

Применение авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений для представления и фильтрации изображений

Н.А. Андриянов¹, К.К. Васильев¹

¹Ульяновский государственный технический университет, ул. Северный Венец, д. 32, г. Ульяновск, Россия, 432027

Аннотация. Исследованы вероятностные свойства стохастических моделей изображений, порожденных пространственными разделимыми авторегрессиями с кратными корнями характеристических уравнений. Особое внимание уделено исследованию ковариационных функций моделей разных порядков, обеспечивающих одинаковые радиусы корреляции. Рассмотрена задача фильтрации изображений, порождаемых авторегрессиями с кратными корнями. Исследована эффективность фильтрации при различных уровнях шума и характеристиках моделей.

1. Введение

Многие реальные изображения характеризуются плавным изменением яркости [1-3]. При вероятностном описании это означает относительно медленное изменение корреляционной функции (КФ) в некоторой окрестности нуля. Известные авторегрессионные (АР) модели изображений первого порядка [3-6] приводят к быстро спадающей экспоненциальной КФ. Между тем известны разделимые случайные поля (СП), порождаемые одномерными авторегрессиями с кратными корнями характеристических уравнений [4-11]. Сечения КФ таких СП на высоких уровнях представляют собой гиперэллипсоиды. Поэтому применение процедур статистического анализа, базирующихся на таких моделях, может способствовать повышению эффективности предварительной обработки реальных изображений и их последовательностей [7-11].

Основной задачей настоящей работы является анализ основных свойств моделей изображений на базе авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений и алгоритмов оптимальной фильтрации таких изображений.

2. Авторегрессии с кратными корнями характеристических уравнений

Одной из важных причин, обуславливающих широкое распространение АР моделей СП [1-6], является разработанный математический аппарат. Класс гауссовских АР моделей может быть описан с помощью линейных стохастических разностных уравнений следующего вида:

$$x_i = \sum_{j \in D} \alpha_j x_{i-j} + \beta \xi_i, \quad \bar{i} \in \Omega, \quad (1)$$

где $X = \{x_i, \bar{i} \in \Omega\}$ – моделируемое СП, определённое на N -мерной сетке $\Omega = \{\bar{i} = (i_1, i_2, \dots, i_N) : \{i_k = \overline{1..M_k}, k = \overline{1..N}\}; \{\alpha_j, \beta, \bar{j} \in D\}$ – коэффициенты модели; $\{\xi_i, \bar{i} \in \Omega\}$ – порождающее белое СП; $D \subset \Omega$ – каузальная область локальных состояний.

Для описания СП с корреляционными характеристиками, близкими к реальным изображениям, необходимо выбирать область D локальных состояний больших размеров, что приводит к значительным проблемам идентификации большого числа параметров $\{\alpha_j, \beta, \bar{j} \in D\}$ и построения соответствующих сложных алгоритмов статистического анализа наблюдений.

Хорошо известным частным случаем (1) является АР модель первого порядка (модель А. Хабиби) [5,7]:

$$x_{i,j} = \rho_x x_{i-1,j} + \rho_y x_{i,j-1} - \rho_x \rho_y x_{i-1,j-1} + \xi_{i,j}, i = \overline{1..M_1}; j = \overline{1..M_2}, \quad (2)$$

где ρ_x и ρ_y – коэффициенты корреляции соседних элементов по строке и столбцу соответственно; $\{\xi_{i,j}\}$ – двумерное СП независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним $M\{\xi_{i,j}\} = 0$ и дисперсией $\sigma_\xi^2 = M\{\xi_{i,j}^2\} = (1 - \rho_x^2)(1 - \rho_y^2)\sigma_x^2$; $\sigma_x^2 = M\{x_{i,j}^2\}$; $M_1 \times M_2$ – размер моделируемого изображения. Модель Хабиби представляет простейший пример класса разделимых АР моделей, КФ которых является произведением КФ одномерных авторегрессий. Наиболее удобно представить разделимые модели с помощью z -преобразования уравнения (2):

$$x(z_1, z_2) = \rho_x z_1^{-1} x(z_1, z_2) + \rho_y z_2^{-1} x(z_1, z_2) - z_1^{-1} z_2^{-1} \rho_x \rho_y x(z_1, z_2) + \xi(z_1, z_2)$$

или $x(z_1, z_2) = H(z_1, z_2)\xi(z_1, z_2)$, где $H(z_1, z_2) = H_1(z_1)H_2(z_2)$ – разделимая передаточная функция двумерной системы (2); $H_1(z_1) = 1/(1 - \rho_x z_1^{-1})$, $H_2(z_2) = (1 - \rho_y z_2^{-1})$ – передаточные функции соответствующих одномерных систем.

