Применение метода интегральных многообразий для получения низкочастотных уравнений движения асимметричного зонда в разряженной атмосфере

В.В. Любимов[1], **С.С. Кузнецова**[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Рассматривается задача о неуправляемом спуске космического зонда в разряженной атмосфере. Предполагается, что зонд представляет собой твёрдое тело и имеет форму, близкую к телу вращения. Характерной особенностью конструкции зонда является наличие немалой геометрической и аэродинамической асимметрий. Исходная нелинейная система уравнений движения зонда не позволяет осуществлять эффективный асимптотический анализ эволюций движения зонда. По этой причине необходимо произвести понижение порядка исходной системы уравнений движения зонда. Целью этой работы является получение низкочастотных нелинейных уравнений движения асимметричного зонда, совершающего неуправляемый спуск в разряженной атмосфере. При понижении порядка исходной системы применяется метод интегральных многообразий. Анализ медленной фракции в полученной низкочастотной системе уравнений может быть исследован, например, методом усреднения.

1. Введение

Одной из важнейших задач современной динамика полета является изучение спуска космических аппаратов в атмосфере планет земной группы. Имеется значительное количество публикаций по данной тематике [1-4]. Реальные спускаемые космические аппараты (КА) имеют форму, близкую к осесимметричной. При этом конструктивные особенности КА неизменно приводят к образованию на их борту разнообразных асимметрий, например, массово-инерционной и аэродинамической асимметрий. В ряде исследований по тематике атмосферного спуска показывается, что наличие сочетания малых массовой и аэродинамической асимметрий может привести к реализации главного резонанса при движении КА относительно центра масс [5]. Известно, что длительный главный резонанс приводит к нарушению технологических ограничений по пространственному углу атаки. Кроме того, разнообразные резонансные явления могут способствовать нештатному увеличению угловой скорости при спуске КА. В частности, к таким явлениям относятся вторичные резонансные эффекты [6-7]. С практической точки зрения, при исследовании движения асимметричного КА в атмосфере также следует производить анализ устойчивости резонансных явлений. Следует отметить, что имеется два вида устойчивости резонансов: внутренняя и внешняя. При анализе внутренней устойчивости резонансов движение КА в атмосфере рассматривается в малой окрестности резонанса [8-9]. Внешняя устойчивость резонансов исследуется вне малой окрестности резонанса. При этом внешняя устойчивость резонансов может привести к значительной эволюции медленных переменных системы вне малой окрестности главного резонанса [10-11].

Отметим, что в настоящее время известно значительное количество работ по исследованию резонансных явлений и их устойчивости при спуске КА с малой асимметрией в атмосфере. При этом представляет практический интерес изучение резонансных явлений при движении асимметричного КА (с немалой асимметрией) в разряженной атмосфере. В частности, такая постановка задачи является перспективной с учётом возрастающего интереса человечества к изучению и освоению Марса. Однако, применение известных асимптотических методов к исследованию движения КА в атмосфере посредством исходной нелинейной системы значительно осложнено существенной нелинейностью данной системы.

Целью этой работы является получение низкочастотных нелинейных уравнений неуправляемого движения зонда с немалой асимметрией, совершающего спуск в разряженной атмосфере.

Краткое содержание статьи следующее: в разделе 2 представлены исходные нелинейные уравнения движения асимметричного зонда в разряженной атмосфере относительно центра масс. В разделе 3 исходные уравнения записываются в сингулярно-возмущенном виде и определяется искомое интегральное многообразие. Раздел 4 содержит проверку условий устойчивости решений на интегральном многообразии. Работа завершается разделом 5, где представлена искомая низкочастотная система уравнений движения.

2. Исходные уравнения движения асимметричного зонда в разряженной атмосфере

Рассматривается неуправляемый спуск космического зонда в разряженной атмосфере. Космический зонд представляет собой твёрдое тело с формой, близкой к телу вращения. Конструкция зонда предполагает наличие немалой массовой и аэродинамической асимметрий.

