

Представление в ЭВМ эксплуатационных характеристик гидротурбины с помощью оптимальных сплайнов

А.Н. Коварцев¹, А.А. Назарова¹

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Эксплуатационная характеристика гидроагрегата представляет собой двумерные зависимости КПД и расхода гидротурбины от напора ГЭС и нагрузки агрегата, представленные в графической форме по результатам его испытаний. На основе эксплуатационных характеристик строятся рабочие характеристики гидроагрегата. Это трудоемкий процесс, который можно автоматизировать, если предварительно аппроксимировать исходную характеристику. В статье описывается метод аппроксимации эксплуатационных характеристик гидроагрегата с помощью оптимальных двумерных Эрмитовых кубических сплайнов со свободными граничными условиями.

1. Введение

Для оценки экономичности работы ГЭС с учетом различных эксплуатационных факторов вводится понятие расчетного значения удельного расхода воды. Для этого на практике обычно применяют методику расчета и построения энергетических характеристик, базирующихся на графоаналитических методах расчета [1, 2]. Исходной позицией в этих расчетах является эксплуатационная характеристика гидроагрегата, представляющая собой двумерные зависимости КПД и расхода гидротурбины от напора ГЭС и нагрузки агрегата. Методики анализа энергетических характеристик ГЭС можно автоматизировать и существенно упростить, если эксплуатационные характеристики гидротурбины аппроксимировать многомерными функциями, что требует разработки эффективных методов их аппроксимации, отличающихся быстродействием и высокой точностью приближения, например, оптимальными сплайнами [3]. Область приложения современной теории сплайнов достаточно широка. В основном они применяются для решения проблемы гладкого восполнения таблично заданных функций (задача интерполяции) и для решения проблемы сглаживания значений функции, известных в узловых точках не точно, а с некоторой погрешностью (задача сглаживания). В частности, оптимальные параболические сплайны успешно использовались для приближения характеристик компрессоров и турбин ГТД [3].

В таких задачах обычно отсутствуют краевые условия на интерполируемую функцию. В этом случае доопределение краевых условий становится едва ли не основной проблемой, определяющей точность представления приближаемой функции. Известные методы доопределения краевых условий, такие как задание нулевых вторых частных производных на границе сетки сплайна, замена частных производных подходящими разностными схемами, продолжение приближаемой функции интерполяционными многочленами и т. д., часто не соответствуют свойствам приближаемой функции. В данной статье предлагается

оптимизационный подход к решению задачи доопределения краевых условий [4]. Метод построения сплайн-функций, описываемый здесь, отличен от традиционных методов и, на наш взгляд, позволяет существенно упростить процедуру вычисления коэффициентов многомерного сплайна, а кроме того, повысить качество гладкого приближения функции

2. Оптимальный кубический Эрмитов сплайн

Пусть на интерполяционной сетке $a = 0 < 1 < 2 < \dots < n = b$ заданы значения функции

$$y_0 = f(0), y_1 = f(1), \dots, y_n = f(n) \tag{1}$$

и значения её производных

$$y'_0 = f'(0), y'_1 = f'(1), \dots, y'_n = f'(n). \tag{2}$$

Предложенная целочисленная интерполяционная сетка в значительной степени упрощает выводимые формулы и не влияет на общность полученных результатов. От целочисленной сетки с помощью линейного преобразования несложно перейти на любую другую регулярную сетку.

Рассмотрим Эрмитов кубический сплайн, для которого внутренние узлы интерполяции совпадают с узлами «склейки» кубических парабол:

$$S_9(x) = \begin{cases} y_0 + u_0x + C_0x^2 + D_0x^3, & x \in (-\infty, 0]; \\ y_1 + u_1(x-1) + C_1(x-1)^2 + D_1(x-1)^3, & x \in (0, 1]; \\ \dots \\ y_{n-1} + u_{n-1}(x-n+1) + C_{n-1}(x-n+1)^2 + D_{n-1}(x-n+1)^3, & x \in (n-1, n]. \end{cases}$$

Для k -го интервала Эрмитового кубического сплайна

$$S_9^{(k)}(x) = y_k + u_k(x-k) + C_k(x-k)^2 + D_k(x-k)^3 \tag{3}$$

первая и вторая производные имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{S}_9^{(k)}(x) &= u_k + 2C_k(x-k) + 3D_k(x-k)^2, \\ \ddot{S}_9^{(k)}(x) &= 2C_k + 6D_k(x-k). \end{aligned}$$

