

Пороги цветоразличения и уравнение состояния гравитационного поля

Л.Д. Ложкин^а, О.В. Осипов^а

^а Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 443010, ул. Л. Толстого 23, Самара, Россия

Аннотация

В работе рассматривается вопрос разработки строго равноконтрастной цветовой шкалы. Известно, что в системе МКО 1931 г. (x, y) пороги цветоразличения изображаются эллипсами, которые используются для характеристики равно контрастности некоторой цветовой системы. Различные цветовые системы описываются разными значениями эллиптичности (размеров эллипсов Мак Адама). В работе предлагается новый подход к созданию строго равно контрастных цветовых систем, базирующийся на аналогии понятий «горизонт цвета» в колориметрии и «горизонт событий» в общей теории относительности (ОТО). Предложено использовать уравнение, аналогичное уравнению состояния гравитационного поля (уравнению Эйнштейна) для трансформации эллипсов в двумерной цветовой модели в окружности и эллипсоидов вращения в трехмерной модели – в шары равного диаметра. Введено понятие кривизны пространства цветоразличения и тензора «энергии цвета». Получено матричное уравнение, из которого определены коэффициенты трансформации в строго равноконтрастную цветовую систему.

Ключевые слова: обработка изображений; строго равноконтрастное цветовое пространство; цветовой locus; колориметрическая система МКО; метрический тензор; тензор кривизны; цветовой тензор; базис подвижного репера.

1. Введение

Разработка воспринимаемой равноконтрастной трехмерной цветовой шкалы явилась бы не только большим научным достижением, но и оказалась бы полезной с любой точки зрения. Ее применение упростило бы определение цвета и установление цветковых допусков, внесло бы ясность в вопрос интерпретации одномерных цветковых шкал для идентификации несколько отличающихся цветов, послужило бы руководством при изготовлении стандартных образцов цвета и оказало бы помощь в выборе гармоничных цветковых сочетаний. К сожалению, попытки создать такую шкалу до сих пор не привели к значительному успеху. Скорее наоборот, они подтвердили предположение, что такую строго равноконтрастную трехмерную шкалу вообще невозможно создать. Однако эти попытки, по крайней мере, указывают на то, что возможны достаточно хорошие аппроксимации идеального равноконтрастного цветкового пространства. В данной статье будет продолжена разработка строго равноконтрастных цветковых шкал, причем особое внимание будет уделено выводу численных выражений для таких шкал.

Если наблюдателю предложить белый, черный и группу серых образцов цветов и попросить его выбрать из них такой, который в равной степени отличается и от белого, и от черного, он столкнется с небольшой трудностью, поскольку оценка относительной величины двух больших цветковых различий, в конечном счете, основана только на субъективном впечатлении. Это является частным случаем определения цветковых различий, который Ньюхолл назвал методом отношений цветковых различий [1]. Однако нужный серый цвет можно определить, исходя из усредненной оценки нескольких наблюдателей, причем желаемая точность зависит только от количества наблюдателей и числа сделанных ими оценок. Затем цветовой интервал, находящийся между черным и средне-серым можно поделить пополам, аналогично можно поступить с интервалом – между белым и средне-серым цветами. Таким образом, диапазон от черного до белого образует равноконтрастную шкалу светлоты, состоящую из пяти равноудаленных по субъективному ощущению цветов. Это был один из методов, используемых для определения шкалы серых цветов по Манселлу [2]. Большой интерес вызывает также метод преобразования цветкового локуса, предложенный в [3].

2. Объект исследования

В начале 40-х годов прошлого столетия появились публикации результатов опытов, проведенных Мак Адамом по выяснению порогов цветоразличения [4]. Пороги цветоразличения графически отображались в виде эллипсов на цветовой диаграмме МКО 1931 г. (x, y) . На рис. 1 изображены результаты опытов Мак Адама, которые впоследствии получили название эллипсов Мак Адама. В системе МКО 1931 г. (x, y) пороги цветоразличения отображаются эллипсами, которые можно использовать как характеристику равно контрастности конкретной цветовой системы. Для этого достаточно ввести понятие эллиптичности цветовой поверхности, определяемой как отношение максимальной оси эллипса к минимальной. Для различных колориметрических систем МКО значения эллиптичности разные [5].