По аналогии со случаем движения КА с малой асимметрией в плотных слоях атмосферы, рассмотренным в работе [8], систему уравнений движения зонда с немалой асимметрией относительно центра масс в разряженной атмосфере можно представить следующим образом:

$$\frac{dR}{dt}=\varepsilon\frac{M_x}{I}, \tag{1}$$

$$\frac{dG}{dt}=\varepsilon M_{xv}+\varepsilon\frac{C_{yv}qS}{mV}\frac{R\cos\alpha-G}{\sin\alpha}, \tag{2}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\frac{(R\cos\alpha-G)(R-G\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}+\varepsilon\frac{M_{zn}}{I}+\varepsilon\left[m_{zs}^{\bar{\omega}}\frac{qSL^2}{V}-C_{yv}^{\alpha}\frac{qS}{mV}\right]\frac{d\alpha}{dt}, \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{R}{\bar{I}_x}+\frac{R\cos\alpha-G}{\sin^2\alpha}\cos\alpha, \tag{4}$$

где ε – малый безразмерный параметр, характеризующий величину следующих аэродинамических моментов: $M_{xv}=M_x\cos\alpha-M_{yn}\sin\alpha$, $M_x=C_{yn}\left(\Delta\bar{z}\cos\varphi+\Delta\bar{y}\sin\varphi\right)qSL$,

$M_{yn}=\left[\left(m_y^f-C_x\Delta\bar{z}\right)\cos\varphi-\left(m_z^f+C_x\Delta\bar{y}\right)\sin\varphi\right]qSL$,

$M_{zn}=m_{zn}qSL+\left[\left(m_z^f+C_x\Delta\bar{y}\right)\cos\varphi-\left(m_y^f-C_x\Delta\bar{z}\right)\sin\varphi\right]qSL$; C_x, C_{yn} - аэродинамические коэффициенты, $C_{yn}=C_{yv}\cos\alpha-C_{xv}\sin\alpha$, $C_x=C_{xv}\cos\alpha+C_{yv}\sin\alpha$; $\mathrm{C}_{\mathrm{yv}}^{\alpha}=\mathrm{dC}_{\mathrm{yv}}/\mathrm{d}\alpha$, $m_{zn}^{\bar{\omega}}$ - коэффициент демпфирующего момента, m_y^f, m_z^f - коэффициенты малых аэродинамических моментов от асимметрии формы зонда, заданные в связанной системе координат $OXYZ$; m_{zn} - коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента, действующий в плоскости пространственного угла атаки; ω_x - составляющая угловой скорости зонда в связанной системе координат $OXYZ$; V - скорость центра масс зонда, Δy, Δz - смещения центра масс зонда в связанной системе координат $OX_1Y_1Z_1$, оси которой параллельны осям связанной системы координат $OXYZ$, а центр координат совмещён с точкой приведения аэродинамических сил и моментов O_1; $R = Q_x / I$, $G = Q_{xv} / I$, $Q_x = I_x \omega_x$, $Q_{xv} = I_x \omega_x \cos\alpha + I\omega_\gamma \sin^2\alpha$; γ - скоростной угол крена, $\omega_\gamma = \dfrac{d\gamma}{dt}$.

Систему (1)-(4) требуется рассматривать совместно с уравнениями движения центра масс зонда [9]. Эта система описывает прецессионное движение зонда с немалой асимметрией в атмосфере. Исследование нелинейной системы уравнений (1)-(4) непосредственно возможно только с помощью численных методов. Поэтому для проведения приближённо-аналитического анализа движения КА обычно используют разнообразные асимптотические методы.

Покажем, что применение метода интегральных многообразий также позволяет произвести декомпозицию уравнений движения зонда с немалой асимметрией относительно центра масс в разряжённой атмосфере. С этой целью представим систему уравнений движения асимметричного зонда в атмосфере (1)-(4) в следующем компактной форме:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X\left(x, \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \varphi\right), \tag{5}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + F(x,\alpha) = \varepsilon\left[f_1(x,\alpha,\varphi) + f_2(x,\alpha,\varphi)\frac{d\alpha}{dt}\right], \tag{6}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi(x,\alpha), \tag{7}$$

