

Перепутывание между искусственными атомами и фотонами в резонаторах без потерь

Е.К. Башкиров¹, М.О. Гусянникова¹

¹Самарский национальный исследовательский университет имени ак. С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Исследована динамика атом-полевого перепутывания системы двух естественных или искусственных двухуровневых атомов, взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля посредством многофотонных переходов в резонаторе без потерь. Рассмотрены различные начальные состояния атомной подсистемы и интенсивное когерентное поле резонатора. При этом состояния поля и атомов в начальный момент времени считаются сепарабельными. Для малых мультиплетностей показано, что атомы и поле, которые изначально находились в чистом сепарабельном состоянии, могут возвращаться в такое состояние в процессе эволюции. Найдено, что для мультиплетностей $m \geq 3$ атомы и поле в процессе эволюции, за исключением начального момента времени, находятся в максимально перепутанном атом-полевым состоянии.

1. Введение

Электромагнитные поля являются перспективным ресурсом для квантовой обработки информации. В сочетании с различными квантовыми системами они могут быть использованы для реализации квантовых сетей, в которых перепутанная информация обрабатывается квантовыми узлами и распределяется по фотонным каналам [1, 2]. Квантовые узлы должны генерировать и распределять микроволновые запутанные поля, контролируя их испускание и прием во времени. В качестве узлов квантовых сетей могут быть использованы сверхпроводящие кубиты [3], примесные спины [4], ионы [5] др. В качестве прототипа квантовой сети могут быть рассмотрены два квантовых узла, взаимодействующих с полями резонатора. Так в недавнем эксперименте [6] квантовая сеть представляла собой два атома Rb, каждый из которых квазинепрерывно запирался в высокочастотном оптическом резонаторе. Сами узлы располагались на расстоянии 21 м и были связаны между собой оптическим кабелем. Таким образом, изучение динамики перепутывания кубитов с квантовыми полями резонаторов представляет собой важную задачу квантовой информатики. Простейшей моделью, которая используется для описания динамики взаимодействия кубита (двухуровневого атома) и квантового поля резонатора является модель Джейнса-Каммингса (МДК) и ее обобщения [7]. МДК и ее обобщения играют фундаментальную роль в квантовой оптике и квантовой информатике, поскольку позволяют описать все основные квантовые эффекты взаимодействия излучения с веществом в том числе и эффекты атом-полевого перепутывания. В современной лазерной физике большое внимание уделяется исследованию многофотонных процессов [8]. Важным шагом в изучении механизмов многофотонного взаимодействия излучения с веществом явилась экспериментальная реализация двухфотонного одноатомного микроазера на

ридберговских переходах в микроволновом резонаторе [9]. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных теоретическому исследованию свойств такого мазера на основе двухфотонной МДК [8].

Важным направлением в исследовании свойств одно- и двухтомных моделей Джейнса-Каммингса является изучение особенностей создания и контроля атом-полевых состояний в таких моделях. Для многих физических реализаций указанной моделей удалось получить атом-полевые перепутанные состояния экспериментально [8]. Теоретическое исследование перепутывания атома и поля резонатора в рамках МДК было начато в работах [10] и [11]. Позднее динамика атом-полевого перепутывания была исследована и для обобщений МДК: двухфотонной МДК [12], двухатомной МДК [13, 14, 15, 16] и т.д. В настоящей статье мы исследуем особенности атом-полевого перепутывания в двухтомной многофотонной МДК для различных начальных состояний кубитов и интенсивного когерентного резонаторного поля. Для решения поставленной задачи найдено точное решение полной временной волновой функции системы. Для анализа динамики атом-полевого перепутывания рассмотрены особенности поведения линейной атомной энтропии.

2. Модель и базовые уравнения

Рассмотрим два идентичных кубита (естественных или искусственных двухуровневых атомов), резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля посредством вырожденных m -двухфотонных переходов в идеальном резонаторе. Гамильтониан такой системы в представлении взаимодействия может быть записан в виде

$$H_2 = \hbar g \sum_{i=1}^2 (\sigma_i^+ a^m + \sigma_i^- (a^+)^m), \quad (1)$$

где a ($a + i$) – оператор уничтожения (рождения) фотонов моды поля σ_i^+ (σ_i^-) – повышающий (понижающий) операторы для i -го кубита ($i = 1, 2$), g – эффективная константа вырожденного m -фотонного атом-полевого взаимодействия.

