Применение модифицированного алгоритма «прямого-обратного хода» для идентификации цепей Маркова

А.Р. Нурутдинова[1], С.В. Шалагин[2]

[1]*Казанский федеральный университет, Кремлёвская, 18, Казань, Россия, 420008*
[2]*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ (КНИТУ-КАИ), Карла Маркса, 10, Казань, Россия, 420111*

Аннотация
Авторами предлагается применение модификации метода «прямого-обратного хода» для решения задачи идентификации марковских последовательностей на предмет принадлежности с заданной вероятностью к определенному классу автоматной марковской модели (АММ), заданной на основе стохастических матриц класса эргодических, которые и определяют класс АММ.

Ключевые слова
Цепь Маркова, автоматная марквская модель, идентифакция, метод «прямого-обратного хода»

1. Введение

Ранее авторами в работе [1] предлагается подход к задаче идентификации автоматных марковских моделей, определенных на базе эргодических стохастических матриц, на основе порождаемых ими реализаций цепей Маркова, являющийся модификацией алгоритма «прямого-обратного хода», предложенного для решения задачи распознавания речи для скрытой марковской модели в работе [2]. В настоящей работе показана возможность развития модифицированного алгоритма «прямого-обратного хода» на марковские последовательности, для которых в заданный момент времени существует подмножество состояний, наблюдаемых с равной вероятностью.

2. Модифицированный алгоритм «прямого-обратного хода».

Автоматной марковской моделью (АММ) будем называть автономный вероятностный автомат без выхода вида

$$(S,\ \phi(s'/\ s)), \tag{1}$$

где $S=\{s_i\},\ i=\overline{0,n-1}$– множество состояний ЦМ, $s, s' \in S$, $\phi(s',\ s)$– функция переходов, заданная стохастической матрицей P_s, $P_s=\left(p_{ij}\right)$ размерности $n\times n$, $i,j=\overline{0,n-1}$ [3]. Подклассы АММ выделены в зависимости от структуры ЭСМ P. В частности, в [4] выделены различные подклассы ЭСМ, а в [5] представлены множества стохастических матриц с заданными свойствами.

Пусть $\hat{S}(N)=u_1,\, u_2,\, \dots,\, u_N$ – множество допустимых реализаций цепи Маркова, заданной АММ вида (1), в моменты времени t, где u_t – подмножество состояний ЦМ из множества S, допустимых в момент времени t, $t=\overline{1,N}$, с равной вероятностью q^{-1}, $u_t\subset S$, $|u_t|=q\in[1,\, n]$. Частный случай $\hat{S}(N)=u_1,\, u_2,\, \dots,\, u_N$ – полностью наблюдаемая цепь Маркова: $|u_t|=1$, $t=\overline{1,N}$. Для элемента $\hat{S}(N)$ допустимо полное множество реализаций S в момент времени t с равной вероятностью n^{-1}, $u_t=S|u_t|=n$, что соответствует полностью ненаблюдаемому состоянию ЦМ.

Требуется определить $P(\hat{S}(N)|\text{АММ}(P))$ − вероятность того, что множество $\hat{S}(N)$ сгенерировано на основе АММ(P), где ЭСМ P принадлежит заданному подклассу Q_k.

Введем следующие массивы переменных [1]:
$\alpha_t(i)=P(u_1,\, u_2,\, \dots,\, u_t,\, u_t=s_i|\text{АММ}(P)),\ t=\overline{1,N}, i=\overline{1,m}.$

Алгоритм идентификации автоматной марковской модели вида (1) на основе частного случая множества $\hat{S}(N) = u_1, u_2, \ldots, u_N$, состоит из следующих этапов.

Этап 1. Инициализация: $\alpha_1(i) = \pi_0(i) \cdot z_i(1)$, $z_i(1) = \begin{cases} 1: & u_1 = s_i \\ 0: & \text{else} \end{cases}$, $i = \overline{1, n}$.

Этап 2. Индукция: $\alpha_{t+1}(j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_t(i) \cdot p_{ij}\right) \cdot z_j(t+1)$, $\quad z_i(t+1) = \begin{cases} 1: & u_{t+1} = s_i \\ 0: & \text{else} \end{cases}$, $t = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, n}$.