где $x = (Q_x,\ Q_{xv},\ \omega)$ - вектор медленных переменных, ω - частота прецессии зонда при $\omega_x = 0$, определяемая из решения дифференциального уравнения $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon \dfrac{\omega}{2q}\dfrac{d\omega}{dt}$;

$$f_1(x,\varphi,\alpha) = \Delta M_{zn} / I;\quad f_2(x,\alpha) = m_{zs}^{\bar{\omega}} \frac{qSL^2}{V} - C_{yv}^{\alpha}\frac{qS}{mV};\quad \Phi = \frac{Q_x}{I_x} + \frac{Q_x\cos\alpha - Q_{xv}}{I\sin^2\alpha}\cos\alpha;$$

$$F(x,\alpha) = -\varepsilon\frac{M_{zn}}{I} - \frac{\left(Q_x\cos\alpha - Q_{xv}\right)\left(Q_x - Q_{xv}\cos\alpha\right)}{I^2\sin^3\alpha},$$

$$\Delta M_{zn} = \left[\left(m_z^f + C_x\Delta\bar{y}\right)\cos\varphi - \left(m_y^f - C_x\Delta\bar{z}\right)\sin\varphi\right]qSL.$$

3. Сингулярно-возмущённые уравнения и интегральное многообразие

В окрестности резонанса, соответствующего случаю, когда $\Phi(x,\alpha) = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, в системе (5)-(7) вводится медленное время $\tau = \mu t$ $\left(\mu = \sqrt{\varepsilon}\right)$ и нормированное расстояние до резонансной поверхности $\rho(x,\alpha) = \mu^{-1}\Phi(x,\alpha)$, тогда получаем

$$\frac{dx}{d\tau} = \mu X(x, \alpha, \omega_\alpha, \varphi), \tag{8}$$

$$\mu\frac{d\omega_\alpha}{d\tau} = -F(x,\alpha) + \mu^2\left[f_1(x,\alpha,\varphi) + f_2(x,\alpha,\varphi)\omega_\alpha\right], \tag{9}$$

$$\mu\frac{d\alpha}{d\tau} = \omega_\alpha, \tag{10}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \rho(x,\alpha) + \mu\Phi_1(x,\alpha,\omega_\alpha,\varphi), \tag{11}$$

где $\omega_\alpha = d\alpha / dt$.

Система (8)-(9) представляет собой сингулярно-возмущённую систему. Соответствующая ей вырожденная система имеет вид (μ=0):

$$\frac{dx_0}{d\tau} = 0, \tag{12}$$

$$F(x_0, \alpha_0) = 0, \tag{13}$$

$$\omega_{\alpha 0} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau} = \rho(x_0, \alpha_0), \tag{15}$$

и информации об изменении переменных x_0, α_0 не содержит. Так как не представляется возможным использование системы (12)-(15) для описания изменения x_0, α_0 переменных на интегральном многообразии. По этой причине применим процедуру разложения решений сингулярно-возмущённой системы в асимптотические ряды $\alpha = \alpha_0(\tau) + \mu\alpha_1(\tau) + \ldots$.

С целью декомпозиции системы (8)-(11) применим метод интегральных многообразий. При этом система (8)-(11) в окрестности корня $\alpha_0 = \psi(x_0)$ уравнения $F(x_0, \alpha_0) = 0$ приводится к стандартному виду метода интегральных многообразий [8]:

$$\frac{dy}{d\tau} = Y(y, z, \mu), \tag{16}$$

$$\mu \frac{dz}{d\tau} = A(y, \mu) z + Z(y, z, \mu). \tag{17}$$

Здесь $y = [x, \varphi]^T$, $Y = [\mu X, \rho]^T$, $z = [\Delta\omega_\alpha, \Delta\alpha]^T$, $\Delta\omega_\alpha = \omega_\alpha$, $\Delta\alpha = \alpha - \psi$, $Z = [Z_1, Z_2]^T$,

$$Z_1 = -F(x, \psi + \Delta\alpha) + \mu^2 \left[f_1(x, \varphi, \psi + \Delta\alpha) + f_2(x, \varphi, \psi + \Delta\alpha)\Delta\omega_\alpha \right] - \mu^2 f_2(x, \varphi, \psi)\Delta\omega_\alpha -$$

$$-\mu^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial \psi} - \frac{\partial F}{\partial \psi} \right)\Delta\alpha, \; Z_2 = -\mu^2 \partial\psi / \partial x \left[X(x, \varphi, \psi + \Delta\alpha, \omega_\alpha) - \frac{\partial X}{\partial \psi}\Delta\alpha - \frac{\partial X}{\partial \omega_\alpha}\Delta\omega_\alpha \right],$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{y}, \mu) = \begin{bmatrix} \mathrm{f}_2 & -\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \psi} + \dfrac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \psi} \\ 1 - \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial \psi}\dfrac{\partial \psi}{\partial \psi} & -\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial \psi}\dfrac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}} \end{bmatrix},$$ где производные функций F, X, f_1 определяются при выполнении равенств: $\omega_\alpha = 0$, $\alpha = \psi$.

