

# Применение метода усреднения для прогноза движения и управления электродинамической тросовой системой наноспутников

Ч. Ван<sup>1</sup>, Ю.М. Заболотнов<sup>2</sup>, П.С. Воеводин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Северо-западный политехнический университет, Youyi Xilu 127, Xi'an, Shaanxi, P. R. China, 710072

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Рассматривается задача управления движением электродинамической тросовой системой на околоземной орбите. Орбитальная тросовая система состоит из двух наноспутников, соединенных проводящим тросом. Посредством взаимодействия проводящего ток троса с магнитным полем Земли осуществляется изменения параметров орбиты центра масс системы. Для построения приближенно оптимального управления движением системы используется принцип динамического программирования Беллмана в сочетании с методом усреднения. Построена усредненная математическая модель движения центра масс для прогнозирования изменения орбитальных параметров системы. Приводятся численные результаты, полученные по модели движения с распределенными параметрами, подтверждающие возможность применения приближенно оптимального управления и результатов оценки изменения параметров орбиты.

## 1. Введение

Электродинамические тросовые системы (ЭДТС) могут работать в пассивном и активных режимах. В пассивном режиме ЭДТС используются для удаления космических аппаратов (КА) с орбиты [1–4]. Активный режим работы ЭДТС характеризуется с тем, что с помощью бортовых источников энергии, расположенных на КА, создается разность потенциалов [1]. При этом можно управлять величиной и направлением тока в проводящем тросе. При взаимодействии проводника, по которому пропускается ток, с магнитным полем Земли возникает сила Ампера-Лоренца, с помощью которой можно изменять параметры орбиты системы. До настоящего времени проведено более десятка реальных экспериментов с проводящими тросами на орбите в различных странах, подтверждающих перспективность рассматриваемого способа управления [3,5,6].

Сила Ампера-Лоренца, действующая на элементарный участок троса в магнитном поле, определяется следующей формулой [1]

$$\mathbf{F} = I \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

где  $I$  – величина тока,  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\boldsymbol{\tau}$  – единичный вектор, направленный по касательной к тросу.

Чтобы наиболее эффективно использовать ЭДТС для изменения параметров орбиты, трос должен находиться близи местной вертикали, проходящей через центр масс системы. В этом случае вектор равнодействующей электромагнитных сил (1) будет почти параллелен вектору скорости центра масс ЭДТС и использование рассматриваемого способа управления даст наибольшее приращение большой полуоси, а значит высоты орбиты.

Однако, как показано во многих работах, положения равновесия ЭДТС в близи вертикали при постоянном токе в тросе на околоземной орбите не устойчивы [1, 2, 7]. В зависимости от направления тока динамическая неустойчивость приводит или к возрастанию амплитуд «маятниковых» (поперечных) колебаний системы, или к возрастанию амплитуды изгибных (продольных) колебаний троса.

Для стабилизации движения ЭДТС вблизи вертикали используются пассивные [8] и активные методы управления [9–12]. При использовании активных методов управления величина тока корректируется с помощью дополнительных управляющих воздействий с использованием принципа обратной связи. В настоящей работе синтез управления осуществляется с помощью принципа динамического программирования Беллмана по квадратичному критерию оптимальности, зависящего от амплитуд колебаний в системе. Для приближенного решения уравнения Беллмана в частных производных используется метод усреднения, что позволяет найти уравнение регулятора в аналитическом виде.

Особенностью предлагаемого приближенно оптимального управления является учет изгибных колебаний троса, которые возникают при действии распределенной нагрузки от сил Ампера-Лоренца. Влияние изгибных колебаний троса возрастает, если массы концевых тел (наноспутников) достаточно малы. При построении приближенно оптимального управления предполагается, что при малых изгибных колебаниях форму троса можно приблизить дугой окружности некоторого радиуса. Данное предположение выполняется точно, если трос считать невесомым [1].

После построения приближенно оптимального управления эффективность предлагаемого способа управления подтверждается с помощью модели с распределенными параметрами, учитывающей массу троса и другие допущения, связанные с использованием для синтеза управления более простой модели [13]. Показано, что не учет при управлении изгибных колебаний троса может привести к потере устойчивости системы. Сформулированные выводы и рекомендации подтверждаются численными примерами.

