpha_z \dfrac{i}{k}\dfrac{\partial}{\partial x} I_2 + \beta_z \dfrac{i}{k}\dfrac{\partial}{\partial y} I_2 \end{cases}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} H_x = \dfrac{i}{k\mu}\left(\dfrac{i}{k}\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x} I_2 \mp \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} I_2 - i\dfrac{\partial I_1}{\partial z}\right) \\ H_y = \dfrac{i}{k\mu}\left(\dfrac{\partial I_1}{\partial z} - \dfrac{i}{k}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} I_2 \mp \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x} I_2\right) \\ H_z = \dfrac{i}{k\mu}\left(\pm i\dfrac{\partial}{\partial x} I_1 - \dfrac{\partial}{\partial y} I_1\right) \end{cases}. \tag{8}$$

Выполнив подстановку (6) в (7) и сделав некоторые преобразования выражений, можно найти проекции электрического $E = (E_x, E_y, E_z)$ и магнитного $H = (H_x, H_y, H_z)$ векторов для конкретных правой $E_x + iE_y$ и левой $E_x - iE_y$ круговых поляризаций пучка Ханкеля. Будем обозначать компоненты правой поляризации со знаком «+», левой со знаком «-».

Для пучка Ханкеля с правой круговой поляризацией получим:

$$\begin{cases} E_x^+(r,\varphi,z) = i^{n-1}\pi\lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+3/2}(R) \\ E_y^+(r,\varphi,z) = i^{n}\pi\lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+3/2}(R) \\ E_z^+(r,\varphi,z) = i^{n+1}\pi\lambda^{1/2} (re^{i\varphi})^{n+1} \Psi_{n+3/2}(R) \\ H_x^+(r,\varphi,z) = i^{n-1}\dfrac{\lambda^{3/2}}{2\mu}(re^{i\varphi})^n\left\{ (n+2)\Psi_{n+3/2}(R) - k(z^2 - ir^2e^{i\varphi}\sin\varphi)\Psi_{n+5/2}(R)\right\} \\ H_y^+(r,\varphi,z) = i^{n}\dfrac{\lambda^{3/2}}{2\mu}(re^{i\varphi})^n\left\{ (n+2)\Psi_{n+3/2}(R) - k(z^2 + r^2e^{i\varphi}\cos\varphi)\Psi_{n+5/2}(R)\right\} \\ H_z^+(r,\varphi,z) = i^{n-1}\dfrac{\pi\lambda^{1/2}z}{\mu}(re^{i\varphi})^{n+1}\Psi_{n+5/2}(R) \end{cases}. \tag{9}$$

Для пучка Ханкеля с левой круговой поляризацией получим:

$$
\begin{cases}
E_x^-(r,\varphi,z) = i^{n-1}\pi\lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+3/2}(R) \\
E_y^-(r,\varphi,z) = -i^{n}\pi\lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+3/2}(R) \\
E_z^-(r,\varphi,z) = i^{n-1}\lambda^{3/2} (re^{i\varphi})^{n-1} \left\{ n\Psi_{n+1/2}(R) - \dfrac{kr^2}{2}\Psi_{n+3/2}(R) \right\} \\
H_x^-(r,\varphi,z) = i^{n+1}\dfrac{\lambda^{3/2}}{2\mu}(re^{i\varphi})^n \left\{ \dfrac{2n(n-1)e^{-2i\varphi}}{kr^2}\Psi_{n+1/2}(R) - (2ne^{-2i\varphi} - n - 2)\Psi_{n+3/2}(R) - \right. \\
\left. -k(z^2 + ir^2 e^{-i\varphi}\sin\varphi)\Psi_{n+5/2}(R) \right\} \\
H_y^-(r,\varphi,z) = i^{n}\dfrac{\lambda^{3/2}}{2\mu}(re^{i\varphi})^n \left\{ \dfrac{2n(n-1)e^{-2i\varphi}}{kr^2}\Psi_{n+1/2}(R) + (2ne^{-2i\varphi} + n + 2)\Psi_{n+3/2}(R) - \right. \\
\left. -k(z^2 + r^2 e^{-i\varphi}\cos\varphi)\Psi_{n+5/2}(R) \right\} \\
H_z^-(r,\varphi,z) = i^{n-1}\dfrac{\lambda^{3/2} z}{\mu}(re^{i\varphi})^{n-1} \left\{ n\Psi_{n+3/2}(R) - \dfrac{kr^2}{2}\Psi_{n+5/2}(R) \right\}
\end{cases}
. \qquad (10)
$$