При выполнении условий теоремы о существовании интегрального многообразия [12] система (12)-(15) имеет единственное *n+1* - параметрическое многообразие $\mathrm{z} = \mathrm{H}(\mathrm{y}, \mu)$, движение по которому для каждого $\mu \in (0, \mu_0]$ при $y \in R^{n+1}$описывается уравнением следующего вида: $\dfrac{dy}{d\tau} = Y(y, H(y, \mu), \mu)$. Интегральное многообразие $z = H(y, \mu)$ раскладывается в асимптотический ряд по μ. Определяя искомые составляющие этого ряда $H_i(y, \mu),\ i = 1,2,\ldots$ до членов $o(\mu^2)$ можно показать, что интегральное многообразие записывается в следующем виде:

$$\omega_\alpha = H_1(x, \varphi, \mu), \tag{18}$$

$$\alpha = \psi + H_2(x, \varphi, \mu). \tag{19}$$

Здесь $H_1 = \mu^2 \dfrac{\partial \psi}{\partial x} X(x, \psi, \varphi)$, $H_2 = \mu^2 f_1(x, \psi, \varphi) \left(\dfrac{\partial F}{\partial \psi} \right)^{-1}$.

4. Условия устойчивости решений на интегральном многообразии

Декомпозиция исходной системы методом интегральных многообразий предполагает выполнение следующих двух основных условий [8]:

Условие 1. Уравнение $F(x_0,\alpha_0)=0$ имеет изолированный корень $\alpha_0=\psi(x_0)$. При этом данный корень должен удовлетворять условию $\frac{\partial F}{\partial\theta}(x_0)>C_1>0$, где C_1 - некоторая константа.

Рассмотрим подробнее выполнение условия 1. Во-первых, выполним преобразование выражения $F(x,\alpha)=-\frac{M_{zn}}{I}-\frac{(Q_x\cos\alpha-Q_{xv})(Q_x-Q_{xv}\cos\alpha)}{I^2\sin^3\alpha}$. Здесь кинетические моменты Q_x, Q_{xv} соответственно равны:

$$Q_x=I_x\omega_x\,, \tag{20}$$

$$Q_{xv}=I_x\omega_x\cos\alpha+I\omega_\gamma\sin^2\alpha\,. \tag{21}$$

Учитывая выражения (20)-(21), функция $F(x,\alpha)$ принимает вид:

$$F(x,\alpha)=-\frac{M_{zn}}{I}+\omega_\gamma\sin\alpha(\bar{I}_x\omega_x-\omega_\gamma\cos\alpha)\,. \tag{22}$$

Можно показать, что при $\omega_\gamma=\frac{\bar{I}_x\omega_x}{2\cos\alpha}\pm\frac{\sqrt{0,25\bar{I}_x^2\omega_x^2+\omega^2}}{\cos\alpha}$ и при $\omega^2=-\frac{\mathrm{M_{zs}}}{\mathrm{I}}\mathrm{ctg}\alpha$ получаем $F(x,\alpha)\equiv 0$. Действительно, выражение $\omega_\gamma=\frac{\bar{I}_x\omega_x}{2\cos\alpha}\pm\frac{\sqrt{0,25\bar{I}_x^2\omega_x^2+\omega^2}}{\cos\alpha}$ получается в результате нахождения Q_{xv} из уравнения $F(x,\alpha)=-\frac{M_{zn}}{I}-\frac{(Q_x\cos\alpha-Q_{xv})(Q_x-Q_{xv}\cos\alpha)}{I^2\sin^3\alpha}=0$ с последующим применением выражений (20)-(21). Приравнивая функцию (22) к нулю получаем уравнение

$$-\frac{M_{zn}}{I}+\omega_\gamma\sin\alpha_0(\bar{I}_x\omega_{x0}-\omega_\gamma\cos\alpha_0)=0\,. \tag{23}$$

Из численного решения нелинейного алгебраического уравнения (23) находим корень $\alpha_0=\psi(x_0)$. Отметим, что искомые величины угла атаки $\alpha_0=\psi(x_0)$ должны находиться в рамках рассматриваемого интервала $0<\alpha_0<0{,}5\pi$. При этом пространственный угол атаки равен значению данного угла на многообразии $\alpha=\psi$. Однако, данный корень $\alpha_0=\psi(x_0)$ должен удовлетворять условию также $\frac{\partial F}{\partial\theta}(x_0,\alpha_0)>0$.