## 2. Математическая модель движения системы с невесомым тросом

Если трос невесом, то форма троса при действии постоянной распределенной нагрузки — это дуга окружности некоторого радиуса [1]. Используя данное допущение, в монографии [1] методом Лагранжа получены уравнения движения ЭДТС относительно центра масс для экваториальной круговой орбиты в предположении, что масса одного КА много больше массы остальной части системы. В работе [13] проведено обобщение рассматриваемого подхода на случай произвольных масс КА и на эллиптические орбиты с наклоном.

В этом случае уравнения движения ЭДТС относительно центра масс записываются в виде [13]

$$\ddot{\theta} + \dot{\omega} + 2(\dot{\theta} + \omega)(\dot{r}/r - \dot{\phi} \tan \phi) + 1.5v^{-1}\omega^2 \sin 2\theta = Q_{\theta} / m_e r^2 \cos^2 \phi \quad (2)$$

$$\ddot{r} - r \left[ \dot{\phi}^2 + (\dot{\theta} + \omega)^2 \cos^2 \phi + v^{-1}\omega^2 (3 \cos^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \right] = Q_r / m_e \quad (3)$$

$$\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{r}/r + \left[ 0.5(\dot{\theta} + \omega)^2 + 1.5v^{-1}\omega^2 \cos^2 \theta \right] \sin 2\phi = Q_{\phi} / m_e r^2 \quad (4)$$

где  $r$  — расстояние между КА (КА рассматриваются как материальные точки),  $\theta, \phi$  — углы, определяющие положение линии, соединяющей КА, относительно орбитальной подвижной системы координат  $Cx_o y_o z_o$  (рисунок 1);  $Q_{\theta, r, \phi}$  — обобщенные силы Ампера-Лоренца,

$m_e = m_1 m_2 / m$ ,  $m_{1,2}$  — массы концевых точек ( $m_2$  — верхняя точка),  $m = m_1 + m_2$ ,

$\omega = \dot{\vartheta} = (\mu / p^3)^{0.5} v^2$ ,  $\dot{\omega} = \ddot{\vartheta} = -2\mu v^3 e \sin \vartheta / p^3$ ,  $\mu$  — гравитационный параметр Земли,

$v=1+e\cos\vartheta$ ,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $\vartheta$  – истинная аномалия,  $p$  – параметр орбиты. При записи уравнений (2–4) используется ньютоновское гравитационное поле, и предполагается, что длина троса много меньше расстояния центра масс до притягивающего центра. С линией, соединяющей концевые точки, связана система координат  $Cx_t y_t z_t$  (рисунок 1).

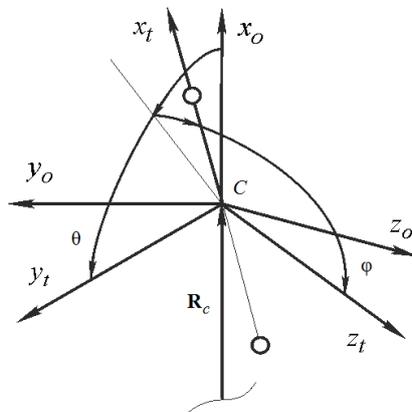


Рисунок 1. Системы координат.

При определении электромагнитных сил (1) используется модель магнитного поля Земли – прямой диполь [1]

$$\mathbf{B} = B_0 [\mathbf{e}_z - 3(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R] \tag{5}$$

где  $B_0 = \mu_m / R_c^3$ ,  $\mu_m$  – магнитный момент земного диполя,  $\mathbf{e}_R = \mathbf{R}_c / R_c$ ,  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор оси вращения Земли,  $(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_R)$  – скалярное произведение.

Обобщенные силы вычисляются из следующим образом [13]

$$\begin{aligned} Q_\theta &= B_0 I r \Delta [\cos \varphi \cos i - \sin \varphi \sin i \sin(\theta + u)] + \Delta Q_0 \\ Q_r &= -0.5 B_0 \cos i |I| r (\text{ctg} \psi \cos^2 \varphi + \psi^{-1} \sin^2 \varphi) \\ Q_\varphi &= Q_\psi + B_0 I r \Delta \sin i [\cos(\theta + u) + 3 \sin \theta \sin u] \end{aligned} \tag{6}$$

где  $\Delta = 0.5 r (m_2 - m_1) / m$ ,  $\psi$  – угол между касательной к окружности, проведенной через концевые точки, и хордой их соединяющей;  $i$  – наклонение орбиты,  $\Delta Q_0 = 3 B_0 I r \Delta \sin i \cos \theta \sin \varphi \sin u$ ,  $Q_\psi = 0.5 B_0 \cos i |I| r^2 \sin \varphi \cos \varphi (\text{ctg} \psi - \psi^{-1})$ ,  $u$  – аргумент широты. Величина тока  $I$  считается положительной, если он направлен от нижней к верхней точке.