Интересно, что можно существенным образом улучшить корреляционные свойства многомерных моделей, если в качестве порождающих одномерных систем выбрать АР уравнения с кратными корнями характеристических уравнений [5-11]. Например, если взять АР с корнем кратности два

$$x_i = 2\rho x_{i-1} - \rho^2 x_{i-2} + \xi_i$$

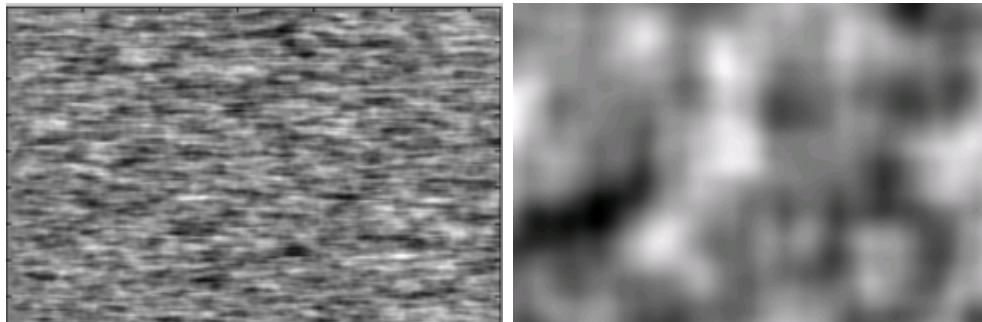
с $H(z_1) = 1/(1 - \rho z_1^{-1})^2$, то можно получить на основе $H(z_1, z_2) = H_1(z_1)H_2(z_2)$ разделимую модель двумерного СП второго порядка

$$\begin{aligned} x_{ij} = & 2\rho_x x_{i-1,j} + 2\rho_y x_{i,j-1} - 4\rho_x \rho_y x_{i-1,j-1} - \\ & - \rho_x^2 x_{i-2,j} - \rho_y^2 x_{i,j-2} + 2\rho_x^2 \rho_y x_{i-2,j-1} + \\ & + 2\rho_y^2 \rho_x x_{i-1,j-2} - \rho_x^2 \rho_y^2 x_{i-2,j-2} + b\xi_{ij}, \end{aligned} \quad (3)$$

где b – нормирующий коэффициент, позволяющий получить однородное СП с заданной дисперсией.

Можно заметить, что модель (3) представляет собой восьмиточечную модель, т.е. в ней для формирования очередного элемента СП $\{x\}$ используется 8 предшествующих элементов из окрестности. Аналогично для модели кратности (3,3) можем получить 15-ти точечную модель, для модели кратности (4,4) – 24-х точечную модель и т.д.

Изображение, размером 640×480 , формируемое из значений СП (3) с параметрами $\rho_x = 0.9$ и $\rho_y = 0.7$, представлено на рис. 1,а. На рис. 1,б показана реализация СП на основе АР с корнями кратности (3,3), $\rho_x = 0.95$, $\rho_y = 0.95$.



а (2;2) б (3;3)

Рисунок 1. Реализации случайных полей.