Представим функция $F(x,\alpha)$ с учётом порядка, входящих в эту функцию слагаемых:

$$F(x,\alpha)=\omega_\gamma\sin\alpha(\bar{I}_x\omega_x-\omega_\gamma\cos\alpha)-\varepsilon\frac{M_{zn}}{I}\,. \tag{24}$$

Исключая из выражения (24) малую величину $\frac{M_{zn}}{I}$ получаем:

$$F(x,\alpha)\approx\omega_\gamma\sin\alpha(\bar{I}_x\omega_x-\omega_\gamma\cos\alpha). \tag{25}$$

Дифференцируя функцию (25) по углу атаки получаем условие $\frac{\partial F}{\partial\theta}(x_0,\alpha_0)>0$ в виде

$$\frac{\partial F}{\partial\theta}(x_0,\alpha_0)=\omega_\gamma^2+\bar{I}_x\omega_{x0}\omega_\gamma\cos\alpha_0-2\omega_\gamma^2\cos^2\alpha_0>0\,. \tag{26}$$

Из решения неравенства (26) с учётом выражения $\omega_\gamma=\frac{\bar{I}_x\omega_x}{2\cos\alpha}\pm\frac{\sqrt{0,25\bar{I}_x^2\omega_{x0}^2+\omega^2}}{\cos\alpha}$ при $0<\alpha_0<\pi/4$ получаем:

$$|\omega_{x0}|>2I_x^{-1}|\omega|\,\mathrm{c}tg2\alpha_0\,. \tag{27}$$

Отметим, что при $\pi / 4 < \alpha_0 < \pi / 2$ неравенство (27) выполняется при произвольных значениях $\omega_{x0} > 0, \omega > 0$ или $\omega_{x0} < 0, \omega < 0$.

Таким образом, искомый изолированный корень $\alpha_0 = \psi(x_0)$ находится из решения уравнения (23). При этом корень $\alpha_0 = \psi(x_0)$ должен удовлетворять условию (27).

Условие 2. Собственные значения матрицы $A(y,\mu)$, вычисленные с учетом системы (8)-(11), должны иметь отрицательные действительные части. Рассмотрим выполнение данного условия. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} f_2 - \lambda & -\dfrac{\partial F}{\partial \psi} + \dfrac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ 1 - \dfrac{\partial X}{\partial \psi}\dfrac{\partial \psi}{\partial x} & -\dfrac{\partial X}{\partial \psi}\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Решая уравнение (28), найдём значения матрицы $A(y,\mu)$

$$\lambda_{1,2}(y,\mu) = -0.5\delta_1 \pm 0.5\left(\delta_1^2 - 4\delta_2\right)^{0.5}, \tag{29}$$

где $\delta_1 = -f_2 + \dfrac{\partial X}{\partial \psi}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$, $\delta_2 = \left(\dfrac{\partial F}{\partial \psi} - \dfrac{\partial f_1}{\partial \psi}\right)\left(1 - \dfrac{\partial X}{\partial \psi}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) - f_2\dfrac{\partial X}{\partial \psi}\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$.

При соответствующем выборе константы C_1 ($\partial F / \partial \theta(x_0) > C_1 > 0$) дискриминант характеристического квадратного уравнения (28) имеет отрицательный знак. В этом случае матрица $A(y,\mu)$ имеет комплексно-сопряжённые собственные значения $\lambda_{1,2}$. Пусть их действительная часть удовлетворяет условию

$$\frac{\mu^2}{2}\left(f_2 - \frac{\partial X}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) < -2\gamma < 0, \tag{30}$$

где $\gamma = O(\mu^2)$ - некоторая положительная константа.

Условие отрицательности действительных частей собственных значений матрицы $A(y,\mu)$ для системы (8)-(11) сводится к существованию диссипативного момента, действующего в плоскости пространственного угла атаки α:

$$f_2(x,\alpha_0) = m_{zn}^{\overline{\omega}}\frac{qSL^2}{V} - C_{yv}^{\alpha}\frac{qS}{mV} < -\frac{4\gamma}{\mu^2} < 0. \tag{31}$$

Условие (31) обеспечивается соответствующими демпфирующими характеристиками КА. Величина этого диссипативного момента определяет скорость с которой траектория системы приближается к интегральному многообразию.