Для сплайна (3) справедливо $u_k = y'_k$, поэтому в условиях (2) y'_k можно заменить на u_k , тогда коэффициенты сплайна можно определить из системы линейных уравнений, обеспечивающих прохождение сплайна через узлы интерполяции (1)-(2).

$$\begin{cases} S_9^{(0)}(1) = y_0 + u_0 + C_0 + D_0 = y_1, \\ \dot{S}_9^{(0)}(1) = u_0 + 2C_0 + 3D_0 = u_1, \\ \\ S_9^{(k)}(k+1) = y_k + u_k + C_k + D_k = y_{k+1}, \\ \dot{S}_9^{(k)}(k+1) = u_k + 2C_k + 3D_k = u_{k+1}, \\ \\ S_9^{(n-1)}(n) = y_{n-1} + u_{n-1} + C_{n-1} + D_{n-1} = y_n, \\ \dot{S}_9^{(n-1)}(n) = u_{n-1} + 2C_{n-1} + 3D_{n-1} = u_n. \end{cases} \tag{4}$$

Введем вспомогательные переменные

$$\begin{aligned} d_k &= 3(y_{k+1} - y_k), \\ e_k &= -2(y_{k+1} - y_k), \end{aligned} \tag{5}$$

тогда из системы уравнений с учетом (5) можно найти коэффициенты Эрмитового кубического сплайна (3):

$$\begin{cases} C_k = d_k - u_{k+1} - 2u_k, \\ D_k = e_k + u_{k+1} + u_k. \end{cases} \tag{6}$$

Напомним, здесь $u_k = y'_k$.

Фактически мы построили интерполяционный Эрмитов кубический сплайн, однако при решении реальных задач, за редким исключением, мы не можем сформировать условия (2). Для энергетических характеристик гидротурбины они неизвестны. С другой стороны, можно объявить коэффициенты u_0, u_1, \dots, u_{n-1} свободными варьируемыми переменными и находить их значения, решая оптимизационную задачу. Для явно заданных функций в качестве такого критерия можно рассматривать критерий оценки среднеквадратической кривизны сплайна:

$$J = \int_0^n \ddot{S}_9^2(x) dx \rightarrow \min_{u_0, \dots, u_{n-1}}. \tag{7}$$

или

$$J = \int_0^n \ddot{S}_9^2(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} (\ddot{S}^{(k)}(x))^2 dx = \sum_{k=0}^{n-1} J_k \rightarrow \min_{u_0, \dots, u_{n-1}}. \tag{8}$$

Сведение задачи построения Эрмитово кубического сплайна к оптимизационной задаче упрощает решение задачи приближения экспериментальных зависимостей, но создает дополнительные трудности. Прямые методы решения многомерной задачи глобальной оптимизации (ГО) [6] относятся к классу NP сложных задач [5] и обладают высокой трудоемкостью.

Критерий J является аналогом оценки энергии изгиба упругой рейки, вычисленной по совокупности сечений, проходящих через узлы сетки. При этом он обеспечивает наименьшую среднеквадратическую кривизну сплайна, что ограничивает осцилляцию сплайна между узлами интерполяции.

3. Построение оптимального кубического Эрмитово сплайна

Рассмотрим частный критерий J_k .

$$\begin{aligned} J_k &= \int_k^{k+1} (\ddot{S}_9^{(k)}(x))^2 dx = \int_k^{k+1} (2C_k + 6D_k(x - x_k))^2 dx = \\ &= 4C_k^2 + 6C_k D_k + 12D_k^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Выражение (9) распишем более подробно, используя (5-6):

$$\begin{aligned} J_k &= 10u_{k+1}^2 + (18e_k - 2d_k + 22u_k)u_{k+1} + (e_k + d_k)(6d_k - 12u_k) + \\ &+ 12(e_k + 2u_k) + 4(d_k - 2u_k)^2. \end{aligned}$$

С учетом того факта, что нас не интересует оптимальное значение частного критерия J_k , а только оптимальные значения оптимизируемых переменных, введем критерий $\tilde{J}_k = \frac{1}{2} J_k$, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{J}_k &= 5u_{k+1}^2 + 11u_k u_{k+1} + 8u_k^2 + (9e_k - d_k)u_{k+1} + (6e_k - 5d_k)u_k + \\ &+ 2d_k^2 + 3d_k e_k + 6e_k. \end{aligned} \tag{10}$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} w_1^{(k)} &= 5; w_2^{(k)} = 11; w_3^{(k)} = 8; w_4^{(k)} = 9e_k - d_k; w_5^{(k)} = 6e_k - 5d_k; \\ w_6^{(k)} &= 2d_k + 3d_k e_k + 6e_k, \end{aligned} \tag{11}$$