Угол  $\psi$  определяется из геометрического соотношения [1]

$$r = L \gamma_t / \left[ \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi (\psi / \sin \psi)^2 \right]^{0.5} \tag{7}$$

где  $L$  – недеформированная длина троса,  $\gamma_t = 2 E_t \psi / (2 E_t \psi - B |I| L)$  – относительное удлинение троса  $E_t$  – жесткость троса. Предполагается, что трос растягивается в соответствии с законом Гука.

### 3. Положения равновесия системы вблизи вертикали

Для экваториальной круговой орбиты положения равновесия, близкие к вертикали, определяются из уравнений (2–4) в виде [13]

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin(\sigma), \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi \tag{8}$$

$$\psi_k = \arctg \left( \frac{\mu_m |I|}{6 \mu m_e \cos^2 \theta_k} \right), \quad r_k = L \gamma_t \frac{\sin \psi_k}{\psi_k}, \quad \dot{\theta}_k = \dot{r}_k = 0 \quad (k=1,2) \tag{9}$$

где  $\sigma = \mu_m I(m_2 - m_1) / 3\mu m_1 m_2$ .

#### 4. Линеаризованная система

При линеаризации системы (2–4) уравнения для отделяются от остальных линейных уравнений, и определяют колебания системы в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты. Причем по переменным линеаризованная система оказывается неуправляемой. Остальные уравнения линеаризованной системы записываются в виде уравнений второго порядка

$$x'' + cx = bx' \tag{10}$$

где  $x = (\Delta\theta, \Delta r)^*$  – вектор отклонений от положений равновесия (8–9),  $(*)$  – знак

транспонирования,  $x' = dx/d\tau$ ,  $x'' = d^2x/d\tau^2$ ,  $\tau = \omega t$  – безразмерное время,  $c = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad c_{11} = 3\cos 2\theta_{1,2}, \quad c_{21} = 3r_{1,2} \sin 2\theta_{1,2}, \quad c_{22} = \frac{r_{1,2} |\alpha| \Psi_{1,2}^2}{\gamma_t \sin^2 \Psi_{1,2} (\sin \Psi_{1,2} - \Psi_{1,2} \cos \Psi_{1,2})}$$

$$b_{12} = -2/r_{1,2}, \quad b_{21} = 2r_{1,2}$$

Система (10) записана в безразмерном виде при использовании тех же обозначений, то есть сделаны формальные замены  $r_{1,2} \Rightarrow r_{1,2}/L$ ,  $\Delta r \Rightarrow \Delta r/L$ . Переходя в системе (10) к нормальным координатам, получим

$$\xi'' + D\xi = b_n \xi' \tag{11}$$

где  $\xi = V^{-1}x$ ,  $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{pmatrix}$  – матрица собственных векторов матрицы  $c$ ,  $\delta = \frac{c_{21}}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$

$$D = V^{-1}cV = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}, \quad \omega_1^2 = c_{11}, \quad \omega_2^2 = c_{22}, \quad b_n = V^{-1}bV = \begin{pmatrix} -\delta b_{12} & b_{12} \\ b_{21} - \delta^2 b_{12} & \delta b_{12} \end{pmatrix}$$

Рассматривая правую часть системы (11) как возмущение, применим к (11) метод усреднения [19], то есть сделаем замену переменных

$$\xi_{1,2} = K_{1,2} \cos \gamma_{1,2}, \quad d\xi_{1,2}/d\tau = -K_{1,2} \omega_{1,2} \sin \gamma_{1,2} \tag{12}$$

где  $K_{1,2}$  и  $\gamma_{1,2}$  – амплитуды и фазы колебаний.

