

Расчет междуузельной передачи информации в теории квантовых сетей на основе обобщенных моделей Тависа-Каммингса

Е.К. Башкиров¹ А.М. Воробьев¹, А.В. Горохов¹

¹ Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Выполнено теоретическое исследование квантовых сетей, сконструированных на основе обобщенных моделей Тависа-Каммингса. Рассчитан коэффициент передачи информации от одного узла сети к другому в модели сети, реализованной двухуровневыми атомами в высокодобротных резонаторах. Учтено движение атомов через резонаторы и взаимодействие атомов с внешними лазерными полями и резонаторными фотонами. Выполненный расчет хорошо согласуется с результатами последних экспериментов.

1. Введение

Квантовая информатика - новая, активно развивающаяся наука, изучающая общие закономерности передачи, хранения и преобразования информации в квантовых системах. Одной из самых актуальных проблем, исследуемых в ней, является создание квантовых сетей. Квантовая сеть это такая коммуникационная сеть, которая осуществляет транспортировку квантовой информации между физически разделенными квантовыми системами. Такие сети являются основой в квантово-числительных архитектурах и квантовой коммуникации. И поэтому создание и их масштабирование является центральной задачей в квантовой информатике. В последние несколько лет наметился существенный прогресс в этом направлении, связанный с экспериментальными реализациями схем-установок по передачи квантовой информации. Так, Стефану Риттеру с соавторами удалось передать квантовую информацию между двумя элементарными квантовыми узлами, состоящими из одиночных атомов, помещенных в оптический резонатор и соединенных оптоволоконным кабелем [1]. Оливер Бенсон в качестве узлов сети использовал квантовые точки [2]. Прекрасными кандидатами для реализации квантовых сетей являются также твердотельные кубиты (сверхпроводящие джозефсоновские кольца и примесные спины), взаимодействующие с микроволновыми полями, а также ионы [3, 4, 5]. Недавно была осуществлена передача квантовой информации, используя одиночные фотоны в открытом пространстве на 1200 км между двумя спутниками на орбите [6]. При этом, естественно, вероятности передачи информации очень малы порядка $\approx 1 - 2$ процента. Указанные работы можно рассматривать в качестве начального этапа в создании полномасштабного квантового интернета [7]. Для теоретического анализа аспектов работы квантовых сетей используют различные новые физические модели квантовой электродинамики резонаторов, в том числе модели, которые экспериментально еще не реализованы или реализованы только для некоторых типов кубитов. К

таким моделям относятся, например, модели с большим и аномально большим значением атом-полевой константы связи. Поэтому сейчас теоретические исследования существенно опережают возможности современных экспериментов. Поэтому дальнейшее теоретическое исследование возможных вариаций моделей квантовых сетей представляется весьма актуальными.

В этой работе мы рассматриваем модель передачи квантовой информации между квантовыми узлами. А также проводим компьютерное моделирование временной динамики компонент системы с использованием техники когерентных состояний применяемых к обобщениям модели Тависа - Каммингса, хорошо известной в квантовой оптике.

2. Передача квантовой информации в обобщенной модели Тависа-Каммингса

Предположим, что в оптической резонаторной полости присутствует N идентичных кубитов (двухуровневых естественных или искусственных атомов), взаимодействующих с модой резонатора [8]. В нашей работе мы ограничимся рассмотрением двух атомов в резонаторе, точно воздействуя на которые можно передавать информацию от одного квантового узла ко второму. Мы будем рассматривать обобщенную модель Тависа - Каммингса, в которой не учитывается приближение врачающейся волны, для того чтобы расширить диапазон рассматриваемых констант связи. Общая форма гамильтониана такой модели имеет вид:

$$H_{TK} = \sum_{i=1}^2 \hbar\omega_0 J_3^{(i)} + \hbar\omega_c a^+ a + \hbar g(t) \sum_{i=1}^2 (J_+^{(i)} + J_-^{(i)}) (a^+ + a),$$

Здесь $J_3^{(i)}$ – оператор инверсии для i -го атома ($i = 1, 2$), $J_+^{(i)}$ и $J_-^{(i)}$ – повышающий и понижающий операторы для i -го атома, ($i = 1, 2$), a^+ и a – операторы рождения и уничтожения фотонов моды поля, $g(t)$ – константа взаимодействия между атомом и полем, ω_0 – частота перехода в атоме и ω_c – частота моды поля резонатора.