Из сравнения (9) и (10) видно, что правая круговая поляризация при положительном топологическом заряде n увеличивает на единицу этот заряд у амплитуд продольных проекций электрического и магнитного векторов, и, наоборот, левая круговая поляризация уменьшает на единицу топологический заряд оптического вихря n у амплитуд продольных проекций электрического и магнитного векторов. У остальных проекций топологический заряд не изменяется и остается равным n. Это приводит к тому, что при отсутствии оптического вихря ($n = 0$) продольные компоненты пучка Ханкеля с левой и правой поляризациями представляют собой оптические вихри с топологическими зарядами n=±1:

$$
E_{oz}^{\pm}(\rho,\varphi,z) = i\pi\lambda^{1/2} re^{\pm i\varphi}\Psi_{3/2}(R), \qquad (11)
$$

$$
H_{oz}^{\pm}(\rho,\varphi,z) = \mp\frac{i\pi\lambda^{1/2} z}{\mu} re^{\pm i\varphi}\Psi_{5/2}(R) \;. \qquad (12)
$$

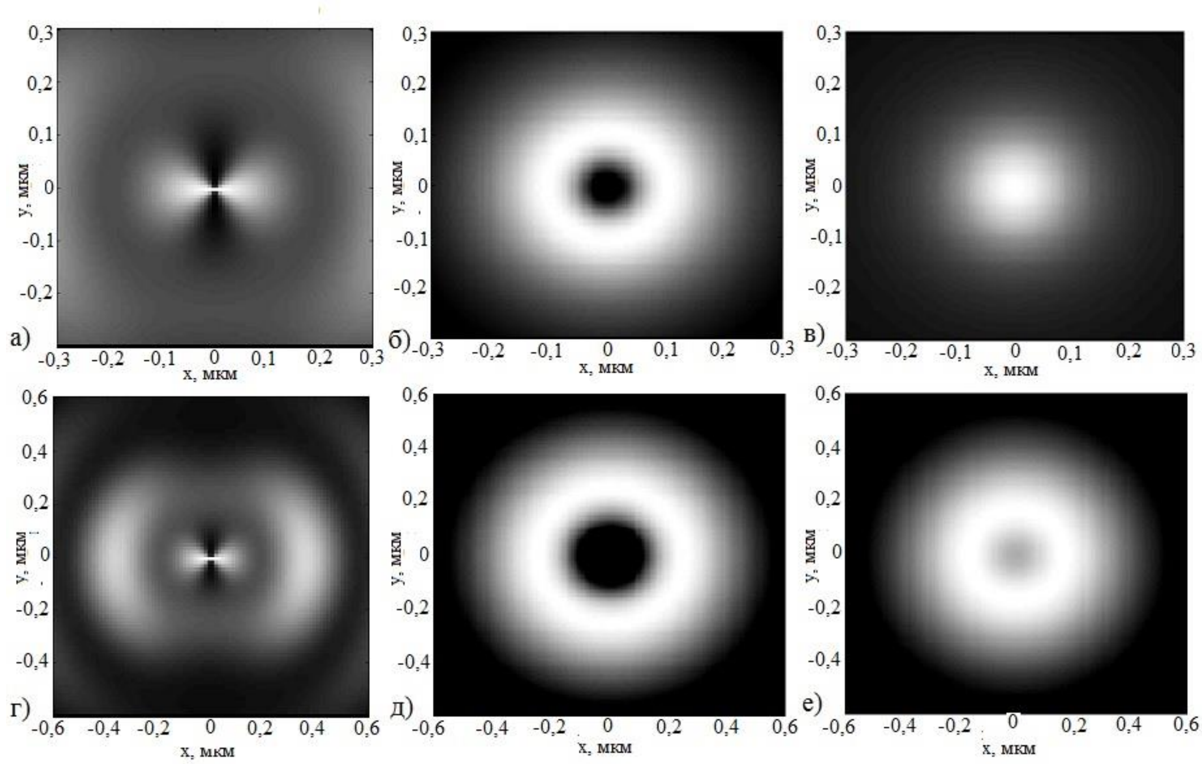

Рис. 1 Распределения интенсивности $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$ пучка Ханкеля (n=1) с линейной $E_y = 0$ (а,г), правой круговой (б,д) и левой круговой (в,е) поляризациями на расстояниях z=λ/4(а-в) , z=λ/2(г-е).

