

# Построение КИХ-фильтров с квадратично-экспоненциальной центрально-симметричной частотной характеристикой

В.А. Фурсов<sup>а,б</sup>

<sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

<sup>б</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, ул. Молодогвардейская, 151, Самара, Россия

---

## Аннотация

Развивается подход к построению КИХ-фильтров с использованием частотного отклика, заданного в виде параметрического семейства центрально-симметричных частотных характеристик. Такие искажения типа дефокусировки наблюдаются, например, на значительном удалении от центра регистрируемого изображения или при одновременном действии искажений типа смаза и дефокусировки. Используется модель одномерного частотного отклика в виде отрезков квадратичной и экспоненциальной функций. Двумерный импульсный отклик строится путем дискретизации множества непрерывных одномерных импульсных откликов в предположении, что значения искомым параметров (частота припасовывания квадратичной и экспоненциальной функций и показатель экспоненты) принадлежат эллипсу. Предложен новый критерий настройки параметров фильтра, не требующий сравнения обработанного изображения с эталонным. Приводятся примеры реализации, иллюстрирующие возможность достижения высокого качества коррекции искажений.

*Ключевые слова:* КИХ-фильтр; импульсный отклик; частотный отклик; обработка изображений

---

## 1. Введение

В последние годы происходит бурное развитие мобильных приборов, одной из функций которых является регистрация изображений. Достоинством является возможность оперативной регистрации большого числа изображений относительно дешевыми средствами. Однако, несмотря на совершенствование технических характеристик оптики регистрирующих устройств, качество получаемых изображений может быть невысоким. Связано это обычно с тем, что съемка производится «с рук» или при быстром передвижении регистрируемого объекта. Поэтому актуальна задача улучшения качества изображений с помощью их цифровой обработки с использованием встроенных в мобильные приборы алгоритмов обработки.

Наиболее подходящими для этой цели во многих отношениях являются КИХ-фильтры [1, 2, 3]. Простейшими в этом классе, с точки зрения реализации, являются инверсные КИХ-фильтры [1, 4]. Задача построения инверсного фильтра сводится к определению обратного оператора искажающей системы. При этом возникают, по крайней мере, следующие проблемы. Во-первых, передаточная функция искажающей системы может иметь полюса близкие к нулю. Кроме того, она обычно просто неизвестна.

Указанные проблемы часто удается преодолеть с использованием принципа идентификации по прецедентам [5]. В рамках этого подхода параметры восстанавливающего фильтра определяются по входным и выходным изображениям [6]. В результате идентификации получаются наилучшие, в смысле заданного критерия, параметры фильтра с учетом реальных помех [7]. При этом обычно ставится задача построения процедур восстановления экономичных, с точки зрения потребляемых вычислительных ресурсов. В рамках указанного подхода должны быть заданы параметрическая модель фильтра и тестовые изображения [8].

В работах [9, 10] рассматривались различные методы идентификации параметров восстанавливающих фильтров. В частности, исследовалась возможность снижения требований к вычислительным ресурсам путем использования математической модели искажающей системы с малым числом неизвестных параметров. Методы и алгоритмы параметрической идентификации моделей искажений изображений по малому числу наблюдений исследовались автором в работах [11, 12]. В частности, предложена технология параметрической идентификации по тестовым фрагментам, формируемым непосредственно из искаженного изображения [11].

Эта идея использовалась также в других работах автора. Однако в случае обработки изображений на мобильном устройстве трудно представить пользователя, который будет специально создавать такой тестовый фрагмент. Очевидный способ преодолеть эту трудность – снабдить прибор интерфейсом, с использованием которого пользователь может подобрать параметры фильтра вручную, по результатам нескольких пробных попыток обработки. К сожалению, этот путь (как показывает опыт работы в Photoshop) в случае интенсивных искажений также далеко не всегда приводит к успеху.

В настоящей работе предпринимается попытка построить схему настройки параметров КИХ-фильтра, допускающую автоматическую реализацию. В частности, обосновывается и формулируется критерий качества изображения, не требующий сравнения обработанного изображения с эталонным (тестовым) изображением.

В рассматриваемой здесь технологии настройки КИХ-фильтра эксплуатируется предложенная в работе [13] схема, основанная на использовании модели одномерного частотного отклика в виде отрезков квадратичной и экспоненциальной функций. Далее для краткости этот фильтр будем называть фильтром с квадратично-экспоненциальной характеристикой (КЭХ-фильтром), в английской транскрипции *Square Exponential Filter (SE-filter)*.