Таким образом, с помощью АР моделей с кратными корнями характеристических уравнений возможно получать реализации СП, которые будут близки по характеру к реальным изображениям. При этом важным свойством порождаемых СП будет их квазиизотропность. Общая формула для моделей различных кратностей может быть записана в виде:

$$x_{i,j} = \beta \xi_{i,j} - \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{j_1=0}^{N_2} \alpha_{i_1,j_1} x_{i-i_1,j-j_1}$$

где N_1 и N_2 характеризуют кратность модели; коэффициенты α_{i_1,j_1} ($\alpha_{0,0} = 0$) являются произведениями соответствующих коэффициентов одномерных АР вдоль осей x и y :

$$\alpha_{i_1,j_1} = \alpha x_{i_1} \alpha y_{j_1} \tag{4}$$

Коэффициенты одномерных АР (4) можно получить с помощью выражений [6]:

$$\alpha x_{i_1}(\rho_x, N_1) = (-1)^{i_1+1} C_{N_1}^{i_1} \rho_x^{i_1}$$

$$\alpha y_{j_1}(\rho_y, N_2) = (-1)^{j_1+1} C_{N_2}^{j_1} \rho_y^{j_1}$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Коэффициент β двумерной модели является нормированным произведением соответствующих коэффициентов одномерных АР вдоль осей x и y :

$$\beta = \frac{\sigma_x}{\sigma_\xi} \beta_x \beta_y$$

где

$$\beta_x = \sqrt{\frac{(1-\rho_x^2)^{2N_1-1}}{\sum_{l=0}^{N_1-1} (C_{N_1-l}^l \rho_x^l)^2}}, \beta_y = \sqrt{\frac{(1-\rho_y^2)^{2N_2-1}}{\sum_{l=0}^{N_2-1} (C_{N_2-l}^l \rho_y^l)^2}}$$

Анализ полученных выражений показывает, что АР первого порядка (2) может быть представлена моделью с простыми корнями (кратность (1,1)), а восьмиточечная АР (3) - моделью с корнями кратности (2,2).

Таким образом, можно создавать АР модели произвольной кратности, получая в качестве реализаций СП изображения с заданными медленно изменяющимися корреляционными свойствами.

3. Ковариационные функции авторегрессионных случайных полей с кратными корнями

Важным свойством моделей с кратными корнями характеристических уравнений является факторизуемость КФ. Например, формируемое с помощью модели (1) СП обладает значительной анизотропией, объясняемой видом КФ:

$$B(k_1, k_2) = \sigma_x^2 \rho_x^{|k_1|} \rho_y^{|k_2|},$$

где σ_x^2 – дисперсия поля X ; ρ_x и ρ_y – параметры модели; k_1 и k_2 – расстояния между элементами СП X соответственно по осям x и y . Сечениями такой КФ являются ромбы с центром в начале координат.

Использование модели (3) обеспечивает увеличение связей в АР модели за счёт расширения области локальных состояний, и при этом существенно изменяется вид КФ [5]

$$B(k_1, k_2) = \sigma_x^2 \left(1 + \frac{1 - \rho_x^2}{1 + \rho_x^2} |k_1|\right) \left(1 + \frac{1 - \rho_y^2}{1 + \rho_y^2} |k_2|\right) \rho_x^{|k_1|} \rho_y^{|k_2|}$$

при сохранении всего двух корреляционных параметров модели. Как показано в работе [5], сечения высоких уровней такой КФ приближаются к эллипсам.

Для того, чтобы получить КФ моделей произвольных порядков можно использовать выражения для одномерных КФ АР с кратными корнями характеристических уравнений [6,7]

$$B_x(k) = \sigma_x^2 \sum_{l=0}^{m-1} g(m, l, k) \frac{\rho^{2(m-l-1)}}{(1 - \rho^2)^{2k-l-1}},$$

где $g(m, l, k) = \frac{(m+k-1)!(2m-l-2)!}{l!(m-1)!(m-l-1)!(m+k-l-1)!}$. Дисперсию независимых случайных величин

$\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$, найдем по заданной дисперсии СП $B_x(0) = \sigma_x^2$:

$$\sigma_{\xi}^2 = \sigma_x^2 (1 - \rho^2)^{2m-1} \left/ \sum_{l=0}^{m-1} (C_{m-1}^l \rho^l)^2 \right.$$