После усреднения по фазам получим

$$dK_{1,2}/d\tau = \pm \frac{3 \sin 2\theta_k}{\omega_2^2 - \omega_1^2} K_{1,2} = \pm \eta K_{1,2} \quad (k=1,2) \tag{13}$$

$$\text{где } \eta = \frac{\mu_m I(m_2 - m_1)}{\mu m_1 m_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}$$

Из уравнений (13) следует, что колебания ЭДТС относительно вертикали всегда неустойчивы, если момент от электродинамических сил отличен от нуля. Причем если  $\sin 2\theta_k > 0$ , то неустойчивость движения системы обусловлено возрастанием амплитуд маятниковых колебаний в плоскости орбиты (по углу  $\Delta\theta$ ). Если же  $\sin 2\theta_k < 0$ , то неустойчивость движения проявляется в возрастании амплитуд продольных (или изгибных) колебаний троса ( $\Delta r$ ).

#### 5. Определение приближенно оптимального управления

Для определения приближенно оптимального управления рассматривается система (11) с управлением и малым параметром

$$\xi'' + D\xi = \varepsilon (b_n \xi' + V^{-1}M \Delta u) \tag{14}$$

где  $\Delta u = \Delta I / I$  – управление,  $M = (M_1, M_2)^*$ ,  $M_1 = B_o I(m_2 - m_1) / 2m_1 m_2 \omega^2$ ,  $M_2 = B_o I / 2m_e \omega^2$

Введение малого параметра в систему (14) является формальным, то есть предполагается, что движение системы (14) слабо отличается от невозмущенных колебаний.

При синтезе управления используется квадратичный критерий оптимальности

$$J = \varepsilon \int_0^T P(K_1, K_2, \Delta u) dt \tag{15}$$

где  $P(K_1, K_2, \Delta u) = s_1 K_1^2 + s_2 K_2^2 + s_3 \Delta u^2$ ,  $s_{1,2,3} > 0$  – безразмерные весовые коэффициенты такие, что  $\sum s_k = 1$

Движение системы (14) рассматривается на асимптотически большом интервале времени  $T = L_t / \varepsilon$ , где  $L_t < \infty$

Условие Беллмана для определения оптимального управления имеет вид [14], [15]

$$\min_{\Delta u} \left( \frac{\partial W}{\partial K} \cdot \frac{dK}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt} + \varepsilon P(K, \Delta u) \right) = 0 \tag{16}$$

где  $W(K, \gamma, \Delta u)$  – функция Беллмана [15],  $K, \gamma$  – вектора амплитуд и фаз (12), а точка  $(\cdot)$  означает скалярное произведение векторов.

Дифференциальные уравнения для переменных  $K, \gamma$  с учетом управления в соответствии с методом усреднения имеют вид

$$dK_{1,2} / dt = -\frac{\varepsilon}{\omega_{1,2}} f_{1,2} \sin \gamma_{1,2}, \quad d\gamma_{1,2} / dt = \omega_{1,2} - \frac{\varepsilon}{K_{1,2} \omega_{1,2}} f_{1,2} \cos \gamma_{1,2} \tag{17}$$

где  $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = -b_n \begin{pmatrix} \omega_1 K_1 \sin \gamma_1 \\ \omega_2 K_2 \sin \gamma_2 \end{pmatrix} + N \Delta u$ ,  $N = V^{-1} M$

Подставляя (17) в условие (16) и определяя минимум по  $\Delta u$ , найдем оптимальное управление (с точностью до функции  $W$ )

$$\Delta u^o(W) = \frac{1}{2s_3} \sum_{k=1}^2 \frac{N_k}{\omega_k} F_k(W) \tag{18}$$

где  $F_k(W) = \frac{\partial W}{\partial K_k} \cos \gamma_k - \frac{1}{K_k} \frac{\partial W}{\partial \gamma_k} \sin \gamma_k$

Подставив (18) в условие (16), получим уравнение в частных производных для определения функции  $W$

$$\varepsilon \sum_{k=1}^2 \left( s_k K_k^2 - \frac{f_k}{\omega_k} F_k(W) \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial W}{\partial \gamma_k} \cdot \omega_k - \varepsilon s_3 \Delta u^o(W)^2 = 0 \tag{19}$$