Проведем мысленный эксперимент. Будем уменьшать яркость стимула, в определенный момент колбочки глаза, имеющие более низкую чувствительность, по сравнению с палочками, выключаются и наступает сумрачное зрение в серых тонах, а это означает, что порог цветоразличения увеличивается и при нулевой яркости порог цветоразличения будет равен бесконечности, а конкретно ограничен цветковым locusом. Очевидно, что при увеличении яркости излучения до очень больших значений, цветочувствительность глаза также будет уменьшаться. Это явление можно

объяснить тем, что распад йодопсина (светочувствительное вещество колбочек глаза) будет происходить быстрее, нежели его восстановление. Глаз станет «цветослепым», т.е. величина порога цветоразличения будет увеличиваться по мере увеличения яркости излучения и при очень больших яркостях порог цветоразличения будет равен бесконечности. Графически это представлено на рис. 2 в виде однополостного гиперболоида.

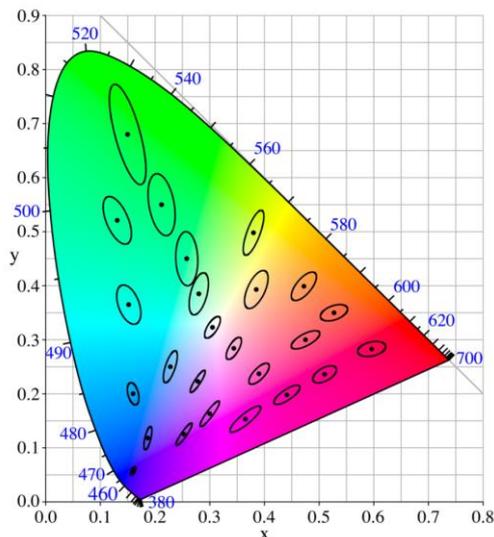


Рис.1. Эллипсы Мак Адама (для наглядности размеры эллипсов увеличены в 10 раз).

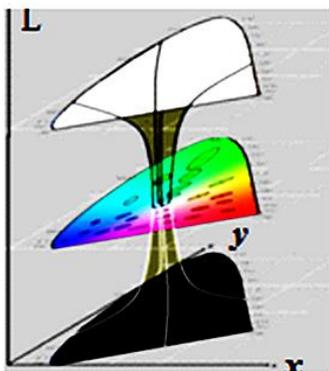


Рис.2. Зависимость порогов цветоразличения от яркости .

Для начала введем некоторые понятия:

1. Горизонт цвета (аналогично «горизонту событий» в общей теории относительности) – некий объем, в котором, с точки зрения цветоразличения глаза, цвет – однородный;
2. Бесконечность – область, ограниченная цветовым locusом;

Рассмотрим некоторые области этого гиперболоида. В верхней и нижней частях, окрашенных соответственно в белый и черный цвета, можно сказать, что горизонт цвета уходит в бесконечность. Сами эти поверхности линейны, плоские и имеют евклидовую геометрию. Более сложную структуру имеет пространство, расположенное в центральной части гиперболоида.

Горизонт цвета имеет малый радиус, следовательно, пространство, заключенное под горизонтом цвета, искривлено и замкнуто, аналогично, как это имеет место в фундаментальной теории эволюции звезд. В связи с этим можно для решения вопросов порогов цветовосприятия, а также для создания новых равноконтрастных цветовых систем, в которых бы все эллипсы Мак Адама трансформировались в одинаковые окружности, а в трехмерном пространстве – в шары равного диаметра, можно использовать уравнение Эйнштейна (уравнение состояния гравитационного поля) [6].

3. Методы

Уравнение состояния гравитационного поля выглядит в ОТО следующим образом [6]:

$$\left[\hat{R}_{ij} \right] - \frac{R}{2} \left[\hat{g}_{ij} \right] + \Lambda \left[\hat{g}_{ij} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} \left[\hat{T}_{ij} \right], \tag{1}$$

где $[\hat{\mathbf{R}}_{ij}]$ – тензор Риччи, получающийся из тензора кривизны пространства-времени $[\hat{\mathbf{R}}_{ijkl}]$ посредством свёртки его по паре индексов; R – скалярная кривизна, то есть свёрнутый тензор Риччи, $[\hat{\mathbf{g}}_{ij}]$ – метрический тензор, Λ – космологическая постоянная, $[\hat{\mathbf{T}}_{ij}]$ – тензор энергии-импульса; c – скорость света в вакууме; G – гравитационная постоянная.