5. Низкочастотная система уравнений движения асимметричного КА в атмосфере

Движение по интегральному многообразию описывается дифференциальными уравнениями (1), (2), (4), где ω_α и α определяются выражениями (18), (19). Приведём систему уравнений, описывающую движение по интегральному многообразию к форме, удобной для последующего применения асимптотических методов. Прежде всего, получим дифференциальное уравнение для переменной α при движении системы (1)-(4) по интегральному многообразию. Тогда, дифференцируя выражение для α (19), найдём

$$\mu\frac{d\alpha}{d\tau} = \mu\frac{d\psi}{d\tau} + \mu^2\frac{d}{d\tau}\left[f_1\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^{-1}\right] + O(\mu^3), \tag{32}$$

где производная $d\psi / dt$ определяется из производной функции $F(x,\psi)$ и имеет вид $\dfrac{d\psi}{d\tau} = -\mu\dfrac{\partial F}{\partial x}\left[\dfrac{\partial F}{\partial \psi}\right]^{-1} X(x,\varphi,\psi)$. При этом в правой части уравнения (32), оставаясь в рамках принятой асимптотики, можно учесть, что $\psi \approx \alpha$. При решении уравнения (32) начальные условия для угла α должны принадлежать интегральному многообразию (18)-(19).

В результате получаем уравнение для пространственного угла атаки в следующем виде:

$$\frac{d\alpha}{dt}\left[\omega_\gamma^2 + \left(\bar{I}_x\omega_x - \omega_\gamma \cos\alpha\right)\left(\bar{I}_x\omega_x - 2\omega_\gamma\cos\alpha\right)\right] =$$

$$= \mu\frac{M_{zn}}{Iq}\frac{dq}{dt} + \mu\frac{M_{zn}^{\varphi}}{I}\frac{d\varphi}{dt} + \mu\left(\bar{I}_x\omega_x - 2\omega_\gamma\cos\alpha\right)\frac{M_{yn}}{I} -$$

$$-\mu\frac{M_x}{I}\omega_\gamma\sin\alpha - \mu\frac{C_{yv}qS}{mV}\left(\bar{I}_x\omega_x - \omega_\gamma\cos\alpha\right)\left(\bar{I}_x\omega_x - 2\omega_\gamma\cos\alpha\right). \quad (33)$$

где $M_{zn}^{\varphi} = -C_{x1}\Delta z_n qS + \left(m_z^f \cos\varphi_n - m_y^f \sin\varphi_n\right)$.

Из уравнения (1) с учётом выражения (20) получаем:

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt} = \mu M_x. \quad (34)$$

Из уравнения (4) с учётом выражений (20)-(21) получаем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_x - \omega_\gamma\cos\alpha,$$

(35)

При асимптотическом анализе системы уравнений (33)-(35) угловая скорость ω_γ вычисляется непосредственно из нелинейного уравнения $F(x,\alpha)=0$ и принимает вид:

$$\omega_\gamma^{+,-} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\bar{I}_x\omega_x}{2\cos\alpha} \pm \frac{1}{\cos\alpha}\left[\frac{\bar{I}_x^2\omega_x^2}{4} - \frac{M_{zn}}{I}ctg\alpha\right]^{1/2} + O(\varepsilon), \quad (36)$$

где знаки + и - соответствуют “прямой” и “обратной” прецессиям КА [6].

Отметим, что у переменных системы (33)-(35) не указаны индексы «0», обозначающие принадлежность значений данных переменных к интегральному многообразию. Полученная система (33)-(35) описывает медленную составляющую движения асимметричного КА относительно центра масс в разряженной атмосфере планеты. Интересно, что данная система отличается по форме записи от низкочастотной системы [8], описывающей движение КА с малой асимметрией в атмосфере только отсутствием слагаемого M_{zs}^{α}/I в левой части приближенного уравнения для пространственного угла атаки.

Низкочастотная система уравнений (33)-(35) решается числено совместно с тремя уравнениями, описывающими движение центра масс КА в атмосфере, а именно, с уравнением для скорости, уравнением для высоты и уравнением для угла наклона траектории [9]. Эта система описывает движение КА на следующем интервале изменения пространственного угла атаки: $\alpha \in [0, \pi/2]$.