Для решения уравнения (19) используется метод усреднения. Тогда решения для уравнений (17), (19) ищутся в виде асимптотических рядов

$$K = K_{av} + \varepsilon \nu_1(K_{av}, \gamma_{av}) + \varepsilon^2 \dots, \quad \gamma = \gamma_{av} + \varepsilon \mu_1(K_{av}, \gamma_{av}) + \varepsilon^2 \dots \tag{20}$$

$$W(K_{av}, \gamma_{av}) = W_0(K_{av}) + \varepsilon W_1(K_{av}, \gamma_{av}) + \varepsilon^2 \dots \tag{21}$$

где  $K_{av}, \gamma_{av}$  – векторы переменных метода усреднения (Averaging method),  $W_0(a_{av})$  – функция Беллмана, определяемые в соответствии усредненной системы первого приближения;  $\nu_1(K_{av}, \gamma_{av})$ ,  $\mu_1(K_{av}, \gamma_{av})$ ,  $W_1(K_{av}, \gamma_{av})$  – поправки к первому приближению метода усреднения, имеющие нулевое среднее.

Подставляя (20–21) в уравнение (19) и проводя процедуру усреднения по фазам, получим

$$\varepsilon \sum_{k=1}^2 \left( s_k K_k^2 - \frac{1}{\omega_k} \langle f_k F_k(W_0) \rangle \right) - \varepsilon s_3 \langle \Delta u^o(W_0)^2 \rangle + O(\varepsilon^2) = 0 \tag{22}$$

где  $\langle \cdot \rangle$  – оператор усреднения по фазам,

$$\langle \Delta u^o(W)^2 \rangle = \frac{1}{8s_3} \sum_{k=1}^2 \frac{N_k}{\omega_k^2} \left( \frac{\partial W_0}{\partial K_k} \right)^2, \langle f_k F_k(W_0) \rangle = \eta \left( \frac{\partial W_0}{\partial K_1} K_1 - \frac{\partial W_0}{\partial K_2} K_2 \right)$$

Для упрощения обозначений индекс  $(av)$  в уравнении (20) опущен. При этом учитывалось, что

$$\left\langle \sum_{k=1}^2 \frac{\partial W_1}{\partial Y_k} \cdot \omega_k \right\rangle = 0.$$

Функция  $W_0(K_1, K_2)$  ищется в виде положительно определенной квадратичной формы

$$W_0(K_1, K_2) = a_{11}K_1^2 + a_{22}K_2^2 + 2a_{12}K_1K_2 \tag{23}$$

Подставляя (23) в уравнение (22) и используя метод неопределенных коэффициентов, получим

$$a_{kk} = 2s_3 \frac{\omega_k}{N_k} \left[ (-1)^{k+1} \eta \frac{\omega_k}{N_k} + \left( \eta^2 \frac{\omega_k^2}{N_k^2} + \frac{s_k}{2s_3} \right)^{0.5} \right] \quad (k=1,2) \tag{24}$$

причем  $a_{12} = 0$

Подставляя функцию (23) в выражение для управления (18), переходя к исходным переменным системы (10), получим приближенно оптимальное уравнение в виде

$$\Delta u^o = k_\theta \theta' + k_r r' \tag{25}$$

где  $k_\theta = -\frac{1}{s_3} \left( \frac{a_{11}}{\omega_1^2} M_1 + \delta \frac{a_{22}}{\omega_2^2} (M_2 + \delta M_1) \right), k_r = -\frac{1}{s_3} \left( \frac{a_{22}}{\omega_2^2} (M_2 + \delta M_1) \right)$

### 6. Уравнения движения центра масс системы

Уравнения движения центра масс ЭДТС записываются в оскулирующих элементах [16]

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2v \sqrt{\frac{A^3}{\mu(1-q^2-k^2)}} \left[ a_s \frac{q \sin u - k \cos u}{v} + a_t \right] \\ \frac{dq}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ a_s \sin u + a_t \left( 1 + \frac{1}{v} \right) \cos u + \frac{1}{v} (qa_t + ka_w \text{ctgi} \sin u) \right] \\ \frac{dk}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -a_s \cos u + a_t \left( 1 + \frac{1}{v} \right) \sin u + \frac{1}{v} (ka_t - qa_w \text{ctgi} \sin u) \right] \\ \frac{di}{dt} &= \frac{a_w}{v} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cos u, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{a_w}{v} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\sin u}{\sin i} \\ \frac{du}{dt} &= \frac{1}{v} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ v^3 \frac{K}{p^2} - a_w \text{ctgi} \sin u \right] \end{aligned} \tag{26}$$

где  $A$  – большая полуось,  $v = 1 + q \cos u + k \sin u$ ,  $q = e \cos \omega_\pi$  и  $k = e \sin \omega_\pi$  – компоненты вектора Лапласа,  $\omega_\pi$  – аргумент перигея,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $p = A(1 - q^2 - k^2)$  – параметр орбиты,  $a_s, a_t, a_w$  – ускорения от сил Ампера-Лоренца в орбитальной системе координат  $Cx, y, z_o$  (рисунок 1).