В указанной работе [13] технология построения КИХ-фильтра рассматривается в предположении радиальной симметрии искажений. Вместе с тем, свойство радиальной симметрии искажений может существенно нарушаться. Это

обычно имеет место на участках изображения, удаленных от центральной области изображения, либо при совместном действии искажений типа дефокусировки и смаза и др.

В отличие от работы [13] в данном случае мы отказываемся от предположения о радиальной симметрии искажений. Вместе с тем, предполагается, что двумерный частотный отклик таких искажений можно аппроксимировать поверхностью с линиями уровня, приближенно описываемыми уравнениями эллипса, протяженного в одном (часто неизвестном) направлении. При этом двумерная функция частотного отклика восстанавливающего фильтра также как и ранее задается таким образом, чтобы обеспечить усиление в области средних частот. Такой фильтр обеспечивает повышение резкости изображений, подвергшихся искажениям типа дефокусировки и смаза.

Работа организована следующим образом. В первом разделе приводится описание метода. Второй раздел посвящен обоснованию критерия, не требующего сравнения обработанного изображения с эталонным (тестовым) изображением. В следующем, третьем, разделе с использованием полученной непрерывной аппроксимации строится технология реализации дискретного КИХ-фильтра. В заключительном, четвертом, разделе приводятся результаты экспериментов, подтверждающие возможность достижения высокого качества восстановления изображений при крайне малых затратах времени на определение параметров фильтра.

## 2. Описание метода

Предположение радиальной симметрии искажений является типичным при построении КИХ-фильтров. При этом естественным является выбор опорной области в виде  $N \times N$ -квадрата со стороной  $N$  и центром в точке  $k_1 = 0, k_2 = 0$  так, что  $N$  – нечетно и  $N_1 = N_2 = N$ . Кроме прочего, это дает возможность строить КИХ-фильтр с вещественным частотным откликом [1, 4]. Хотя мы отказались от предположения радиальной симметрии, тем не менее оставим выбор опорной области в виде квадрата, поскольку обычно все равно не известно какова степень отличия импульсного отклика от радиальной симметрии. Использование квадратной опорной области позволит нам также провести сравнительные исследования эффективности предлагаемого подхода с известными методами, для которых требование радиальной симметрии и квадратной опорной области являются естественными.

В общем случае, если фильтр обладает опорной областью  $D$ :

$$\{D(n_1, n_2) : 0 \leq n_1 < N_1, 0 \leq n_2 < N_2\}. \tag{1}$$

Отсчеты изображения  $y(n_1, n_2)$ , восстановленного с помощью КИХ-фильтра, можно определить по отсчетам  $x(n_1, n_2) \in D$  искаженного изображения в соответствии с соотношением [14]:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} h(k_1, k_2) x(n_1 - k_1, n_2 - k_2), \tag{2}$$

где  $h(k_1, k_2)$  – двумерная импульсная характеристика.

В настоящей работе мы ограничимся коррекцией искажений, являющихся результатом воздействия системы, частотная характеристика которой подавляет высокие частоты, что приводит к размытию изображения. Поэтому будем строить восстанавливающий фильтр, обеспечивающий усиление средних частот. Следуя работе [13], для описания одномерного частотного отклика в радиальном направлении воспользуемся моделью QEFR-фильтра:

$$S(\omega) = \begin{cases} a\omega^2, & \text{при } |\omega| \leq \omega^*, \\ e^{-c|\omega|}, & \text{при } |\omega| > \omega^*, \end{cases} \tag{3}$$

$$S(\omega^*) = a\omega^{*2} = e^{-c\omega^*}. \tag{4}$$

Важной особенностью использования этой модели в данном случае является то, что частотные отклики зависят от направления в пространственной области. Пример типичного двумерного частотного квадратично-экспоненциального частотного отклика показан на рисунке 1.

Мы наложим связанное с этой особенностью дополнительное требование, которое, с одной стороны, является физически обоснованным, с другой стороны, существенно упростит процедуру синтеза КЭХ-фильтра. Потребуем, чтобы множество точек  $\omega^*$ , удовлетворяющих равенству (4) принадлежало некоторому эллипсу в пространственной области.