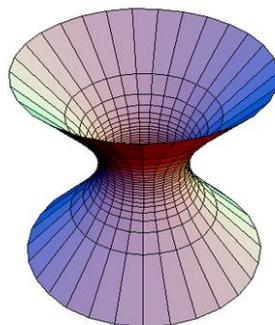


Рис.3. Графическая интерпретация решения Шварцшильда.

Уравнения Эйнштейна не налагают никаких ограничений на используемые для описания «пространства-времени» координаты, то есть обладают свойством общей ковариантности и ограничивают выбор лишь 6 из 10 независимых компонент симметричного метрического тензора. Поэтому их решение неоднозначно без введения некоторых ограничений на компоненты метрики, называемых координатными условиями [7]. Решая уравнения Эйнштейна (1) совместно с правильно подобранными координатными условиями, можно найти все 10 независимых компонент симметричного метрического тензора.

Метрический тензор позволяет определить квадрат интервала в искривлённом пространстве, определяющий расстояние в метрическом пространстве:

$$\delta S^2 = [\hat{\mathbf{g}}_{ij}](x) \delta x^a \delta x^b. \quad (2)$$

Рассмотрим в отдельности составляющие уравнения (1). Это уравнение предполагает четырехмерное пространство-время, поэтому будем рассматривать его компоненты в четырехмерном пространстве. Согласно [8], в так называемых Шварцшильдских координатах t, r, θ, φ , из которых 3 последних аналогичны сферическим, метрический тензор имеет вид:

$$[\hat{\mathbf{g}}_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где r_s – радиус Шварцшильда, равный гравитационному радиусу.

Выражение (2) в данной метрике записывается следующим образом:

$$\delta S^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \delta t^2 - \frac{\delta r^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 (\sin^2 \theta \delta \varphi^2 + \delta \theta^2). \quad (4)$$

На рис. 3 приведена графическая интерпретация пространства Шварцшильдом. На основании сходства рис. 2 и 3 можно сделать вывод о применимости математического аппарата, изложенного выше, для построения строго равноконтрастного цветового пространства.

Следующим элементом уравнения (1) является тензор энергии-импульса, который в нашем случае заменится в дальнейшем на тензор энергии цвета.

Кривизна пространства цветоразличения. Рассмотрим теперь понятие кривизны пространства цветоразличения, которая может быть описана тензором Риччи. Из него может быть построена скалярная величина по следующей формуле:

$$R = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [\hat{\mathbf{R}}_{ij}] [\hat{\mathbf{g}}_{ij}]. \quad (5)$$

Переход от компонент тензора Риччи к скалярной кривизне R – это, на первый взгляд, потеря информации, т.е. девять величин заменяются одной. Однако в двумерном случае никакой потери информации не происходит. Действительно, компоненты тензора кривизны кососимметричны как по верхней паре индексов, так и по нижней паре. В работе доказано, что скалярная кривизна в случае сферической поверхности радиуса r_0 вычисляется как $R = 2/r_0$.

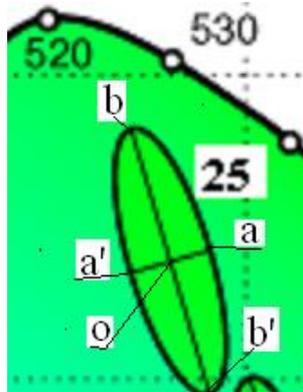


Рис.4. Отдельно взятый эллипс Мак Адама.