При достаточно малой величине тока и при заданных значениях  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \theta_{1,2}$ ,  $r = r_{1,2}$  система (26) представляет собой систему с вращающейся фазой  $u$  и вектором медленно изменяющихся переменных  $x = (A, q, k, i, \Omega)$ . Тогда, проводя стандартную процедуру усреднения, в первом приближении получим

$$\frac{dA}{dt} = -2 \frac{\mu_m I r_{1,2}}{m \sqrt{\mu} p^3 (1 - q^2 - k^2)^2} \chi_1(q, k) \cos \theta_{1,2} \cos i$$

$$\begin{aligned}
\frac{dq}{dt} &= \frac{\mu_m I r_{1,2}}{8m\sqrt{\mu} p^5} \chi_2(q, k, \theta_{1,2}) \cos i \\
\frac{dk}{dt} &= -\frac{\mu_m I r_{1,2}}{8m\sqrt{\mu} p^5} \chi_3(q, k, \theta_{1,2}) \cos i \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\mu_m I r_{1,2}}{8m\sqrt{\mu} p^5} \chi_4(q, k, \theta_{1,2}) \sin i \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\mu_m I r_{1,2}}{4m\sqrt{\mu} p^5} \chi_5(q, k, \theta_{1,2})
\end{aligned} \tag{27}$$

где  $\chi_1(q, k) = 1 + 3(q^2 + k^2) + \frac{3}{8}(q^2 + k^2)^2$

$$\chi_2(q, k, \theta_{1,2}) = k(20 + 5q^2 + 9k^2) \sin \theta_{1,2} - q(28 + 5k^2 + 7q^2) \cos \theta_{1,2}$$

$$\chi_3(q, k, \theta_{1,2}) = k(28 + 9q^2 + 7k^2) \cos \theta_{1,2} + q(20 + 9k^2 + 5q^2) \sin \theta_{1,2}$$

$$\chi_4(q, k, \theta_{1,2}) = 4 \cos \theta_{1,2} + k^2 \cos \theta_{1,2} + 4qk \sin \theta_{1,2} + 3q^2 \cos \theta_{1,2}$$

$$\chi_5(q, k, \theta_{1,2}) = 4 \sin \theta_{1,2} + qk \cos \theta_{1,2} + 3k^2 \sin \theta_{1,2} + q^2 \sin \theta_{1,2}$$

В системе (27) для усредненных переменных сохранены те же обозначения, что и для исходных переменных (26). Для экваториальной орбиты, когда  $i=0$ , уравнения для  $i$  и  $\Omega$  не используются.

## 7. Численные результаты

Применение метода усреднения для построения приближенно оптимального управления и для прогнозирования движения центра масс системы подтверждается результатами численного моделирования по линеаризованной (9) и нелинейной (2–4) моделям. Использовались следующие исходные данные: массы КА  $m_1 = 2 \text{ кг}$  и  $m_2 = 6 \text{ кг}$ , длина троса  $L = 1 \text{ км}$ , номинальный ток  $I = 0.1 \text{ А}$ , начальная высота перигея орбиты  $H = 1000 \text{ км}$ , начальный эксцентриситет  $e = 0, 0.01$ , жесткость троса  $E_t = 7000 \text{ Н}$ , наклонение орбиты  $i = 0, \pi/6$ . В начальный момент ЭДТС находится на местной вертикали.