Предполагая, что атомы в начальный момент времени находятся в суперпозиции чистых атомных состояний, а поле – в когерентном состоянии, полная волновая функция системы "атомы+поле" может быть представлена в начальный момент времени в виде:

$$|\Psi(0)\rangle = (\alpha|+, +\rangle + \beta|+, -\rangle + \gamma|-, +\rangle + \delta|-, -\rangle) \sum_{n=0}^{\infty} F_n |n\rangle. \quad (2)$$

Здесь $F_n = e^{-\bar{n}/2} e^{in\varphi} \bar{n}^{n/2} / \sqrt{n!}$, где \bar{n} – среднее число фотонов в моде когерентного поля в начальный момент времени, φ – фаза поля, а $|+\rangle$, $|-\rangle$ – основное и возбужденное состояния индивидуального атома.

Решая уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H |\Psi\rangle$$

для рассматриваемой модели и выбранного начального состояния системы (2), можно найти точное значение волновой функции в виде:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (X_{1n}(t)|+, +, n\rangle + X_{2n}(t)|+, -, n + m\rangle + X_{3n}(t)|-, +, n + m\rangle + X_{4n}(t)|-, -, n + 2m\rangle), \quad (3)$$

где коэффициенты есть

$$\begin{aligned}
X_{1n}(t) &= -\frac{1}{4\Omega_n^3(-1)^{3/2}} e^{-\sqrt{2}i\Omega_n t} \left(4b_n^2 i\Omega_n e^{\sqrt{2}i\Omega_n t} \alpha F_n + 2a_n^2 i\Omega_n \left(1 + e^{2\sqrt{2}i\Omega_n t} \right) \alpha F_n - \right. \\
&\quad \left. -i\sqrt{2}a_n^3 \left(-1 + e^{2\sqrt{2}i\Omega_n t} \right) (\beta + \gamma) F_{n+m} + \right. \\
&\quad \left. + a_n b_n \left(-i\sqrt{2}b_n \left(-1 + e^{2\sqrt{2}i\Omega_n t} \right) (\beta + \gamma) F_{n+m} + 2i\Omega_n \left(-1 + e^{\sqrt{2}i\Omega_n t} \right)^2 \delta F_{n+2m} \right) \right), \\
X_{2n}(t) &= \frac{1}{2(\Omega_n^2)} \left((\Omega_n^2) (\beta - \gamma) F_{n+m} + (\Omega_n^2) (\beta + \gamma) F_{n+m} \cos(\sqrt{2}\Omega_n t) + \right. \\
&\quad \left. + i\sqrt{2}i\Omega_n (a_n \alpha F_n + b_n \delta F_{n+2m}) i \sin \left[\sqrt{2} \Omega_n t \right] \right), \\
X_{3n}(t) &= \frac{1}{2(\Omega_n^2)} \left(-(\Omega_n^2) (\beta - \gamma) F_{n+m} + (\Omega_n^2) (\beta + \gamma) F_{n+m} \cos(\sqrt{2}\Omega_n t) + \right. \\
&\quad \left. + i\sqrt{2}i\Omega_n (a_n \alpha F_n + b_n \delta F_{n+2m}) i \sin(\sqrt{2}\Omega_n t) \right), \\
X_{4n}(t) &= -\frac{1}{4\Omega_n^3(-1)^{3/2}} e^{-\sqrt{2}i\Omega_n t} \left(2a_n b_n i\Omega_n \left(-1 + e^{\sqrt{2}i\Omega_n t} \right)^2 \alpha F_n + \right. \\
&\quad \left. + a_n^2 \left(-i\sqrt{2}b_n \left(-1 + e^{2\sqrt{2}i\Omega_n t} \right) (\beta + \gamma) F_{n+m} \right) 4i\Omega_n e^{\sqrt{2}i\Omega_n t} \delta F_{n+2m} \right) + \\
&\quad \left. + b_n^2 \left(-i\sqrt{2}b_n \left(-1 + e^{2\sqrt{2}i\Omega_n t} \right) (\beta + \gamma) F_{n+m} + 2i\Omega_n \left(1 + e^{2\sqrt{2}i\Omega_n t} \right) \delta F_{n+2m} \right) \right).
\end{aligned}$$

Здесь

$$a_n = \sqrt{\frac{(n+m)!}{n!}}, \quad b_n = \sqrt{\frac{(n+2m)!}{(n+m)!}}, \quad \Omega_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