Рассмотрим передачу квантовой информации в данной модели. Для этого предположим, что в резонатор длиной l с некоторой скоростью v_1 влетает первый кубит. Для моделирования передачи возбуждения на первый кубит, добавим в гамильтониан модели Тависа - Каммингса дополнительное слагаемое:

$$V(t) = A(t) \left(J_+^{(1)} e^{-i\omega t} + J_-^{(1)} e^{i\omega t} \right).$$

которое учитывает воздействие на него внешнего электромагнитного поля. Здесь $A(t)$ – зависящая от времени интенсивность воздействия, пропорциональная амплитуде электромагнитного импульса, ω - частота поля, близкая к частоте первого кубита, которая в свою очередь определяет расстояние между уровнями кубита. После воздействия на первый кубит внешнего поля, в резонатор влетает второй кубит со скоростью v_2 и начинает взаимодействовать с фотонной модой резонатора. Получается, что воздействовав на первый кубит внешним электромагнитным полем, мы можем передать возбуждение второму кубиту через квантовое фотонное поле. Такой перенос возбуждения имитирует передачу информации по квантовому каналу.

Чтобы описать эффективность передачи квантовой информации введем такой качественный параметр как коэффициент передачи \mathcal{K} . Его можно определить как отношение максимума населенности второго кубита к максимуму населенности первого. Но для более достоверного результата мы будем рассчитывать его как отношение усредненных населенностей первого и второго кубитов за время отклика на воздействие. Формула для определения

коэффициента передачи имеет вид:

$$\mathcal{K} = \frac{\frac{1}{t_{12} - t_{11}} \cdot \int_{t_{11}}^{t_{12}} n_1(t) dt}{\frac{1}{t_{22} - t_{21}} \cdot \int_{t_{21}}^{t_{22}} n_2(t) dt} \quad (1)$$

где $n_i(t)$ - населенность верхнего уровня кубита зависящая от времени, t_{ki} - временной интервал в течении которого происходит воздействие на компоненты системы, $t_{k(i+1)} - t_{ki}$ - величина этого интервала.

Для исследования квантовой динамики системы и нахождения коэффициента передачи необходимо сначала найти решение временного уравнения Шредингера, для полного гамильтониана, который имеет вид:

$$H = H_{TK} + \hat{V}(t).$$

Даже в случае одного кубита и одного осциллятора это непростая задача и аналитического решения для временной волновой функции найти не удается. Но если взаимодействие между кубитами и фотонной модой включается на достаточно малый интервал времени $g_i(t) = g_i k_i(t)$ ситуация упрощается. Вне интервала включения гамильтониан системы сводится к сумме гамильтонианов осциллятора и кубита, невзаимодействующих между собой. Для такой системы решение временного уравнения Шредингера (с точностью до фазового множителя) задается некоторым когерентным состоянием. Поскольку включение кратковременное тогда можно предположить, что вектор состояния $|\psi(t)\rangle$ можно представить в виде

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\gamma(t)} |\alpha(t), z_1(t), z_2(t)\rangle, \quad (2)$$

здесь $\gamma(t)$ - несущественная для дальнейшего фаза вектора состояния, а $|\alpha(t), z_1(t), z_2(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle \otimes |z_1(t)\rangle \otimes |z_2(t)\rangle$ - прямое произведение осцилляторного когерентного состояния $|\alpha(t)\rangle$ и когерентных состояний $|z_1(t)\rangle$ и $|z_2(t)\rangle$ двух кубитов.