то частные критерии \tilde{J}_k по переменным u_0, u_1, \dots, u_{n-1} образуют квадратичную форму

$$\tilde{J}_k = w_1^{(k)} u_{k+1}^2 + w_2^{(k)} u_k u_{k+1} + w_3^{(k)} u_k^2 + w_4^{(k)} u_{k+1} + w_5^{(k)} u_k + w_6^{(k)}, \tag{12}$$

а критерий (8) представляет собой сумму квадратичных форм вида (12). Величина каждого из частных критериев эффективности $J_k(u_k, u_{k+1}, u_k, u_{k+1})$ зависит от поведения сплайна на предыдущем интервале интерполяционной сетки (1), условий гладкого сопряжения кубических парабол и управлений u_k , выбираемых на очередном интервале интерполяции. В результате появляется возможность заменить задачу ГО критерия (8) задачей динамического

программирования, осуществляющей подбор оптимальных управлений по мере проведения сплайна через узловые точки.

Процедура формирования оптимального управления методом динамического программирования распадается на две стадии: предварительную и окончательную.

На предварительной стадии формируется оптимальная стратегия построения сплайна. Процесс начинается с последнего участка интерполяционной сетки, когда в предположении, что до точки $(n-1, y_{n-1})$ сплайн оптимален, решается задача выбора оптимального управления u_n :

$\min_{u_n} J_{n-1}(u_n)$. В данном случае для интервала $(n-1; n]$ и критерия

$$\tilde{J}_{n-1} = w_1^{(n-1)} u_{n+1}^2 + w_2^{(n-1)} u_n u_{n+1} + w_3^{(n-1)} u_n^2 + w_4^{(n-1)} u_{n+1} + w_5^{(n-1)} u_n + w_6^{(n-1)},$$

оптимальной стратегией будет:

$$u_{n+1}^{opt} = -\frac{w_2^{(n-1)} u_n + w_4^{(n-1)}}{2w_1^{(n-1)}} \quad (13)$$

На участке $(n-2; n]$ оптимизация производится по критерию

$$W_{n-2}(u_{n-1}, u_n) = \tilde{J}_{n-2}(u_{n-1}, u_n) + \tilde{J}_{n-2}(u_n, u_{n+1}^{opt}) \rightarrow \min_{u_n}. \quad (14)$$

Коэффициенты квадратичной формы (14) с учетом оптимального управления u_{n+1}^{opt} можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1^{(n-2)} &= \frac{4w_1^{(n-1)} w_3^{(n-1)} - (w_2^{(n-1)})^2}{4w_1^{(n-1)}}, \\ \tilde{w}_4^{(n-2)} &= \frac{2w_1^{(n-1)} w_3^{(n-1)} - w_2^{(n-1)} w_1^{(n-1)}}{4w_1^{(n-1)}}, \\ \tilde{w}_6^{(n-2)} &= \frac{4w_1^{(n-1)} w_6^{(n-1)} - (w_4^{(n-1)})^2}{4w_1^{(n-1)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Сложив коэффициенты (15) с коэффициентами квадратичной формы $\tilde{J}_{n-2}(u_{n-1}, u_n)$, получим формулы для вычисления коэффициентов квадратичной формы критерия $W_{n-2}(u_{n-1}, u_n)$:

$$\begin{cases} \tilde{w}_1^{(n-2)} = w_1^{(n-2)} + \tilde{w}_1^{(n-2)}, \\ \tilde{w}_2^{(n-2)} = w_2^{(n-2)}, \\ \tilde{w}_3^{(n-2)} = w_3^{(n-2)}, \\ \tilde{w}_4^{(n-2)} = w_4^{(n-2)} + \tilde{w}_4^{(n-2)}, \\ \tilde{w}_5^{(n-2)} = w_5^{(n-2)}, \\ \tilde{w}_6^{(n-2)} = w_6^{(n-2)} + \tilde{w}_6^{(n-2)}. \end{cases} \quad (16)$$

Минимизируя критерий (14) по управлению u_{n-1} , найдем оптимальную стратегию u_{n-1}^{opt} .