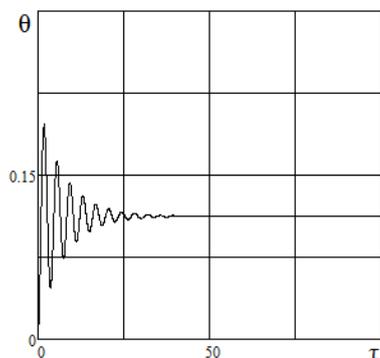
При синтезе приближенно оптимального управления использовалась круговая экваториальная орбита. Однако полученное управление применялось для эллиптических орбит с малым эксцентриситетом (не более 0.02) и для наклонных орбит (не более  $i = \pi/3$ ). Орбиты близкие к полярным орбитам требуют особого исследования.

Для обеспечения приблизительно равной длительности переходных процессов по различным координатам были выбраны не равные весовые коэффициенты в критерии (14):  $s_1 / s_3 = 0.01$ ,  $s_2 / s_3 = 0.1$ . При этом имеем  $k_0 = -0.85$ ,  $k = -0.32$ . Был выбран сравнительно низкий уровень управления такой, чтобы  $|\Delta I / I| < 0.2$ .

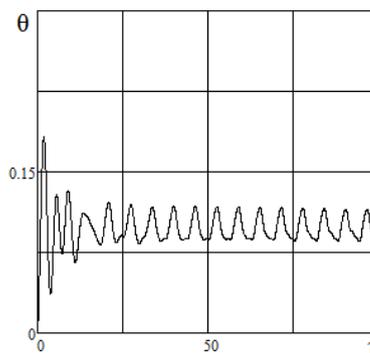
Переходные процессы по переменным  $\theta$  и  $r$  приводятся на рисунках 2–4, где  $\tau = \omega t$  – безразмерная время. Рисунок 2 соответствует экваториальной круговой орбите. В этом случае имеет место асимптотическая устойчивость положений равновесия. На рисунках 3, 4 показаны переходные процессы для эллиптической ( $e = 0.01$ ) орбиты с наклонением  $i = \pi/6$ . В последнем случае имеют место периодические возмущения, связанные с периодическим изменением высоты полета и колебаниями ЭДТС по углу  $\varphi$  вне плоскости орбиты (рисунок 1).

Изменяя весовые коэффициенты в критерии (15) можно изменить время переходных процессов и уровень управляющих воздействий. Сравнение изменения высоты центра масс системы, определенной по исходной (26) и усредненной (27) системам, приводится на рисунке 5. Погрешность вычисления большой полуоси орбиты, высот перигея и апогея по усредненной

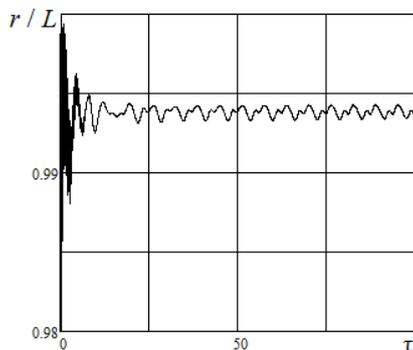
системе (27) составляет приблизительно 150 м на интервале времени, соответствующем около 15 виткам вокруг Земли.



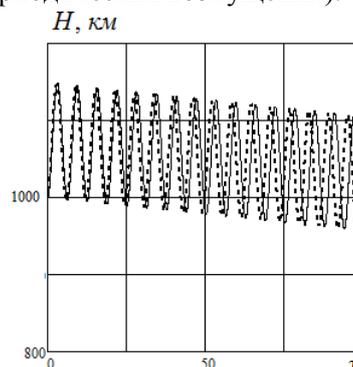
**Рисунок 2.** Угол отклонение троса от вертикали для экваториальной круговой орбиты (пример асимптотической устойчивости).



**Рисунок 3.** Угол отклонения троса от вертикали для эллиптической наклонной орбиты (пример действия периодических возмущений).



**Рисунок 4.** Относительное расстояние между КА для эллиптической наклонной орбиты (пример действия периодических возмущений).



**Рисунок 5.** Высота центра масс ЭДТС, определенная по исходной (сплошная линия) и усредненной (штриховая линия) системам.

Таким образом, применение метода усреднения позволило провести аналитический синтез приближенно оптимального управления, обеспечивающего устойчивость и необходимое качество переходных процессов, при решении задачи стабилизации движения ЭДТС на околоземной орбите. Усредненные уравнения можно использовать для прогнозирования изменения параметров орбиты движения центра масс ЭДТС на интервале времени порядка десяти витков вокруг Земли.