Вычисляя гамильтониан в обкладках когерентных состояний [9], получаем систему уравнений для параметров когерентных состояний, описывающую динамику нашей системы:

$$\begin{cases} i\dot{\alpha} = (\omega_0 - i\gamma)\alpha + g_1(t) \frac{z_1 + z_1^*}{1 + z_1 z_1^*} + g_2(t) \frac{z_2 + z_2^*}{1 + z_2 z_2^*} \\ i\dot{z}_1 = \omega_1 z_1 + g_1(t) (\alpha + \alpha^*) (1 - z_1^2) + A(t) (e^{-i\omega t} - z_1^2 e^{i\omega t}) \\ i\dot{z}_2 = \omega_2 z_2 + g_2(t) (\alpha + \alpha^*) (1 - z_2^2) \end{cases} \quad (3)$$

Константа взаимодействия $g_i(t)$ имеет следующий вид:

$$g_i(t) = g [\Theta(t_{i1}) - \Theta(t_{i2})] \sin\left(\frac{\pi v}{l} t\right) \quad (4)$$

где разность $\Theta(t_{i1})$ и $\Theta(t_{i2})$ является функцией Хевисайда для обозначения времени влета(включения взаимодействия) кубита в резонатор и вылета(выключения взаимодействия) кубита из резонатора, а $\sin\left(\frac{\pi v}{l} t\right)$ соответствует низшей mode резонатора.

В результате выполнив численные расчеты в пакете Wolfram Mathematica, при начальных условиях, которые соответствуют сверхнизким температурам (порядка 1K): $\alpha(0) = 0.001$, $z_1(0) = 0.001$, $z_2(0) = 0.001$, $\omega = 1$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.999$, $\omega_2 = 1.001$, $g = 0.1$,

$\beta = v/l = 0.02$, $\gamma = 0.002$, $\tau = 2$, $A = 0.95$ видно, что после кратковременного воздействия на первый кубит, он переходит в возбужденное состояние и, находясь во взаимодействии со вторым кубитом через поле резонатора, передает возмущение на него. На рисунке 1 показаны динамики когерентных состояний компонент системы, временные зависимости среднего числа фотонов в моде и населенность верхнего уровня кубитов.