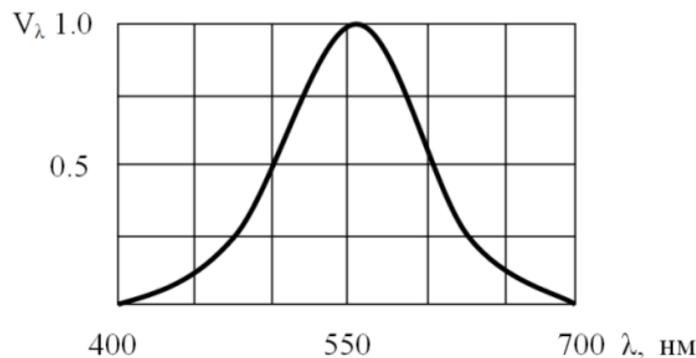


Рис.5. Кривая видности глаза.

Тензор энергии цвета. Введем понятие тензора энергии цвета $[\hat{\mathbf{C}}_{ij}]$. Для обозначения новых компонент этого тензора, обратимся к рис. 4. Очевидно, что плотности энергии в тензоре энергии-импульса в ОТО будет соответствовать значение плотности яркости эллипса Мак Адама. Согласно определению Мак Адама, данный эллипс, а с учетом яркости – эллипсоид, является порогом цветоразличения и яркости. Значит, с точки зрения глаза, данный эллипсоид будет восприниматься как геометрическая точка, никаких цветовых и яркостных различий по области (и внутри тоже) не будет. Поэтому плотность световой энергии будет равна яркости точки, например, центра эллипса (рис. 4). Поскольку эти эллипсы Мак Адам получил в своих опытах (измеряя координаты цвета) еще в первой половине прошлого столетия и фактически в наше время достаточно трудно повторить эти опыты, то была разработана прикладная программа, позволяющая по изображению эллипсов на цветовом локусе определять координаты любой точки и ее яркость. Для определения яркости указанных точек поступим следующим образом. Предположим, что цветности каждой точки эллипса создаются с помощью монохромных излучателей (два спектральных цвета). При вычислении яркости спектральных цветов можно взять кривую видности глаза (рис. 5) и в соответствии с длиной волны спектрального цвета цветового локуса определить относительную величину ощущения яркости по этой кривой.

Пропуская математические выкладки, в связи с их громоздкостью, приведем итоговое выражение для тензора энергии цвета:

$$[\hat{\mathbf{C}}_{ij}] = \begin{bmatrix} L_0 & L_d & L_a & L_b \\ L_d & (L_d - L_0)S^{-1} & (L_a - L_0)S^{-1} & (L_b - L_0)S^{-1} \\ L_a & (L_d - L_0)S^{-1} & (L_a - L_0)S^{-1} & (L_b - L_0)S^{-1} \\ L_b & (L_d - L_0)S^{-1} & (L_a - L_0)S^{-1} & (L_b - L_0)S^{-1} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где S – площадь эллипса; L_0, L_a, L_b, L_d – яркости центра эллипсоида и точек на поверхности эллипсоида, соответствующие главным полуосям.

Также, вводя в элементы метрического тензора (3) величину порога цветоразличения r_0 , получаем:

$$[\hat{\mathbf{g}}_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_0}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом, переход к строго равноконтрастной цветовой системе сводится к решению уравнения вида, аналогичному уравнению (1):

$$\frac{2}{r_0} [\hat{\mathbf{I}}] - \frac{1}{r_0} [\hat{\mathbf{g}}_{ij}] = [\hat{\mathbf{k}}_{ij}] [\hat{\mathbf{C}}_{ij}], \quad (8)$$

где $[\hat{\mathbf{k}}_{ij}]$ – диагональная матрица констант, пропорциональных коэффициентам «подвижности» репера в пространстве геометрии Римана; $\hat{\mathbf{I}}$ – единичная диагональная матрица, размерностью 4x4; тензор энергии цвета и метрический тензор определяются формулами (6) и (7).

Таким образом, переход к строго равноконтрастной системе цветового пространства сводится к определению элементов тензора $[\hat{\mathbf{k}}_{ij}]$. Из-за ограничения объема статьи, опустим математические выводы и запишем выражения для указанных коэффициентов:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{(2 - r_0 b^2 d^2) \zeta_T}{r_0}; \\ k_{22} &= \frac{(2 - r_0^3 a^2 d^2) \zeta_H}{r_0}; \\ k_{33} &= \frac{[2 - r_0^3 a^2 b^2 (1 - d^2)] \sin^2 \theta L_S}{r_0}, \end{aligned} \quad (9)$$

где a, b, d – полуоси эллипсоида; ζ_H – цветовая насыщенность; ζ_T – цветовой тон; L_S – яркость на поверхности эллипсоида.