Таким образом, для пространственного АР уравнения с характеристическими корнями кратности (m_1, m_2) выражение для КФ может быть записано в виде:

$$B_{xy}(k_1, k_2) = \sigma_x^2 \sum_{l=0}^{m_1-1} g(m_1, l, k_1) \frac{\rho_x^{2(m_1-l-1)}}{(1 - \rho_x^2)^{2k_1-l-1}} \sum_{l=0}^{m_2-1} g(m_2, l, k_2) \frac{\rho_y^{2(m_2-l-1)}}{(1 - \rho_y^2)^{2k_2-l-1}}.$$

Рассмотрим более подробно случай одинакового радиуса корреляции k_0 для моделей разных порядков, т.е. выполнение общего условия

$$B_{m=1}(\rho_{x1}, \rho_{y2}, k_0, k_0) = B_{m=2}(\rho_{x2}, \rho_{y2}, k_0, k_0) = \dots = B_{m=n}(\rho_{xn}, \rho_{yn}, k_0, k_0) = \dots = \frac{\sigma_x^2}{e}.$$

Такое упрощение позволяет получить набор параметров, обеспечивающий одинаковый радиус корреляции, аналогично одномерному случаю [5]. Полученные соответствия корреляционного параметра ρ и радиуса корреляции k_0 представлены в таблице.

Таблица 1. Результаты численных расчетов параметров для разных радиусов корреляции.

| k_0 | 1 | 10 | 20 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 10000 |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|-----------|
| $\rho_{m=1}$ | 0,606 | 0,9048 | 0,9512 | 0,9672 | 0,9802 | 0,99004 | 0,99502 | 0,9994998 |
| $\rho_{m=2}$ | 0,338 | 0,7657 | 0,8737 | 0,9137 | 0,9472 | 0,9732 | 0,98653 | 0,998644 |
| $\rho_{m=3}$ | 0,2345 | 0,685 | 0,8257 | 0,8797 | 0,926 | 0,96225 | 0,98093 | 0,998077 |
| $\rho_{m=4}$ | 0,1795 | 0,6275 | 0,7895 | 0,854 | 0,9095 | 0,9536 | 0,97653 | 0,99763 |

Анализ результатов показывает, что для обеспечения одинаковых радиусов корреляции необходимо при повышении порядка АР уменьшать значение параметра ρ . При этом целесообразно рассмотреть зависимость $\gamma_m = 2(1 - \rho_m)k_0$, которая показывает, во сколько раз радиус корреляции k_0 для рассматриваемых моделей больше, чем при $m = 1$ (рис. 2).

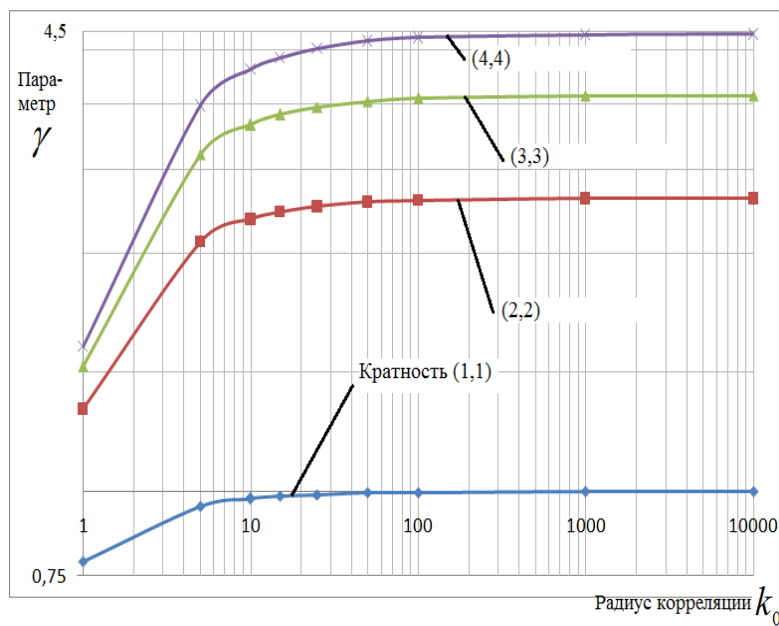


Рисунок 2. Зависимость параметра γ_m от радиуса корреляции.