В общем случае волновая функция системы (3) не может быть представлена в виде произведения векторов состояний атомной и полевой частей, что означает существование атом-полевого перепутывания. Для количественного анализа степени атом-полевого перепутывания воспользуемся линейной атомной энтропией [10]. Для рассматриваемой модели с гамильтонианом (1) линейная атомная энтропия может быть записана в виде:

$$S = 1 - Tr(\rho_{AT}^2),$$

где

$$\begin{aligned}
Tr(\rho_{AT}^2) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} |X_{1n}|^2 \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} |X_{2n}|^2 \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} |X_{3n}|^2 \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} |X_{4n}|^2 \right]^2 + \\
&+ 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{1,n+m} X_{2n}^* \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{1,n+m}^* X_{2n} \right] + 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{1,n+m} X_{3n}^* \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{1,n+m}^* X_{3n} \right] + \\
&+ 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{1,n+2m} X_{4n}^* \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{1,n+2m}^* X_{4n} \right] + 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{2,n} X_{3n}^* \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{2,n}^* X_{3n} \right] + \\
&+ 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{2,n+m} X_{4n}^* \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{2,n+m}^* X_{4n} \right] + 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{3,n+m} X_{4n}^* \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{3,n+m}^* X_{4n} \right].
\end{aligned}$$

Значение атомной энтропии $S = 0$ соответствует сепарабельному состоянию атомной и полевой подсистем. Для перепутанных атом-полевых состояний $S > 0$.

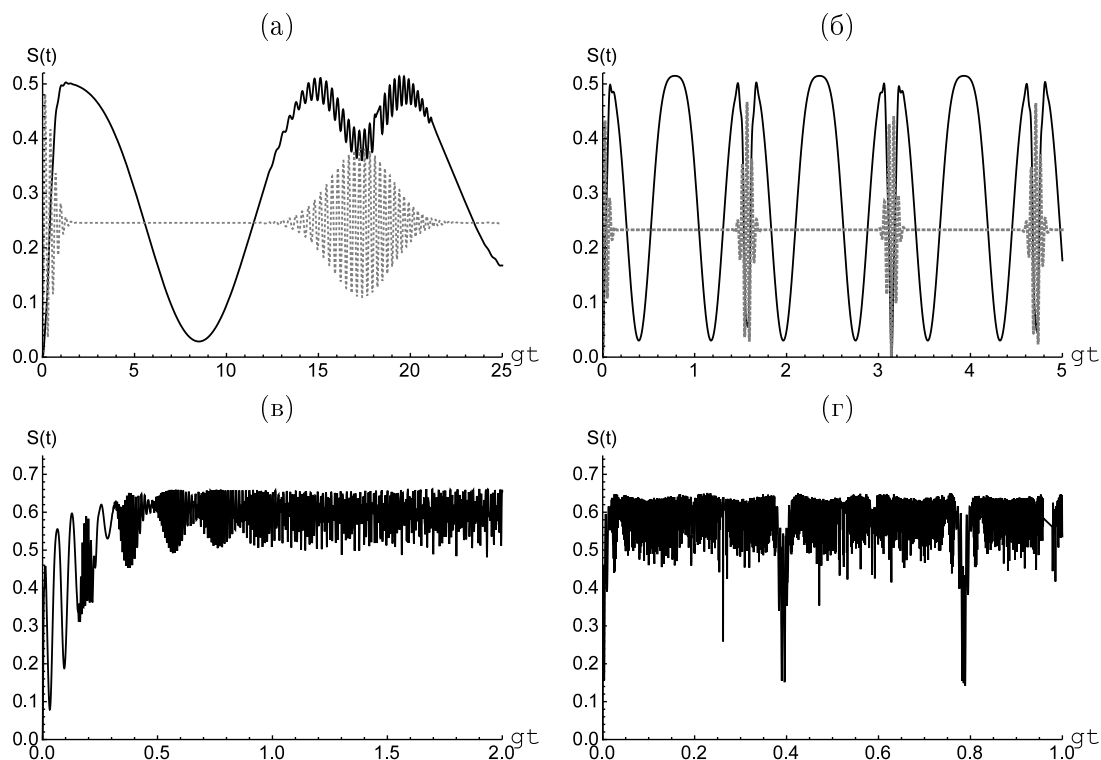


Рисунок 1. Поведение линейной атомной энтропии для начального белловского перепутанного состояния кубитов $\sqrt{1/2}|+, -\rangle + |-, +\rangle$ и различных значений мультиплетности $m = 1$ (а), $m = 2$ (б), $m = 3$ (в) и $m = 4$ (г). Среднее число фотонов в моде $\bar{n} = 30$. На первых двух рисунках серым цветом показано временное поведение вероятности обнаружить оба кубита в возбужденном состоянии