В полярной системе координат с центром в центре эллипса расстояние от центра эллипса до любой его точки в направлении луча под углом  $\varphi$  к главной оси эллипса задается выражением

$$r(\alpha) = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\alpha - \theta) + a^2 \sin^2(\alpha - \theta)}}, \tag{5}$$

где  $a, b$  – длины большой и малой полуосей эллипса,  $\theta$  – угол между направлением главной оси эллипса и осью  $k_1$  опорной области (см. рисунок 1),  $\alpha$  – угол между направлением луча и той же осью  $k_1$  такой, что  $\varphi = \alpha - \theta$ .

Если для каждой точки, находящейся под углом  $\alpha = \theta + \varphi$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$  относительно оси  $k_1$  в опорной области, центр которой совпадает с центром эллипса, определен соответствующий модели (3), (4) отсчет радиального импульсного отклика, соотношение для вычисления центрального отсчета восстановленного изображения с учетом (5) можно представить в виде:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{\forall i: r_i = r_\alpha}^{N(r_\alpha)} h(r_\alpha) x(r_i), \quad (6)$$

где

$$\bar{x}(r_i) = \frac{1}{N(r_i)} \sum_{i=1}^{N(r_i)} x(r_i). \quad (7)$$

Здесь  $h(r_\alpha)$  – значение импульсного отклика на расстоянии  $r(\alpha)$  от центра, определяемом равенством (5), а  $N(r_\alpha)$  – число отсчетов, для которых  $r_i = r_\alpha$  (это число связано с симметрией эллипса и зависит от ориентации его осей относительно сетки отсчетов).

Далее воспользуемся, полученными в работе [13], соотношениями для вычисления одномерного импульсного отклика на расстоянии  $r$  от центра опорной области:

$$h(r) = \frac{e^{-c\omega^*}}{\pi} \left[ \frac{\sin \omega^* r}{r} + \frac{2 \cos \omega^* r}{r^2 \omega} - \frac{2 \sin \omega^* r}{r^3 \omega^2} + \frac{(c \cos(\omega^* r) - r \sin(\omega^* r))}{c^2 + r^2} \right] \quad (8)$$

и в центре опорной области:

$$h(0) = \frac{\omega^* c + 3}{3c\pi} e^{-c\omega^*}. \quad (9)$$

Здесь для упрощения записей вместо  $r(\alpha)$  мы всюду применяем обозначение  $r$ . Однако не надо забывать, что значения импульсных откликов, определяемые соотношением (8), зависят от параметров  $\omega^*$  и  $r$ , которые, в свою очередь, зависят от текущего угла  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Таким образом, отсчеты импульсного отклика получаются путем дискретизации непрерывной функции (8), определяемой для всех возможных направлений угла  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

В следующем разделе мы построим технологию синтеза КЭХ-фильтра, основанную на приведенных в этом разделе моделях. При этом для формирования отсчетов двумерного импульсного отклика будет осуществляться дискретизация одномерных непрерывных импульсных откликов (8) для всех значений угла  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

### 3. Обоснование критерия и схема настройки

Основная проблема, как указывалось выше, состоит в том, чтобы построить схему настройки параметров фильтра для улучшения качества изображений при отсутствии эталонных образцов и априорной неопределенности моделей искажений. Для характеристики уровня искажений изображений широко используется пиковое отношение сигнала к шуму – PSNR (peak signal-to-noise ratio), определяемое как

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{MAX^2}{MSE} \right), \quad (10)$$

где  $MAX$  – максимальное значение, принимаемое пикселем изображения, а  $MSE$  – среднеквадратическая ошибка (СКО) для двух монохромных изображений, одно из которых является эталонным.

Чем точнее в процессе обработки изображения воспроизводится эталонное изображение, тем больше значение PSNR. Поэтому схема оптимизации параметров восстанавливающего фильтра, предложенная в работе [13], заключалась в отборе и сохранении параметров  $\omega^*$  и  $c$ , приводящих к увеличению PSNR при сравнении обработанного изображения с эталонным. Поскольку в данном случае эталонное изображение отсутствует, обработанное изображение можно сравнивать только с исходным искаженным, отбор параметров  $\omega^*$  и  $c$ , приводящих

к улучшению качества изображения, может сопровождаться только уменьшением PSNR. Однако уменьшение PSNR вовсе не означает, что качество полученного изображения будет выше.