Таким образом, соотношения (9) по результатам определения цветовой насыщенности, цветового тона и линейных размеров эллипсоидов позволяют осуществить переход к строго равноконтрастному цветовому пространству.

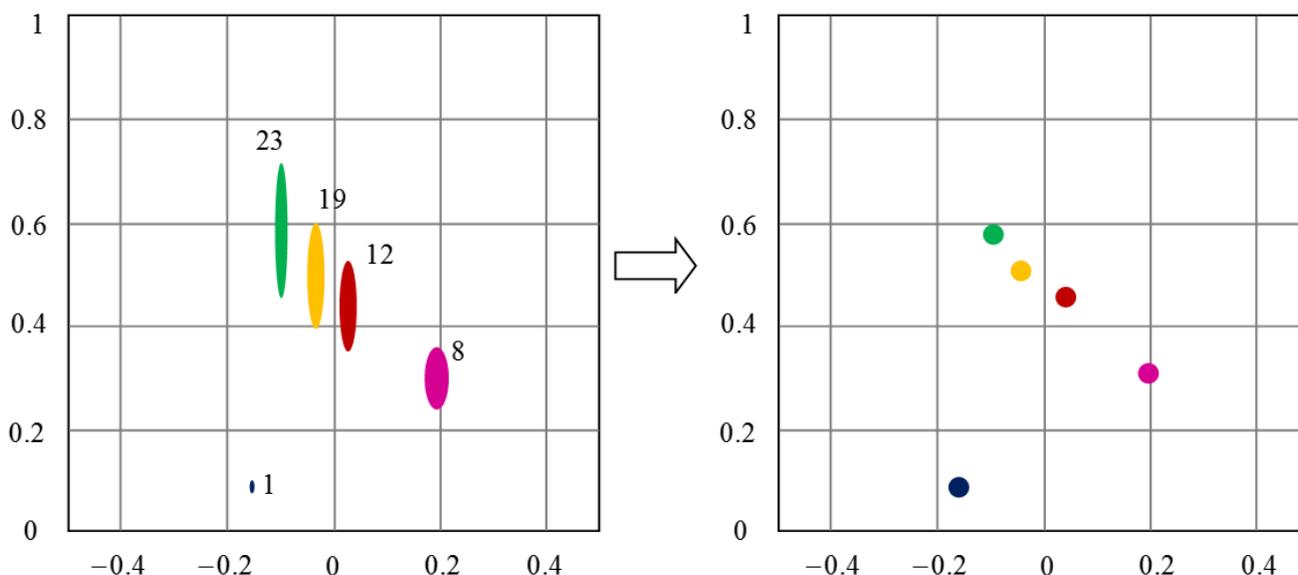


Рис.6. Сечение эллипсоидов и их преобразование в равновеликие шары. Размер эллипсоидов и шаров увеличен в 10 раз.

4. Результаты и обсуждение

На рис. 6 и 7 приведены результаты преобразования с использованием соотношений (9) с учетом изложенного математического аппарата. Это преобразование было выполнено для колориметрической системы МКО 1931 г. (x', y').

Очевидно, применяя вышеуказанную методику, можно преобразовать цветное пространство в пространстве Римана. Так, например, если изобразить сферу, радиус которой равен величине максимальной яркости (белый цвет) для системы МКО 1931 г. (x', y'), а на поверхность этой сферы нанести цветовой локус, причем сохраняя переход от метрического плоского пространства к пространству Римана, используя при этом базис подвижного репера, можно получить криволинейное цветное пространство, на котором можно изобразить в этом же базисе подвижного репера пространства цветоразличения (шары Мак Адама).