6. Заключение

Исходная нелинейная система записывается в стандартной форме сингулярно-возмущённых динамических систем. Для понижения порядка исходной системы применяется метод интегральных многообразий. Полученная в результате приближенная низкочастотная система уравнений позволяет применять известные асимптотические методы для исследования различных резонансных явлений при математическом моделировании спуска асимметричного КА в разряженной атмосфере. В частности, для этого могут применятся различные схемы метода усреднения [13].

7. Литература

[1] Barinova, E.V. Studying transient motion modes with respect to the landing module angle of attack with the restoring moment triharmonic characteristic on entering the atmosphere / E.V. Barinova, I.A. Timbai // Cosmic Research. – 2015. – Vol. 53(3). – P. 246-255.
[2] Zabolotnov, Yu.M. Statistical analysis of attitude motion of a light capsule entering the atmosphere / Yu.M. Zabolotnov // Cosmic Research. – 2013. – Vol. 51(3). – P. 213-224.
[3] Desai, P.N. Entry, descent, and landing performance of the Mars Phoenix lander / P.N. Desai, J.L. Prince, E.M. Queen, M. Schoenenberger, J.R. Cruz, M.R. Grover // Journal of SC and Rockets. - 2011. – Vol. 48(5). – P. 798-808.
[4] Way, D.W. Assessment of the Mars Science Laboratory entry, descent, and landing simulation / D.W. Way, J.L. Davis, J.D. Shidner // Advances in the Astronautical Sciences. - 2013. – Vol. 148. – P. 563-581.
[5] Lyubimov, V.V. Induced resonant torques during the descent of a small asymmetric spacecraft in the atmosphere / V.V. Lyubimov // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. –Vol. 1096(1). – P. 1-10.
[6] Lyubimov, V.V. Asymptotic analysis of the secondary resonance effects in the rotation of a SC with small asymmetry in the atmosphere / V.V. Lyubimov // Russian Aeronautics. – 2014. – Vol. 57(3). – P. 245-252.
[7] Zabolotnov, Yu.M. Secondary resonance effect in the motion of a SC in the atmosphere / Yu.M. Zabolotnov, V.V. Lyubimov // Cosmic Research. – 1998. –Vol. 36(2). – P.194-201.
[8] Zabolotnov, Yu.M. A method of studying the resonance motion of a single nonlinear oscillation system / Yu. M. Zabolotnov // Mechanics of Solids. – 1999. – Vol. 1. – P. 33-45.
[9] Yaroshevski, V.A. Motion of uncontrolled body in the atmosphere / V.A Yaroshevski – Moscow: Mashinostroenie, 2078. – 168 p.
[10] Lyubimov, V.V. External stability of a resonance in a nonlinear system with slowly changing variables / V.V. Lyubimov // Mechanics of Solids. – 2002. – Vol. 37(6). – P. 42-47.
[11] Lyubimov, V.V. External stability of a resonance during the descent of a SC with a small variable asymmetry in the martian atmosphere / V.V. Lyubimov, V.S. Lashin // Advances in Space Research. – 2017. – Vol. 59(6). – P. 1607-1613.
[12] Shchepakina, E. Singular Preturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M. P. Mortell // Lecture Notes in Mathematics Cham: Springer International Publishing Switzerland, 2014. – 212 p.
[13] Sanders, J.A. Averaging methods in nonlinear dynamical systems. Applied Mathematical Sciences / J.A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock – New York: Springer-Verlag, 2007. – 434 p.

Application of the method of integral manifolds to obtain low-frequency equations of motion of an asymmetric probe in the rarefied atmosphere

V.V. Lyubimov[1], S.S. Kuznecova[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. The problem of uncontrolled descent of a space probe in the rarefied atmosphere is considered. We assume that the probe is a solid and it has a shape close to the body of rotation. A characteristic feature of the probe design is the presence of significant quantities of geometrical and aerodynamic asymmetries. The initial nonlinear system of equations of motion of the probe does not allow for an efficient asymptotic analysis of the evolution of the probe motion. For this reason, we need to lower the order of the original system of equations of motion of the probe. The aim of this work is to obtain low-frequency nonlinear equations of motion of the asymmetric probe performing uncontrolled descent in the rarefied atmosphere n this case, we apply the method of integral manifolds. The analysis of the slow fraction in the resulting low-frequency system of equations can be investigated, for example, by the averaging method.