Для определения факта улучшения качества изображения при уменьшении PSNR будем использовать признак, характеризующий средний контраст на обработанном изображении. Основанием для этого является то, что коррекция искажений типа смаза и дефокусировки должна приводить к подчеркиванию контуров. Простейшей характеристикой среднего контраста изображения является дисперсия  $D(X)$ , подсчитанная по всему изображению. Таким образом, критерий настройки параметров КЭХ-фильтра может заключаться в отборе таких параметров  $\omega^*$  и  $c$ , при которых PSNR при сравнении с исходным (искаженным) изображением уменьшается, а дисперсия обработанного изображения  $D(\hat{X})$  увеличивается.

Кроме того, значения PSNR должны быть ограничены снизу, поскольку при его малых значениях возможны значительные искажения, характеризующиеся высоким контрастом. Минимально допустимое значение PSNR должно быть достаточно высоким, при котором обеспечивается действительно высокое качество обработанного изображения. Это означает, что устойчивость описанного критерия возможна лишь в достаточно узком диапазоне значений PSNR, определяемых по исходному искаженному и обработанному изображениям.

При формулировке критерия мы также должны учитывать предположение о том, что множества точек  $\omega^*$  и  $c$ , удовлетворяющих равенству (4), принадлежат некоторому эллипсу в пространственной области. Это существенно упрощает задачу настройки КЭХ-фильтра. В частности, в схеме для каждого заданного числа  $k$ , характеризующего соотношение размеров полуосей эллипсов, перебираются только параметры  $\omega^*$  и  $c$ , соответствующие одной полуоси эллипса. При этом (поскольку параметры  $\omega^*$  и  $c$  входят в показатель экспоненты в виде произведения), если параметр  $\omega^*$  умножается на коэффициент  $k$ , то параметр  $c$  делится на этот же коэффициент.

С учетом сказанного, критерий формулируется следующим образом. Ставится задача найти:

$$\hat{\omega}^*, \hat{c}, \hat{k}: PSNR(X, \hat{X}(\hat{\omega}^*, \hat{c}, \hat{k})) = \min_{\omega^*, c, k} PSNR(X, \hat{X}(\omega^*, c, k)), \quad (11)$$

при условии:

$$D(\hat{X}) > D(X),$$

$$PSNR(X, \hat{X}(\hat{\omega}^*, \hat{c})) > PSNR_{\text{дон}}.$$

Технология настройки параметров КЭХ-фильтра в соответствии с описанным критерием строится следующим образом. Перебор всех возможных допустимых значений коэффициента  $k$  осуществляется всегда начиная со значения  $k = 1$ . В результате определяются наилучшие приближенные значения параметров  $\omega^*$  и  $c$  без учета факта центральной симметрии искажений, т.е. только в предположении радиальной симметрии. Далее, задавая значения  $k$  с некоторым шагом, эти параметры уточняются с учетом нерадиальности искажений, в предположении что параметры  $\omega^*$  и  $c$  принадлежат эллипсам с началом координат опорной области в его центре.

По существу схема настройки параметров  $\omega^*$  и  $c$  при  $k = 1$  отличается от той, что была приведена в работе [13]. Отличие состоит в том, что вместо определения  $PSNR(X, X^*)$ , характеризующего близость обработанного –  $X$  и эталонного –  $X^*$  изображений, в соответствии с критерием (10) определяется , характеризующий степень отличия обработанного –  $\hat{X}$  и исходного искаженного –  $X$  изображений. Схема уточнения параметров с учетом нерадиальности искажений приведена на рисунке 1.

Настройка параметров  $\omega^*$  и  $c$  производится вложенными циклами. Если на данном этапе параметр  $c$  задан внешним циклом, то осуществляется настройка параметра  $\omega^*$  с и наоборот. В свою очередь оба эти цикла являются вложенными для внешнего цикла настройки параметра  $k$ , характеризующего соотношение размеров полуосей эллипса.