Этап 3. Находим $P(\hat{S}(N) | \text{АММ}(P)) = \alpha_N(s(N))$.

Рассмотрим случай, когда полное множество реализаций допустимо хотя бы для одного элемента $\hat{S}(N) = u_1, u_2, \ldots, u_N$. Согласно [1], при выполнении этапа 2 вычисления значений$\alpha_{t+1}(i)$, $t = \overline{1, N-1}$, $i = \overline{1, n}$, имеет место выражение:

$\alpha_{t+1}(j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_t(i) \cdot p_{ij}\right) \cdot z'_j(t+1)$, $z'_i(t+1) = \begin{cases} 1: & |u_{t+1}| = n \\ z_i(t+1): & \text{else} \end{cases}$.

Если в наблюдаемой последовательности $s(N)$ есть k элементов, для которых $|u_t| = n$, то искомая вероятность равна

$$P\big(\hat{S}_k(N) | \text{АММ}(P)\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_N(i). \quad (2)$$

В общем случае, для идентификации последовательности $\hat{S}(N) = u_1, u_2, \ldots, u_N$ развитие алгоритма «прямого-обратного хода» выглядит следующим образом.

Этап 1. Инициализация:, $z_i(1) = \begin{cases} q_1^{-1}: & s_i \in u_1 \\ 0: & \text{else} \end{cases}$, $q_1 = |u_1|$, $i = \overline{1, n}$.

Этап 2. Индукция: $\alpha_{t+1}(j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_t(i) \cdot p_{ij}\right) \cdot z'_j(t+1)$, $z'_j(t+1) = \begin{cases} n^{-1}: & |u_{t+1}| = n \\ z_j(t+1): & \text{elsee} \end{cases}$, $z_j(t+1) = \begin{cases} q_{t+1}^{-1}: & s_j \in u_{t+1} \\ 0: & \text{else} \end{cases}$, $q_{t+1} = |u_{t+1}|$, $j = \overline{1, n}$, $t = \overline{1, N-1}$.

Этап 3. Находим $P(\hat{S}(N) | \text{АММ}(P)) = \alpha_N(s(N))$ согласно (2).

Утверждение. Вычислительная сложность предложенного алгоритма по количеству операций умножения, сложения и умножения на константу составляет, соответственно:

$$(N-1)n^2,\ (n-1)(n(N-1)+1) \text{ и } d_1 + n \cdot \sum_{t=1}^{N-1} d_{t+1}.$$

Предложенный модифицированный алгоритм «прямого-обратного хода» является достаточно эффективными по оценкам вычислительной сложности. Кроме того, метод позволяет решать задачу распознавания для последовательностей со скрытыми или частично идентифицированными элементами.

3. Литература

[1] Shalagin, S.V. Multi-parametric classification of automaton Markov models based on the sequences they generate / A.R.Nurutdinova, S.V.Shalagin // Prikl. Diskr. Mat. – 2010. – Vol. 4(10). – P. 41-54. DOI: 10.17223/20710410/10/5.

[2] Rabiner, L.R. A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition / L.R. Rabiner // Proc. IEEE. – 1989. – Vol. 77(2). – P. 257-286.

[3] Бухараев, Р.Г. Вероятностные автоматы / Р.Г. Бухараев // Казань: Изд-во КГУ. − 1970. −188 с.

[4] Захаров, В.М. Анализ стохастических матриц методами многомерной классификации / В.М. Захаров, Н.Н. Нурмеев, Ф.И. Салимов // Дискретная математика и ее приложения: материалы 7-го междунар. семинара. – М.: МГУ. – 2001. – Ч. II. – С. 156-159.

[5] Zakharov, V.M. Algorithms for computing the sets of stochastic matrices with predefined properties, based on automaton models / V.M. Zakharov, S.V. Shalagin, B.F. Eminov // Journal of Physics: Conf. Series. – 2019. – Vol. 1352. – P. 012062. DOI: 10.1088/1742-6596/1352/1/012062.