Пусть топологический заряд n=1 на оптической оси (r=0). В этом случае от нуля отличны только продольные компоненты электромагнитного поля пучка Ханкеля с левой поляризацией:

$$E_{1z}^{-} = \lambda^{3/2}\Psi_{3/2}(z)\ ,\ H_{1z}^{-} = \frac{\lambda^{3/2} z}{\mu}\Psi_{5/2}(z)\ . \tag{13}$$

Таким образом, при n=1 и левой круговой поляризации на малых расстояниях z, вместо светового кольца формируется световое пятно, которое при удалении переходит в кольцо.

Из рис.1 видно, что если для линейной поляризации пучок Ханкеля не обладает круговой симметрией (и вращается в ближней зоне), то пучки Ханкеля с круговой поляризацией обладают круговой симметрией и имеют вид светового кольца или круга.

2. Вихревые пучки Ханкеля с круговой поляризацией в дальней зоне

В случае дифракции пучка Ханкеля в дальней зоне (при z>>λ), справедливо приближение:

$$H_l(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}(-i)^{l+1/2} e^{ix}\ . \tag{14}$$

В этом случае выражение (4) перепишется в виде:

$$\Psi_{n+l} = \frac{H_{n+l}}{R^{n+l}} = \frac{\lambda^{1/2}(-i)^{n+l+1/2} e^{ikR}}{\pi R^{n+l+1/2}}\ .$$

(15)

Подставляя (18) в (9) для пучка Ханкеля с правой поляризацией получим:

$$\begin{cases} E_x^{+}(r,\varphi,z) = i\lambda\,\dfrac{r^n z}{R^{n+2}}\,e^{in\varphi+ikR} \\ E_y^{+}(r,\varphi,z) = -\lambda\,\dfrac{r^n z}{R^{n+2}}\,e^{in\varphi+ikR} \\ E_z^{+}(r,\varphi,z) = -i\lambda\,\dfrac{r^{n+1} z}{R^{n+2}}\,e^{i(n+1)\varphi+ikR} \\ H_x^{+}(r,\varphi,z) = \dfrac{\lambda}{\mu}\left[i\,\dfrac{(n+2)}{kR^{n+2}} + \dfrac{ire^{i\varphi}\sin\varphi - z^2}{R^{n+3}}\right] r^n e^{in\varphi+ikR} \\ H_y^{+}(r,\varphi,z) = i\,\dfrac{\lambda}{\mu}\left[i\,\dfrac{(n+2)}{kR^{n+2}} - \dfrac{r^2 e^{i\varphi}\cos\varphi - z^2}{R^{n+3}}\right] r^n e^{in\varphi+ikR} \\ H_z^{+}(r,\varphi,z) = \dfrac{\lambda}{\mu}\,\dfrac{r^{n+1} z}{R^{n+3}}\,e^{i(n+1)\varphi+ikR} \end{cases}.$$

(16)

Для левой поляризации выражения можно получить подставив (18) в (10). Выражения для интенсивности для правой и левой поляризаций равны:

$$I_n^{+}(r,\varphi,z) = \left|E_x^{+}(r,\varphi,z)\right|^2 + \left|E_y^{+}(r,\varphi,z)\right|^2 + \left|E_z^{+}(r,\varphi,z)\right|^2 = \lambda^2\,\frac{r^{2n}}{R^{2n+4}}\left[r^2 + 2z^2\right], \tag{17}$$

$$I_n^{-}(r,\varphi,z) = \left|E_x^{-}(r,\varphi,z)\right|^2 + \left|E_y^{-}(r,\varphi,z)\right|^2 + \left|E_z^{-}(r,\varphi,z)\right|^2 = \lambda^2\,\frac{r^{2n}}{R^{2n+4}}\left[r^2 + 2z^2 + \frac{4n^2R^2}{k^2r^2}\right]. \tag{18}$$