3. Результаты вычислений и обсуждение

На рисунке 1 показана временная зависимость линейной атомной энтропии, вычисленной для перепутанного начального состояний атомной подсистемы $\sqrt{\frac{1}{2}}|+, -\rangle + |-, +\rangle$ и различных значений мультиплетности m . На рисунке 2 показано временное поведение линейной энтропии для сепарабельного начального состояния кубитов. Для обоих рисунков в начальный момент времени состояния системы кубитов и мода поля сепарабельны. Регулярный характер эволюция энтропии и других наблюдаемых носит для модели с однофотонными $m = 1$ двухфотонными $m = 2$ переходами. Для этих случаев существуют такие моменты времени, для которых редуцированная энтропия стремится к нулевому значению. Это означает, что в данные моменты времени система возвращается в неперепутанное состояние атомной и полевой подсистем. Соответственно для этих моментов времени полная волновая функция системы может быть представлена как произведение зависящих от времени атомной и полевой частей. В остальные моменты времени система находится в перепутанном состоянии, причем большее значение редуцированной энтропии соответствует большей степени перепутывания. Для модели с $m \geq 3$ поведение наблюдаемых становится хаотичным, а кубиты и поле практически все время находятся в максимально перепутанном состоянии. Такая особенность атом-полевого перепутывания кубитов и поля в случае высоких значений мультиплетности может быть использована для стабилизации перепутывания, которое для малых мультиплетностей испытывает

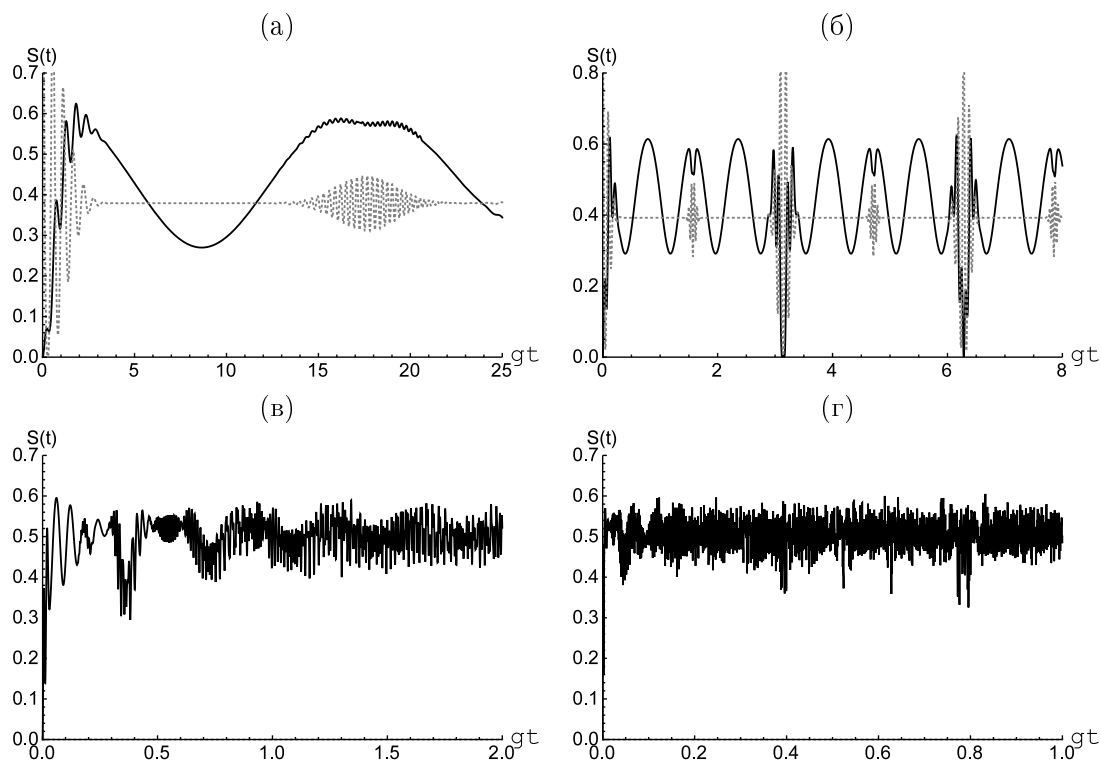


Рисунок 2. Поведение линейной атомной энтропии для начального сепарабельного состояния кубитов $|+, +\rangle$ и различных значений мультиплетности $m = 1$ (а), $m = 2$ (б), $m = 3$ (в) и $m = 4$ (г). Среднее число фотонов в моде $\bar{n} = 30$. На первых двух рисунках серым цветом показано временное поведение вероятности обнаружить оба кубита в возбужденном состоянии

осцилляции, аналогичные осцилляциям Раби населенностей.