#### 4. Результаты экспериментов

Настройка параметров  $\hat{\omega}^*$ ,  $c$ ,  $k$  фильтра осуществлялась с использованием тестового изображения «Лена», приведенного на рис. 2а. Искажения вносились путем моделирования двумерного гауссова размытия по соотношению

$$h(r) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_x \sigma_y} \exp\left(-\left(r_x^2 \cdot \sigma_x^{-2} + r_y^2 \cdot \sigma_y^{-2}\right)\right), \quad (12)$$

где  $r^2 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ , и задавались  $r_x = 3$ ,  $r_y = 1$  (мы полагаем направление наибольшего размытия в направлении оси  $OX$ ). Различия в степени размытия в разных направлениях заданы специально, чтобы исследовать эффективность коррекции

динамических искажений. На рис. 2 б приведено изображение «Лена» после внесения искажений с указанными параметрами размытия.

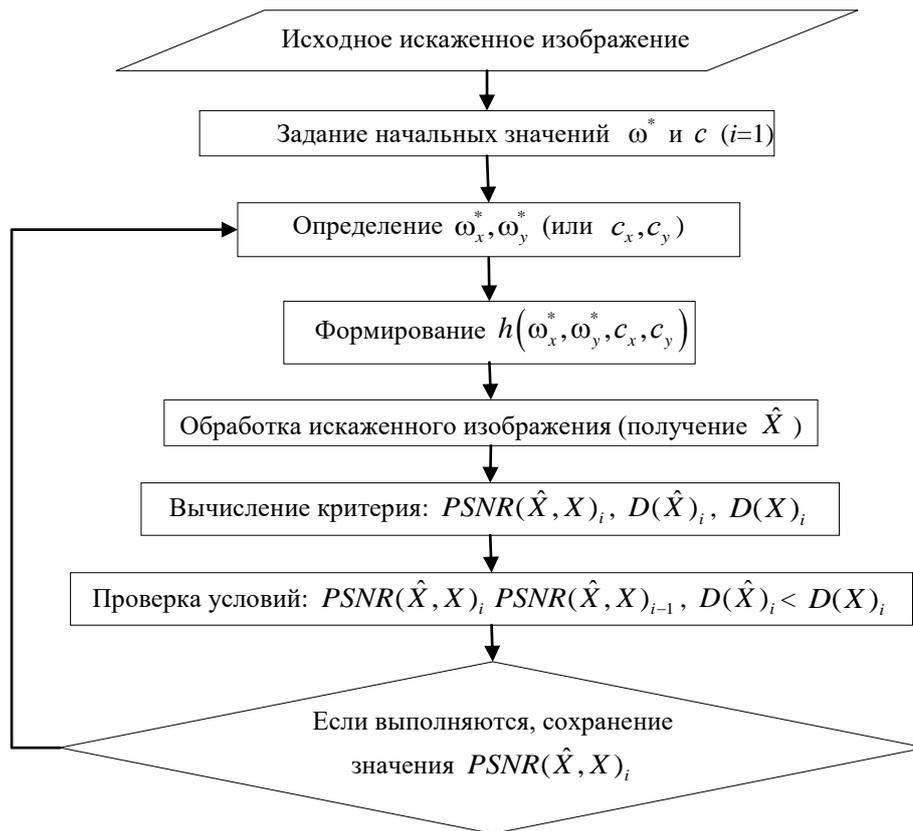


Рис 1. Схема основных этапов настройки параметров фильтра.



Рис. 2. Изображения «Лена»: а) неискаженное; б) искаженное; в) обработанные (k = 1); г) обработанное (k = 1.4).

Настройка параметров фильтра осуществлялась в соответствии со схемой, показанной на рисунке 2. На рисунке 2в приведено изображение, полученное путем обработки фильтром с параметрами  $\omega^*$  и  $c$ , полученными при значении  $k = 1$ , а на рисунке 2г – при значении  $k = 1.4$ . Визуально эти изображения слабо различимы. Это говорит о том, что фильтр, полученный на основе предположения радиальной симметрии достаточно хорошо «работает» даже в случае значительных отличий модели искажений от этих предположений. Заметим, что вместо настройки параметров фильтра при коэффициенте соотношения размеров полуосей  $k = 1.4$  можно осуществлять настройку с использованием обратного коэффициента:  $\tilde{k} = 1/k = 0.7143$ . При этом полуоси эллипса и значения параметров  $\omega_x^*$ ,  $\omega_y^*$  и  $\hat{c}_x$ ,  $\hat{c}_y$  просто меняются местами.