Анализ кривых показывает, что γ_m стремится к постоянному значению при больших k_0 . При этом он тем больше, чем выше кратность модели.

На рис. 3 представлены КФ моделей различных порядков, обеспечивающих один и тот же радиус корреляции $k_0 = 10$. Рис. 3а соответствует модели кратности (1,1), рис. 3б – модели кратности (2,2), рис. 3в – модели кратности (3,3), рис. 3г – модели кратности (4,4).

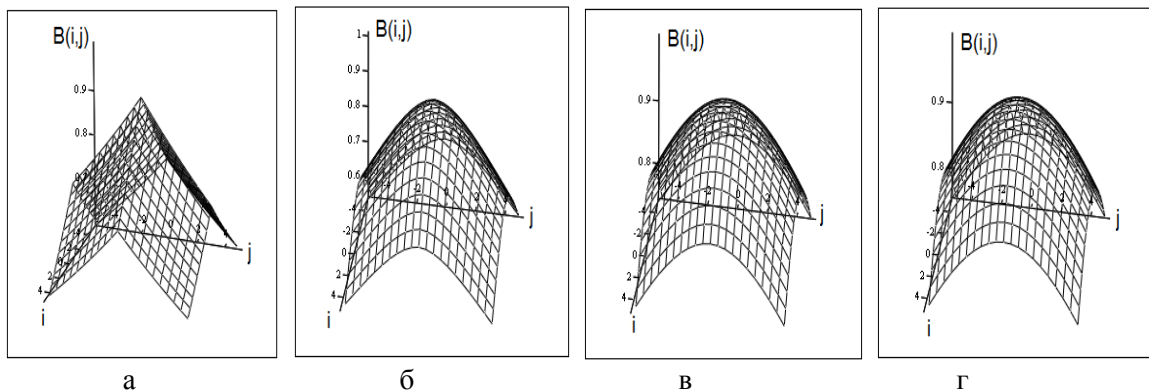


Рисунок 3. Ковариационные функции случайных полей.

Анализ рисунков показывает заметное уплощение вершины КФ при увеличении кратности корня характеристического уравнения.

4. Фильтрация изображений, имитируемых с помощью авторегрессий с кратными корнями

Рассмотрим случай, когда необходимо выполнить фильтрацию СП x_{ij} , имитируемого АР с кратными корнями характеристических уравнений и наблюдаемого $z_{ij} = x_{ij} + n_{ij}$ на фоне белого шума n_{ij} с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_n^2 .

Будем использовать следующий относительно простой в вычислительном плане алгоритм фильтрации изображений. На первом этапе выполним фильтрацию элементов в каждой строке.

Затем ту же самую процедуру применим к каждому столбцу. Наконец, получим суммарную оценку каждого элемента как среднее между оценками по строке и по столбцу. Такой подход позволит получить лучшие оценки по сравнению с отдельным построчным или постолбцовым оцениванием, однако будет уступать по дисперсии ошибки векторному фильтру с построчным считыванием [11]. Тем не менее для фильтрации изображений больших размеров можно воспользоваться предложенным алгоритмом в силу, требующего меньшее число вычислительных операций.

При этом для фильтрации строки можно воспользоваться следующим алгоритмом [6,7,11]. Введем расширенный вектор состояния: $\bar{x}_i = (x_i x_{i-1} \dots x_{i-m+1})^T$. Тогда модель наблюдений запишется в виде: $z_i = C\bar{x}_i + n_i, i = 1, 2, \dots$, где $C = (1 \ 0 \dots 0)$. Уравнение состояния строки также представим в векторно-матричной форме:

$$\bar{x}_i = \phi \bar{x}_{i-1} + \bar{\xi}_i, i = 1, 2, \dots,$$

где $\phi = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1m} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; $\rho_{1j} = (-1)^{j+1} C_m^j \rho^j$; $\bar{\xi}_i = (\xi_i \ 0 \dots 0)^T$; $V_{\xi} = M\{\bar{\xi}_i \bar{\xi}_i^T\}$.