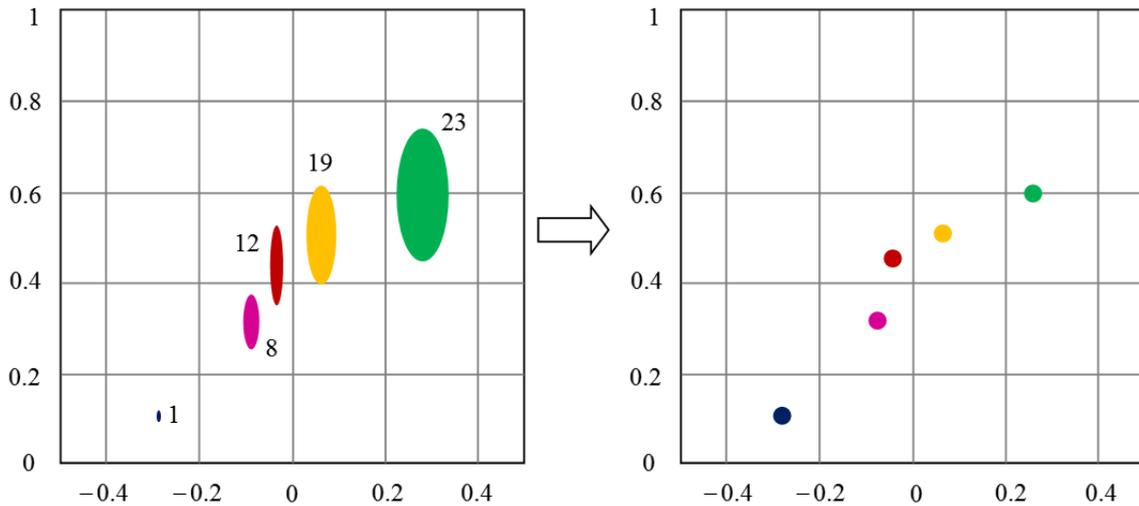


Рис.7. Сечение эллипсоидов и их преобразование в равновеликие шары. Размер эллипсоидов и шаров увеличен в 10 раз.

При данном математическом подходе исходные данные могут быть представлены в любой из существующих колориметрических систем МКО, например, в МКО 1960 г. (u, v) и (или) в колориметрической системе МКО 1976 г. (Lab).

5. Заключение

В заключение сформулируем основные выводы работы.

1. Обнаружено внешнее сходство между состоянием пространства-времени и цветовым пространством.
2. На основании этого сходства для разработки строго равноконтрастного цветового пространства было применено уравнение состояния гравитационного поля.
3. Решение данного уравнения производилось в четырехмерном пространстве, в котором использовалось трехмерное метрическое пространство (u, v, w) системы МКО 1960 г. и четвертое измерение – яркость, что позволило создать строго равноконтрастное четырехмерное цветное пространство. Аналогично был произведен расчет и для трехмерного цветового пространства.
4. Показано, что в качестве исходного цветового пространства можно использовать любое из известных цветовых пространств и на выходе будут получены равные сферы порогов цветоразличения.
5. Полученное цветное тело представляет собой сферу, радиус которой зависит от конкретной точки, изображающей цвет.
6. Цветовая разница между двумя цветами в полученной строго равноконтрастной цветовой системе определяется через длину дуги, связывающей два цвета, которые лежат на различных поверхностях концентрических сфер.

Литература

- [1] Newhall, S.M. The ratio method in the review of the Munsell colors / S.M. Newhall // Am. J. Psychol. – 1939. – V.52. – P.394.
- [2] Munsell, A. Neutral value scales I, Munsell neutral value scale / A. Munsell, T. Sloan, I. Godlove // Opt. Soc. Am. – 1933. – V.23. – P.394.
- [3] Jimenez, J.R. Scalar curvature of space as a source of information of new uniformity aspects concerning to color representation systems / J.R. Jimenez, E. Hita, J. Romero, L. Jimenez // J. Optics (Paris). – 1993. – V. 24. – № 6. – P.243-249.
- [4] Mac Adam, D.L. Visual sensitivities to color differences / D.L. Mac Adam // Josa. – 1943. – V. 33. – № 18.
- [5] Mac Adam, D.L. Color essays / D.L. Mac Adam // Josa. – 1975. – V. 65. – № 5. – P.463-485.
- [6] Паули, В. Теория относительности / Под ред. В. Л. Гинзбурга и В. П. Фролова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 328 с.
- [7] Фок, В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 504 с.
- [8] Шварцшильд, К. О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории // в кн. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979. – С. 199-207.