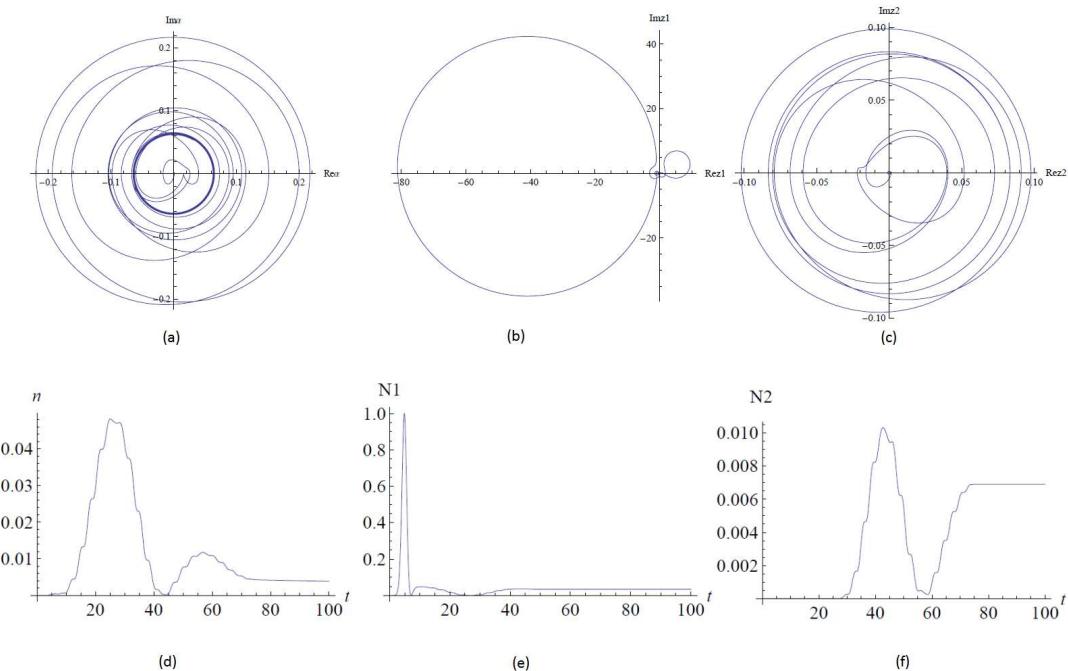


Рисунок 1. Траектории когерентных состояний, временная зависимость среднего числа фотонов и населенности на верхних уровнях атомов. (а) - траектория КС для α ; (б) - траектория КС z_1 первого кубита; (с) - траектория состояния z_2 для второго кубита; (д) - временная зависимость среднего числа фотонов; (е) и (ф) - графики населенности верхнего уровня первого и второго кубитов. В расчете использовались константы: $\alpha(0) = 0.001$, $z_1 = 0.001$, $z_2 = 0.001$, $\omega = 1$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.999$, $\omega_2 = 1.001$, $g = 0.1$, $\beta = v/l = 0.02$, $\gamma = 0.002$, $\tau = 2$, $A = 0.95$

Анализируя и проводя численные расчеты коэффициента передачи нами был получен следующий результат:

$$\mathcal{K} = 0.0218022$$

который соответствует $\approx 2.18\%$ и хорошо согласуется с результатами полученными в реально проводимых экспериментах. Например, в эксперименте, осуществленном физиками из Германии под руководством Стефана Риттера [1], где для передачи информации использовали атомы рубидия-87 помешанные в резонатор Фабри-Перро достигли вероятности передачи в 2%. При моделировании мы использовали безразмерные параметры, являющиеся отношениями параметров которые характерны для приборов современной квантовой оптики.

Столь низкие результаты реальных экспериментов связаны с диссипативными процессами, такими как потери моды резонатора из-за рассеивания и поглощения зеркал и процессом декогеренции - разрушения когерентного состояния, из-за взаимодействия

с окружающей средой. Современные технологии изготовления зеркал позволяют свести потери при отражении практически на нет. Поэтому для того чтобы увеличить эффективность передачи квантовой информации нужно улучшать изоляцию системы от воздействия окружающей среды и увеличивать атом-полевые константы взаимодействия. При реальном проектировании схем передачи взаимодействия очень сложно достичь высоких констант взаимодействия, возможно требуется какой-то другой способ чтобы это обеспечить. Но используя методы компьютерного моделирования это осуществить можно, что в принципе пригодится для последующей практической реализации схем по передаче квантовой информации.

Для сравнения проведем расчет коэффициента передачи для двух других наборов параметров системы. В первом (рис. 2 (I)) случае были использованы сложно реализуемые, но в принципе достижимые параметры системы и полученный коэффициент передачи составил $\mathcal{K} = 0.0901383$ или $\approx 9\%$. Во втором случае (рис. 2 (II)) были использованы экстремальные параметры, а коэффициент передачи значительно повысился $\mathcal{K} = 0.473384$ ($\approx 47\%$).