После выполненных преобразований воспользуемся стандартными уравнениями линейного фильтра Калмана для нахождения оптимальных оценок информационного СП:

$$\hat{\bar{x}}_i = \hat{\bar{x}}_{i-1} + P_i C^T \frac{1}{\sigma_n^2} (z_i - C \hat{\bar{x}}_{i-1}), P_i = P_{i-1} (E + \frac{1}{\sigma_n^2} C^T C P_{i-1})^{-1},$$

$$\text{где } P_{i-1} = \phi P_{i-1} \phi^T + V_{\xi}; \hat{\bar{x}}_{i-1} = \phi \hat{\bar{x}}_{i-2}.$$

На каждом $i - m$ шаге оценивания строится оптимальный прогноз $\hat{x}_{i-1} = \sum_{j=1}^m \rho_{1j} \hat{x}_{i-j}$ на основе предыдущих оценок $\hat{x}_{i-j}, j = 1, 2, \dots, m$, и находится наилучшая (в смысле минимума дисперсии ошибки) $P_{11i} = M\{(x_i - \hat{x}_i)^2\}$ оценка

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{i-1} + P_{11i} \frac{1}{\sigma_n^2} (z_i - \hat{x}_{i-1}),$$

где $P_{11i} = P_{i-1} \phi^T \left(1 + \frac{P_{i-1} C^T C P_{i-1}}{\sigma_n^2} \right)^{-1}$. Остальные компоненты вектора $\hat{\bar{x}}_i$ вычисляются на основе

интерполяции предшествующих оценок с учетом очередного наблюдения z_i и взаимных ковариаций ошибок оценивания.

На рис. 4 показаны дисперсии ошибок фильтрации, полученные для моделей разной кратности и при разных отношениях дисперсии сигнала к дисперсии шума $q = \sigma_x^2 / \sigma_n^2$. Следует отметить, что оценка дисперсии ошибки фильтрации усреднялась по пяти обработанным изображениям размером 150×150 .

Результаты визуализации процесса работы предложенного алгоритма для моделей кратности (1;1) и (2;2) показаны на рис. 5. Параметры фильтрации: $q = 1, k_0 = 15$, размер изображения 300×300 . Сверху вниз представлены исходные изображения, зашумленные изображения и отфильтрованные изображения.

Анализ полученных результатов показывает, что применение АР более высоких порядков для описания изображений повышает эффективность фильтрации (в среднем для моделей 1-го и 2-го порядков на 32% при $q=1$).

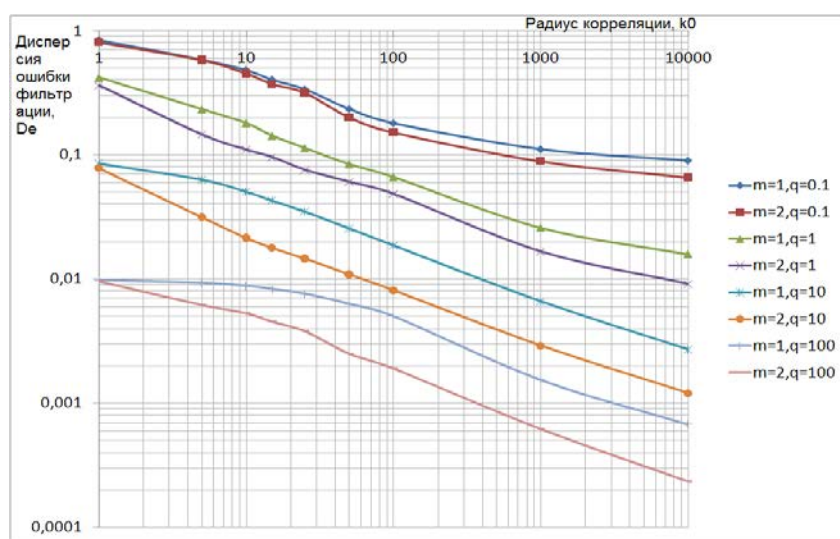


Рисунок 4. Эффективность фильтрации двумерных изображений.