Вектор Умова-Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{E}^{*} \times \mathbf{H}$ может быть рассчитан для пучков Ханкеля с круговой поляризацией, пользуясь выражениями для проекций электрического и магнитного векторов. Но эти выражения будут громоздкими, и их анализ будет затруднителен. Выражения же для проекций вектора Умова-Пойнтинга для пучка Ханкеля с круговой поляризацией в дальней зоне выглядят менее громоздкими. Приведем выражения только для поперечных проекций вектора **S**, которые участвуют в определении осевой проекции вектора углового момента. Тогда для правой круговой поляризации:

$$
\begin{aligned}
&S_{nx}^{+}\left(r,\varphi,z\right)=E_{ny}^{+*}\left(r,\varphi,z\right)H_{nz}^{+}\left(r,\varphi,z\right)-E_{nz}^{+*}\left(r,\varphi,z\right)H_{ny}^{+}\left(r,\varphi,z\right)=\\
&=\left[-\lambda\frac{r^{n}z}{R^{n+2}}e^{-in\varphi-ikR}\right]\left[\frac{\lambda}{\mu}\frac{r^{n+1}z}{R^{n+3}}e^{i(n+1)\varphi+ikR}\right]\\
&-\left[i\lambda\frac{r^{n+1}}{R^{n+2}}e^{-i(n+1)\varphi-ikR}\right]\left[i\frac{\lambda}{\mu}\left(i\frac{n+2}{kR^{n+2}}-\frac{r^{2}e^{i\varphi}\cos\varphi+z^{2}}{R^{n+3}}\right)r^{n}e^{in\varphi+ikR}\right]=\\
&=\frac{\lambda^{2}}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left[i\frac{n+2}{k}Re^{-i\varphi}-\left(r^{2}+2z^{2}\right)\cos\varphi\right],
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{ny}^{+}\left(r,\varphi,z\right)=E_{nz}^{+*}\left(r,\varphi,z\right)H_{nx}^{+}\left(r,\varphi,z\right)-E_{nx}^{*}\left(r,\varphi,z\right)H_{nz}^{+}\left(r,\varphi,z\right)=\\
&=\left[i\lambda\frac{r^{n+1}}{R^{n+2}}e^{-i(n+1)\varphi-ikR}\right]\left[\frac{\lambda}{\mu}\left(i\frac{n+2}{kR^{n+2}}+\frac{ir^{2}e^{i\varphi}\sin\varphi-z^{2}}{R^{n+3}}\right)r^{n}e^{in\varphi+ikR}\right]\\
&+\left[i\lambda\frac{r^{n}z}{R^{n+2}}e^{-in\varphi-ikR}\right]\left[\frac{\lambda}{\mu}\frac{r^{n+1}z}{R^{n+3}}e^{i(n+1)\varphi+ikR}\right]=\\
&=\frac{\lambda^{2}}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left[-\frac{n+2}{k}Re^{-i\varphi}-\left(r^{2}+2z^{2}\right)\sin\varphi\right],
\end{aligned}
\tag{20}
$$

и для левой круговой поляризации:

$$
\begin{aligned}
&S_{nx}^{-}\left(r,\varphi,z\right)=E_{ny}^{-*}\left(r,\varphi,z\right)H_{nz}^{-}\left(r,\varphi,z\right)-E_{nz}^{-*}\left(r,\varphi,z\right)H_{ny}^{-}\left(r,\varphi,z\right)=\\
&=\frac{\lambda^{2}}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left\{\begin{aligned}&2z^{2}\left(\frac{2nR}{kr^{2}}\sin\varphi-\cos\varphi\right)\\&+\left(1+\frac{2inR}{kr^{2}}\right)\left[\frac{2n\left(n-1\right)e^{-i\varphi}}{r^{2}}\frac{R^{2}}{k^{2}}+i\left(2ne^{-2i\varphi}+n+2\right)\frac{R}{k}e^{i\varphi}-r^{2}\cos\varphi\right]\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{ny}^{-}\left(r,\varphi,z\right)=E_{nz}^{-*}\left(r,\varphi,z\right)H_{nx}^{-}\left(r,\varphi,z\right)-E_{nx}^{*}\left(r,\varphi,z\right)H_{nz}^{-}\left(r,\varphi,z\right)=\\
&=\frac{\lambda^{2}}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left\{\begin{aligned}&\left(1+\frac{2inR}{kr^{2}}\right)\left[i\frac{2n\left(n-1\right)e^{-i\varphi}}{r^{2}}\frac{R^{2}}{k^{2}}-\left(2ne^{-2i\varphi}-n-2\right)\frac{R}{k}e^{i\varphi}-r^{2}\sin\varphi\right]\\&-2z^{2}\left(\sin\varphi+\frac{2nR}{kr^{2}}\cos\varphi\right)\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Проекции на ось z векторов плотности углового момента $\mathbf{j}=\mathrm{Re}\left[\mathbf{r}\times\mathbf{S}\right]$ для пучков Ханкеля в дальней зоне с правой и левой круговой поляризациями имеет вид :

$$
j_{nz}^{+}\left(r,\varphi,z\right)=\mathrm{Re}\left\{xS_{ny}^{+}\left(r,\varphi,z\right)-yS_{nx}^{+}\left(r,\varphi,z\right)\right\}=-\frac{\lambda^{2}}{\mu}\frac{n+2}{k}\frac{r^{2n+2}}{R^{2n+4}}.
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&j_{nz}^{-}\left(r,\varphi,z\right)=\mathrm{Re}\left\{xS_{ny}^{-}\left(r,\varphi,z\right)-yS_{nx}^{-}\left(r,\varphi,z\right)\right\}=\\
&=-\frac{\lambda^{2}}{\mu}\frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}}\left[4n^{2}\left(n-1\right)\frac{R^{3}}{k^{3}r^{3}}+\left(n-2\right)\frac{R}{k}r+4nz^{2}\frac{R}{kr}\right].
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Можно показать, что при $r = 0$ плотность ОУМ (23), (24) не стремится к бесконечности, а равна нулю независимо от поляризации. Заметим, что при n=0 у пучка Ханкеля остается спиновый угловой момент:

$$j_{0z}^{+}\left(r,\varphi,z\right)=-j_{0z}^{-}\left(r,\varphi,z\right)=-\frac{2\lambda^{2}}{\mu k}\frac{r^{2}}{R^{4}}\,. \tag{25}$$

4. Заключение

Получены в явном виде амплитуды всех проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей для векторного пучка Ханкеля с круговой поляризацией. Рассмотрен случай с круговой поляризацией в дальней зоне. В отличие от случая с линейной поляризацией, круговая поляризация пучка Ханкеля обладает круговой симметрией и имеет вид кольца или круга, в зависимости от расстояния z правой или левой поляризации.

Литература

[1] Mishra, S. R. A vector wave analysis of a Bessel beam // Opt. Commun. – 1991. - Vol. 85. - P. 159-161.

[2] Wang, Y. Vector analyses of linearly and circularly polarized Bessel beams using Herz vector potentials / Y. Wang, W. Dou, H. Meng // Opt. Express. – 2014. - Vol. 22, № 7 - P. 7821-7830.

[3] Котляр, В.В. Ассиметричные моды Бесселя первого и второго типа и их суперпозиции / В.В. Котляр, А.А. Ковалев // Компьютерная оптика. – 2015. - Т.39, № 1. - С. 5-11.

[4] Котляр, В.В. Непараксиальные вихревые лазерные пучки Ханкеля первого и второго типов / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.А. Сойфер // Компьютерная оптика. – 2015. – Т.39, № 3. - С. 299-304.

[5] Котляр, В.В. Векторные лазерные пучки Ханкеля с орбитальным угловым моментом / В.В. Котляр, А.А. Ковалев // Компьютерная оптика. – 2015. - Т.39, № 4. - С. 449-452.

[6] Cerjan, A. Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation / A. Cerjan, C. Cerjan // J. Opt. Soc. Am. A. – 2011. - Vol. 28. - P.2253-2260.