Процесс продолжается до тех пор, пока не дойдем до первого интервала $(0; 1]$. В этом случае для критерия

$$W_0(u_0, u_1) = \tilde{J}_0(u_0, u_1) + \tilde{J}_1(u_1, u_2^{opt}) + \dots + \tilde{J}_{n-2}(u_n, u_{n+1}^{opt})$$

найдем оптимальные управления u_0, u_1 по формулам

$$\begin{cases} u_0^{opt} = -\frac{2\tilde{w}_2^{(1)}\tilde{w}_5^{(1)} + \tilde{w}_2^{(1)}\tilde{w}_4^{(1)}}{4\tilde{w}_1^{(1)}\tilde{w}_3^{(1)} - (\tilde{w}_2^{(1)})^2}, \\ u_1^{opt} = \frac{\tilde{w}_2^{(1)}\tilde{w}_5^{(1)} - 2\tilde{w}_3^{(1)}\tilde{w}_4^{(1)}}{4\tilde{w}_1^{(1)}\tilde{w}_3^{(1)} - (\tilde{w}_2^{(1)})^2}. \end{cases} \quad (17)$$

В результате мы получили аналитические выражения для определения всех оптимальных стратегий $u_0^{opt}, u_1^{opt}, \dots, u_{n-1}^{opt}$, т.е. недостающие неизвестные значения производных приближаемой функции в узловых точках сплайна (2). Подставляя найденные значения переменных $u_0^{opt}, u_1^{opt}, \dots, u_{n-1}^{opt}$ в выражения (6), формируем оптимальный кубический Эрмитов сплайн

4. Аппроксимация многомерных зависимостей оптимальным кубическим Эрмитовым сплайном

При аппроксимации двумерных зависимостей будем использовать одномерный оптимальный кубический Эрмитов сплайн, описанный выше.

Пусть задана интерполяционная сетка для двумерной функции $z = f(x, y)$:

$$\begin{cases} \Delta_x : 0, 1, \dots, n; \\ \Delta_y : 0, 1, \dots, n, \end{cases} \quad (18)$$

и в узлах интерполяционной сетки известны значения функции f_{ij} .

Двухмерный интерполяционный оптимальный кубический сплайн построим по известной схеме [4].

1. При заданных значениях переменной y_k построим $n+1$ оптимальный кубический сплайн $S_k(x | y_k)$, $y_k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

2. Для вычисления сплайн-функции в точке (x^*, y^*) вычислим $n+1$ значение сплайнов $\tilde{z}_k = S_k(x^* | y_k)$ в точке $x = x^*$. Получим еще одну задачу интерполирования функции на сетке $\Delta_y : 0, 1, \dots, n$ со значениями функции в узлах сетки $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$.

3. Построим ещё один оптимальный кубический сплайн $S_y(x^*, y)$. Его вычисление в точке $y = y^*$ и даст нам искомое значение $z^* = S_y(x^*, y^*)$.

Теперь, зная методику вычислений двумерного оптимального кубического Эрмитового сплайна, построим с её помощью схему аппроксимации двумерных экспериментальных зависимостей.

На сетке (18) введем матрицу варьируемых переменных – значений функции в узлах интерполяции:

$$Z = \begin{vmatrix} z_{00} & z_{01} & \dots & z_{0n} \\ z_{10} & z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n0} & z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix} \quad (19)$$

Пусть задана хаотическая сетка результатов вычислительного эксперимента

$$F = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & f_1 \\ x_2 & y_2 & f_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_M & y_M & f_m \end{vmatrix} \quad (20)$$

Используя метод наименьших квадратов (МНК), рассмотрим задачу оптимизации среднеквадратической функции

$$I = \sum_{k=1}^M (S_{\mathcal{E}}(x_k, y_k) - f_k)^2 \rightarrow \min_{z_{ij} \in Z} \quad (21)$$

В результате подберутся рациональные сочетания опорных значений матрицы (19) Z^* , минимизирующие среднеквадратическую погрешность аппроксимации исходной функции.

5. Вычислительные эксперименты

Исследование эффективности предложенного двухмерного оптимального кубического Эрмитового сплайна производилось на тестовом примере $\varphi(x, y)$. Для этого с помощью оптимального сплайна была аппроксимирована реальная эксплуатационная характеристика гидротурбины ПЛ-587-ВБ-930 (зависимость $\eta_T(N, H)$). Для усложнения задачи полученная характеристика была искажена нелинейными преобразованиями. Фактически это новый объект, не связанный с предложенной моделью аппроксимирующей функции (рисунок 1).