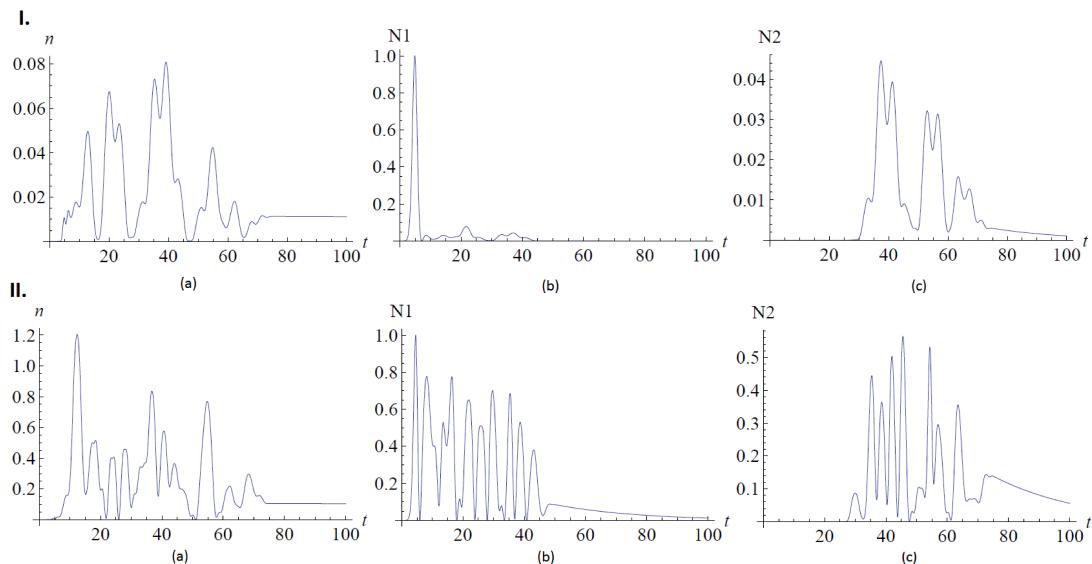


Рисунок 2. I. (a) - временная зависимость среднего числа фотонов; (b) и (c) - графики населенности верхнего уровня первого и второго кубитов. В расчете использовались константы: $\alpha(0) = 0.001$, $z_1 = 0.001$, $z_2 = 0.001$, $\omega = 0.998$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.999$, $\omega_2 = 0.999$, $g = 0.5$, $\beta = v/l = 0.02$, $\gamma = 0.0002$, $\tau = 2$, $A = 0.95$

II. (a) - временная зависимость среднего числа фотонов; (b) и (c) - графики населенности верхнего уровня первого и второго кубитов. В расчете использовались константы: $\alpha(0) = 0.001$, $z_1 = 0.001$, $z_2 = 0.001$, $\omega = 0.998$, $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0.999$, $\omega_2 = 0.999$, $g = 0.7$, $\beta = v/l = 0.02$, $\gamma = 0.0002$, $\tau = 2$, $A = 1.2$

Из ряда проведенных численных расчетов было решено проанализировать зависимость коэффициента передачи от параметра характеризующего атом-полевое взаимодействие (константа связи g) и от параметра характеризующего сам резонатор (β). Используя при этом параметры с помощью которых был получен результат сопоставимый с результатами реальных экспериментов. Полученная зависимость коэффициента передачи от устройства резонатора $\mathcal{K}(\beta)$ изображена на рисунке 3.I.a, а зависимость коэффициента передачи от константы связи $\mathcal{K}(g)$ на рисунке 3.I.b. Из графика 3.I.a видно, что для системы с $g = 0.1$

большую пользу представляют значения β в пределах от 0.02 до 0.065. Это объясняется тем, что β являясь параметром резонатора определяет время взаимодействия атома с полем, а так как константа g зависит от времени, то при определенном подборе этих двух параметров возможно получить высокие результаты передачи. На рисунке 3.I.b видно, что по сравнению с β константа связи g влияет на коэффициент передачи значительно сильнее, но константы больше 0.3 пока что недостижимы в реальных экспериментах, за исключением схем где используются джозефсоновские кубиты. Поэтому пока не будут найдены способы достичь более высоких g , нужно комбинировать параметры системы.