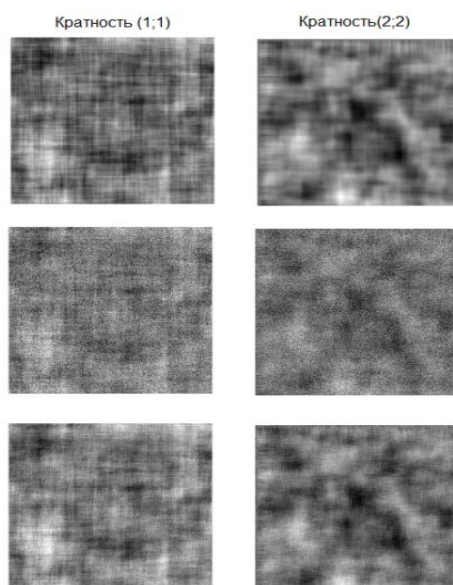


Рисунок 5. Результат фильтрации имитируемых изображений.

5. Заключение

Таким образом, представлены и проанализированы модели СП на базе АР с кратными корнями характеристических уравнений. Найдены соотношения между корреляционными свойствами, кратностями и другими параметрами таких моделей. Предложены эффективные квазиоптимальные алгоритмы фильтрации. Показано, что при фиксированном радиусе корреляции применение моделей высоких порядков позволяет снизить дисперсию ошибки фильтрации.

6. Благодарности

Результаты получены при поддержке гранта РФФИ №17-01-00179.

7. Литература

- [1] Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В. А. Сойфера. – М.: Физматлит, 2001. – 784 с.

- [2] Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
- [3] Булинский, А.В. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем / А.В. Булинский, А.П. Шашкин. – М.: Физматлит, 2008. – 480 с.
- [4] Глазов, Г.Н. Моделирование дискретных гауссовых случайных полей / Г.Н. Глазов, А.Г. Костевич // Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании. Вып. 2. – Под ред. А.А. Шелупанова. – Томск: SST, 2002. – С. 19-27.
- [5] Васильев, К.К. Прикладная теория случайных процессов и полей / К.К. Васильев, Я.П. Драган, В.А. Казаков. – Под ред. К.К. Васильева, В.А. Омельченко. – Ульяновск: УлГТУ, 1995. – 256 с.
- [6] Васильев, К.К. Авторегрессионные модели случайных полей с кратными корнями / К.К. Васильев, О.В. Попов // Труды 4-й конф. «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии». Ч. 1. – Новосибирск, 1998. – С. 258-260.
- [7] Васильев, К.К. Статистический анализ изображений / К.К. Васильев, В.Р. Крашенинников. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – 214 с.
- [8] Васильев, К.К. Анализ авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений / К.К. Васильев, Н.А. Андриянов // Радиотехника. – 2017. – № 6. – С. 13-17.
- [9] Андриянов, Н.А. Разработка программного комплекса для решения задач фильтрации случайных полей / Н.А. Андриянов, К.К. Васильев, В.Е. Дементьев // Современные тенденции в науке, технике, образовании. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции: в 3-х частях. Ч. 1. – 2016. – С. 40-41.
- [10] Васильев, К.К. Авторегрессии с кратными корнями характеристических уравнений / К.К. Васильев // Радиотехника. – 2014. – №11 – С. 74-78.
- [11] Васильев, К.К. Оптимальная обработка сигналов в дискретном времени: Учеб. пособие / К.К. Васильев. – М.: Радиотехника, 2016. – 288 с.

Use autoregressions with multiple roots of the characteristic equations to image representation and filtering

K.K. Vasiliev¹, N.A. Andriyanov¹

¹Ulyanovsk State Technical University, Severny Venets 32, Ulyanovsk, Russia, 432027

Abstract. Probabilistic properties of stochastic models of images generated by spatial separable autoregressions with multiple roots of characteristic equations are investigated. Particular attention is paid to the study of covariance functions of models of different orders that provide the same correlation radii. The task of filtering images generated by autoregressions with multiple roots is considered. The efficiency of filtration at different noise levels and characteristics of models was investigated.

Keywords: image processing, autoregression models, characteristic equations, multidimensional grids, correlation function, random field, optimal filtering, covariance error matrices.