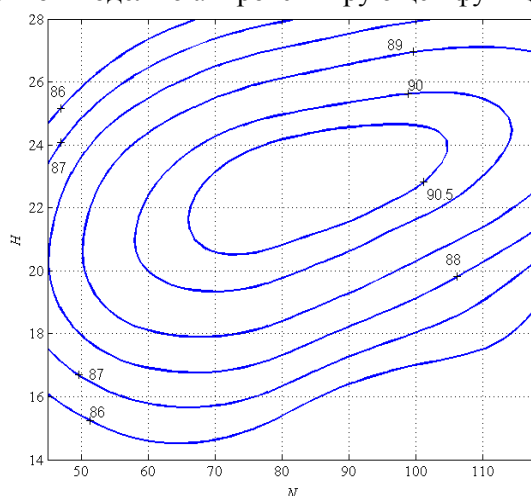


Рисунок 1. Тестовая функция.

Эффективность аппроксимации экспериментальных зависимостей с помощью оптимальных Эрмитовых сплайнов будем оценивать по среднеквадратической точности приближения тестовой функции $\varepsilon_{cp} = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (S_{\mathcal{E}}(x_k, y_k) - \varphi(x_k, y_k))^2$ в зависимости от объема массива экспериментальных данных M (20). В таблице 1 приведены результаты исследования эффективности предложенной аппроксимирующей функции.

Таблица 1. Зависимость точности аппроксимации от объема выборки

M	64	100	169	255	356	529	1156
ε_{cp}	0,001847	0,001551	0,00147	0,001427	0,00140	0,001388	0,001382

Как видно из таблицы, точность аппроксимации достаточно высокая для любых объемов выборки и достигает насыщения начиная с объемов $M > 150$, что говорит о перспективности использования в качестве аппроксимирующей функции оптимальных кубических Эрмитовых сплайнов. Более того, для оптимальных кубических Эрмитовых сплайнов не требуется использование значительных выборок данных. Приличные результаты аппроксимации получаются на небольших выборках.

6. Заключение

В данной работе представлен новый метод аппроксимации реальных эксплуатационных характеристик гидротурбины. Из опыта известно, что полиномиальные функции достаточно плохо описывают характеристики компрессоров и турбин реальных объектов: газотурбинных двигателей, гидроагрегатов и т.д. И, как результат, на практике часто используются

графоаналитические методы анализа сложных технических систем. Использование оптимальных кубических Эрмитовых сплайнов вызвано тем обстоятельством, что кубические Эрмитовы сплайны, являясь непрерывными и гладкими по первой производной функциями, обладают дополнительными степенями свободы в узлах интерполяции и могут точнее «подстраиваться» под специфику сложных функций, имеющих значительные вариации градиента функции в отдельных местах. Вычислительные эксперименты показали высокую эффективность оптимальных кубических Эрмитовых сплайнов при решении задачи аппроксимации эксплуатационных характеристик гидротурбин.

7. Литература

- [1] Обрезков, В.И. Гидроэнергетика. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 512 с.
- [2] Филиппова, Т.А. Оптимизация энергетических режимов гидроагрегатов гидроэлектростанций. – М.: Энергия, 1975. – 207 с.
- [3] Коварцев, А.Н. Представление в расчётах на ЭВМ обобщённых характеристик компрессоров ГТД с помощью многомерного параболического сплайна со свободными граничными условиями // Проектирование и доводка авиационных газотурбинных двигателей. – Куйбышев: КуАИ, 1983. – С. 25-31.
- [4] Коварцев, А. Н. Вычислительная математика. – Самара: Офорт, 2011. – 230 с.
- [5] Коварцев, А.Н. К вопросу об эффективности параллельных алгоритмов глобальной оптимизации функций многих переменных / А.Н. Коварцев, Д.А. Попова-Коварцева // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 2. – С. 256-261.
- [6] Коварцев, А.Н. Исследование эффективности глобальной параллельной оптимизации функций многих переменных / А.Н. Коварцев, Д.А. Попова-Коварцева, П.В. Аболмасов // Вестник ННГУ. – 2013. – Т. 3, № 1. – С. 252-261.

Благодарности

Работа выполнена при государственной поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации мероприятия Программы повышения конкурентоспособности СГАУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013-2020 годы, а также гранта РФФИ №16-41-630637.

Computer Representation of Water Turbine Performance Characteristics Using Optimal Splines

A.N. Kovartsev¹, A.A. Nazarova¹

¹Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The performance characteristic of a water turbine is a two-dimensional dependence of the efficiency and discharge of the turbine on the water pressure of the hydroelectric station and the load of the turbine. The turbine characteristic is built in graphical form on the basis of test results. The actual performance characteristics of the water turbine are based on performance characteristics. The study of the turbine efficiency can be automated by creating an appropriate mathematical model that approximates the initial performance characteristics of the turbine. This paper describes a method for approximating turbine performance characteristics using optimal two-dimensional cubic Hermite splines with free boundary conditions.