Вместе с тем, данные таблицы 1, в которой приведены значения  $PSNR(X, X^*)$ , характеризующие близость обработанного –  $X$  и эталонного –  $X^*$  изображений, показывают, что учет нерадиальности позволяет повысить качество обработки.

**Таблица 1.** Результаты оценки параметров модели

	$PSNR(X, \hat{X})$	$PSNR(X, X^*)$	$\omega_x^*$	$\omega_y^*$	$\hat{c}_x$	$\hat{c}_y$
$k = 1$	25.03	26.83	2.90	2.90	4.1	4.1
$k = 1.4$	25.03	27.45	5.30	7.34	10.90	7.79

## 5. Заключение

Приведенные результаты экспериментов показывают, что настройка параметров фильтра в соответствии с критерием (10) позволяет существенно улучшить качество изображений. Подчеркнем еще раз, что критерий строится только с использованием исходного искаженного и обработанного изображений. Это открывает широкие возможности для автоматизации корректировки изображений в самых различных приложениях, в частности, в мобильных приборах регистрации изображений.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки.

## Литература

- [1] Прэтт, У. Цифровая обработка изображений. Кн.2. // Пер. с англ. М.: Мир, – 1982. – 480 С.
- [2] Carlos Moreno. Constructing FIR Digital Filters with valary / Carlos Moreno and Mochima // Software, <https://www.mochima.com/articles/FIR/FIR.html>, 2016.
- [3] Wenbin, Ye. Greedy Algorithm for the Design of Linear-Phase FIR Filters with Sparse Coefficients / Wenbin Ye, Ya Jun Yu /Circuits Syst Signal Process [link.springer.com/article/10.1007/s00034-015-0122-5](http://link.springer.com/article/10.1007/s00034-015-0122-5) - (2016) 35: 1427. doi:10.1007/s00034-015-0122-5
- [4] Soifer V.A. Computer Image Processing, Part II: Methods and algorithms // VDM Verlag, – 2010. – 584 p.
- [5] Копенков, В.Н. Алгоритм автоматического построения процедуры локальной нелинейной обработки изображений на основе иерархической регрессии / В.Н. Копенков, В.В. Мясников // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 2. – С. 257-265. – ISSN 0134-2452.
- [6] Fursov, V.A. Identification of distorting systems with monitoring of data capacity / 5-th International Workshop on Digital Image Processing and Computer Graphics. «Image Processing and Computer Optics», Samara, Russia, Aug, 22-26, 1994, Proceedings Samara, 1994, p.2.
- [7] Fursov, V.A. Correction of distortions in color images based on parametric identification / V. A. Fursov, A. V. Nikonorov, S. A. Bibikov, P. Yu. Yakimov and E. Yu. Minaev // Pattern recognition and Image Analysis, Vol. 21, No.2, - Pleyades Publishing, Ltd., 2011. DOI: 10.1134/S1054661811020349, Plenary Papers, pp. 125-128.
- [8] Щербаков, М.А. Нелинейная фильтрация с адаптацией к локальным свойствам изображения / Щербаков М.А., Панов А.П. // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, №4. – С. 818-824. – ISSN 0134-2452.
- [9] Баврина, А.Ю. Метод параметрического оценивания оптико-электронного тракта / Баврина А.Ю., Мясников В.В, Сергеев А.В. // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, №4. – С. 500 – 507. – ISSN 0134-2452.
- [10] Кольцов, П.П. Оценка размытия изображения / Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, №1. – С. 95–102. – ISSN 0134-2452.
- [11] Fursov, V.A. Construction of adaptive identification algorithms, using the estimates conformity principle // 11th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-11-2013), Conference Proceedings, Samara, September 23-28.– 2013. – Vol. 1(2). – P.22-25.
- [12] Fursov, V.A. Constructing unified identification algorithms using a small number of observations for adaptive control and navigation systems // Journal: Proc. SPIE, Scott A. Speigle; Ed. – 1997. – Vol. 3087. – P. 34-44.
- [13] Фурсов В.А. Построение КИХ-фильтров в заданном параметрическом классе частотных характеристик для коррекции дефокусировки / В.А. Фурсов // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 6. – С. 878-886. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-6-878-886.
- [14] Дэн, Э. Цифровая обработка многомерных сигналов / Дэн Э. Даджион, Рассел М. Мерсеро. // Пер. с англ. Москва.: Мир. – 1988.