## 8. Литература

- [1] Белецкий, В.В. Динамика космических тросовых систем / В.В. Белецкий, Е. М. Левин. – М.: Наука, 1990. – 336 с.
- [2] Levin, E.M. Dynamic analysis of space tether missions / E.M. Levin. – San Diego: American Astronautical Society, 2007. – 453 p.
- [3] Zhong, R. Dynamics of Nanosatellite Deorbit by Bare Electrodynamic Tether in Low Earth Orbit / R. Zhong, Z. Zhu // J. of Spacecraft and Rockets. – 2013. – Vol. 50(3). – P. 691-700.
- [4] Chen, X. Bare-tether cathodic contact through thermionic emission by low-work-function materials / X. Chen, J. Sanmartin // Physics of Plasmas. – 2012. – Vol. 19. – P. 1-8.
- [5] Zhong, R. Optimal Control of Nanosatellite Fast Deorbit Using Electrodynamic Tether / R. Zhong, Z. Zhu // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 2014. – Vol. 37(4). – P. 1182-1194.

- [6] Fuhrhop, K.R. Theory and Experimental Evaluation of Electrodynamic Tether Systems and Related Technologies / K.R. Fuhrhop. – University of Michigan: PhD Dissertation, 2007. – 307 p.
- [7] Pelaez, J. A new kind of dynamic instability in electrodynamic tethers / J. Pelaez, T. Lorenzini, O. Lopez-Rebollal, M. Ruiz // J. of the Astronautical Sciences. – 2000. – Vol. 48(4). – P. 449-476.
- [8] Mantellato, R. Analysis of Passive System to Damp the Libration of Electrodynamic Tethers for Deorbiting / R. Mantellato, M. Pertile, G. Colombatti, E. Lorenzini // San Diego: AIAA SPACE Conference and Exposition. – 2013. – Vol. 5390. – P. 1-9.
- [9] Kojima, H. Stability analysis of in-plane and out-of-plane periodic motions of electrodynamic tether system in inclined elliptic orbit / H. Kojima, T. Sugimoto // Acta Astronautica. – 2009. – Vol. 65. – P. 477-488.
- [10] Iñarrea, M. Attitude stabilization of electrodynamic tethers in elliptic orbits by time-delay feedback control / M. Iñarrea, V. Lanchares, A.I. Pascual, J.P. Salas // Acta Astronautica. – 2014. – Vol. 96. – P. 280-295.
- [11] Zhou, X. Equilibrium control of electrodynamic tethered satellite systems in inclined orbits / X. J. Zhou, Li, H. Baoyin, V. Zakirov // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 2006. – Vol. 29(6). – P. 1451-1454.
- [12] Corsi, J. Stability and control of electrodynamic tethers for de-orbiting applications / J. Corsi, L. Iess // Acta Astronautica. – 2001. – Vol. 48(5). – P. 491-501.
- [13] Воеводин, П.С. Моделирование и анализ колебаний электродинамической тросовой системы на орбите спутника Земли / П.С. Воеводин, Ю.М. Заболотнов // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 6. – С. 21-34.
- [14] Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 400 с.
- [15] Акуленко, Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления / Л.Д. Акуленко. – М.: Наука, 1987. – 365 с.
- [16] Охоцимский, Д.Е. Основы механики космического полета / Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Сихарулидзе. – М.: Наука, 1990. – 448 с.

### **Благодарность**

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-41-630637).

# Application of the averaging method to predict the motion and control of the electrodynamic tether system of nanosatellites

Ch. Wang<sup>1</sup>, Yu.M. Zabolotnov<sup>2</sup>, P.S. Voevodin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Northwestern Polytechnical University, Youyi Xilu 127, Xi'an, Shaanxi, P. R. China, 710072

<sup>2</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** The problem of control motion of an electrodynamic tether system in a near-earth orbit is considered. The orbital tether system consists of two nanosatellites connected by a conductive tether. Through the interaction of the current-conducting tether with the earth's magnetic field, the changes in the orbit parameters of the center of mass of the system are carried out. The Bellman dynamic programming principle in combination with the averaging method is used to construct an approximately optimal control of the system. An averaged mathematical model of the mass center for predicting changes in the orbital parameters of the system is constructed. Numerical results obtained from the motion model with distributed parameters are presented, confirming the possibility of using approximately optimal control and the results of estimating changes in the orbit parameters.