4. Литература

- [1] Cirac, J.I. Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network / J.I. Cirac, P. Zoller, H.J. Kimble, H. Mabuchi // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — P. 3221–3224.
- [2] Kimble, H.J. The quantum internet / H.J. Kimble // *Nature*. — 2008. — Vol. 453(19). — P. 1023–1030.
- [3] Flurin, E. Superconducting Quantum Node for Entanglement and Storage of Microwave Radiation / E. Flurin, N. Roch, J.D. Pillet, F. Mallet, B. Huard // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114. — P. 090503.
- [4] Togan, E. Quantum entanglement between an optical photon and a solid-state spin qubit / E. Togan, Y. Chu, A.S. Trifonov, L. Jiang, J. Maze, L. Childress, M.V.G. Dutt, A.S. Sorensen, P.R. Hemmer, A.S. Zibrov, M.D. Lukin // *Nature*. — 2010. — Vol. 466. — P. 730–735.
- [5] Duan, L.-M. Quantum networks with trapped ions / L.-M. Duan, C. Monroe // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — Vol. 82. — P. 1209–1224.
- [6] Ritter, S. An elementary quantum network of single atoms in optical cavities / S. Ritter, C. Nolleke, C. Hahn, A. Reiserer, A. Neuzner, M. Uphoff, M. Mücke, E. Figueroa, J. Bochmann, G. Rempe // *Nature*. — 2012. — Vol. 484. — P. 195–198.
- [7] Shore, B.W. The Jaynes-Cummings Model / B.W. Shore, P.L. Knight // *J. Mod. Opt.* — 1993. — Vol. 40(7). — P. 1195–1238.
- [8] Dell'Anno, F. Multiphoton quantum optics and quantum state engineering / F. Dell'Anno, S. De Siena F. Illuminati // *Physics Reports*. — 2006. — Vol. 428. — P. 53–168.
- [9] Brune, M. Realization of a two-photon maser oscillator / M. Brune, J.-M. Raimond, P. Goy, L. Davidovich, S. Haroche // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 59(17). — P. 1899–1902.

- [10] Haroche, S. Exploring the Quantum. Atoms, Cavities and Photons / S. Haroche, J.-M. Raimond — Oxford: Oxford University Press, 2006. — 605p.
- [11] Phoenix, S.J.D. Fluctuations and entropy in models of quantum optical resonance / S.J.D. Phoenix, P.L. Knight // *Ann. Phys.* — 1988/ — Vol. 186(2). — P. 381-407.
- [12] Gea-Banacloche, J. Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: an example of state preparation by a quantum apparatus / J. Gea-Banacloche // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 65. — P. 3385-3388.
- [13] Dung, H.T. State evolution in the two-photon atom-field interaction with large initial fields / H.T. Dung, N.D. Huyen // *Phys. Rev. A.* 1994. — Vol. 49. — P. 473-480.
- [14] Dung, H.T. Two atom-single mode radiation field interaction. State evolution, level occupation probabilities and emission spectra / H.T. Dung, N.D. Huyen // *J. Mod. Opt.* — 1994. — Vol. 41. — P. 453-469.
- [15] Bashkirov, E.K. Atom-field entanglement in two-atom Jaynes-Cummings model with nondegenerate two-photon transitions / E.K. Bashkirov, M.S. Rusakova // *Opt. Comm.* — 2008. — Vol. 281(17). — P. 4380-4386.
- [16] Bashkirov, E.K. Entanglement in degenerate two-photon Tavis-Cummings model / E. K. Bashkirov // *Phys. Scr.* — 2010. — Vol. 82(1). — P. 015401.
- [17] Bashkirov, E.K. Entanglement for two-atom Tavis-Cummings model with degenerate two-photon transitions in the presence of the Stark shift / E.K. Bashkirov, M.S. Rusakova // *Optik.* — 2012. — Vol. 123(19). — P. 1694-1699.

Entanglement between artificial atoms and photons of lossless cavities

Е.К. Башкиров¹, М.О. Guslyannikova¹

¹Samaia National Research University, Moskovskoye shosse, 34, Samara, Russia, 443086

Abstract. The dynamics of atom-field entanglement for two natural or artificial two-level atoms interacting with the mode of a quantum electromagnetic field by means of multiphoton transitions in a lossless cavity is investigated. Various initial states of the atomic subsystem and an intensive coherent field of the cavity are considered. The states of the field and atoms at the initial moment are considered to be separable. For small multiplicities, it is shown that the atoms and the field, which were initially in a pure separable state, can return to this state during the evolution of the model. It is also found that for multiplicities $m \geq 3$, the atoms and the field in the process of evolution (with the exception of the initial moment) are in the most entangled atom-field state.

Keywords: two two-level artificial atoms, quantum fields, lossless cavity, atom-field entanglement, reduced atomic entropy, quantum networks.