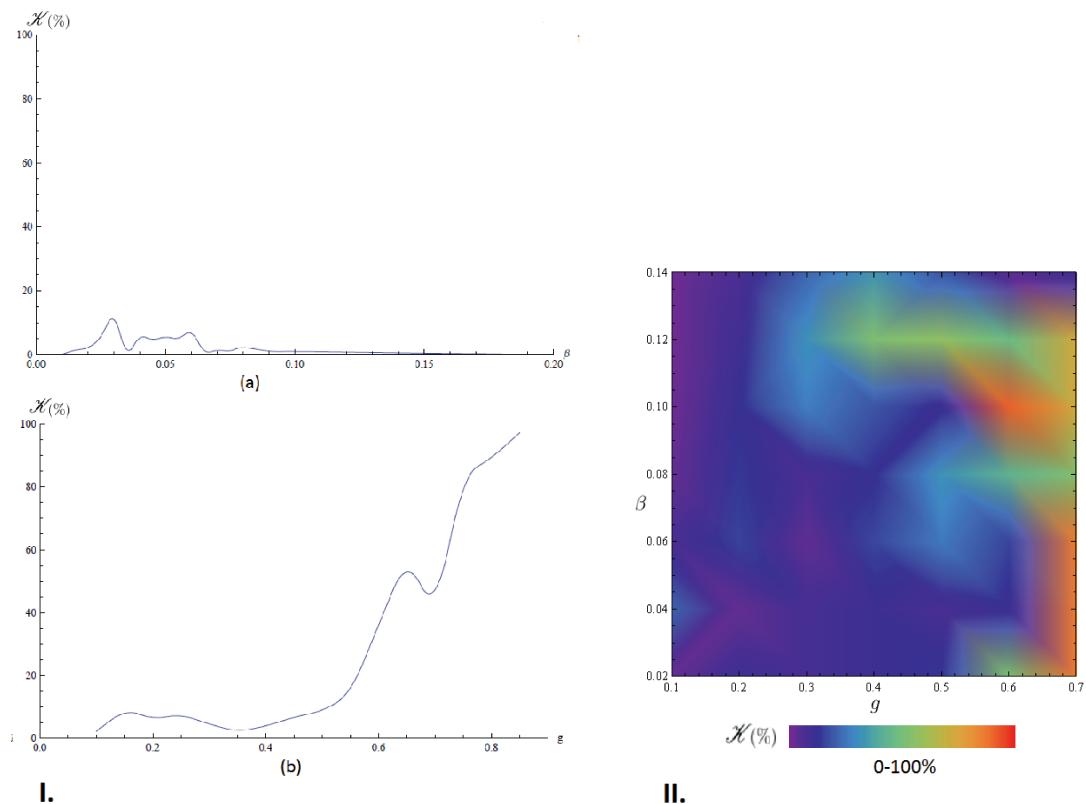


Рисунок 3. I. (a) - зависимость коэффициента передачи от β ; (b) - зависимость коэффициента передачи от g

II. Зависимость коэффициента передачи одновременно от двух параметров (g и β)

Методами компьютерного моделирования была построена поверхность (рис. 3.II) отражающая зависимость коэффициента передачи $K(g, \beta)$ от параметров β и g . С помощью которой можно определить оптимальные параметры системы и сравнить полученные данные из эксперимента с теоретическими данными. Данный график будет очень полезен для планирования будущих экспериментов.

3. Элементарная квантовая сеть из двух узлов

Для того чтобы создать квантовый компьютер и квантовую сеть требуется, чтобы передача состояния осуществлялась не только внутри одной квантовой ячейки (резонатора), а между множеством ячеек (резонаторов). Рассмотрим модель элементарной квантовой сети из двух узлов, каждый из которых спроектирован на основе модели Тависа - Каммингса. Система состоит из двух ячеек (резонаторов). В первую влетает кубит и подвергается

воздействию внешнего электромагнитного поля, под этим воздействием он может перейти в возбужденное состояние. После чего, первый кубит начинает взаимодействовать с полем первого резонатора. Которое улавливается неким детектором и передается через оптоволоконный канал к другому узлу. И взаимодействуя с полем второго резонатора передает возмущение на второй кубит. Для моделирования передачи от одного узла квантовой сети к другому через оптоволоконный канал, необходимо в гамильтониан модели добавить слагаемое отвечающее за взаимодействие поля резонатора и поля улавливающего детектора H_b .

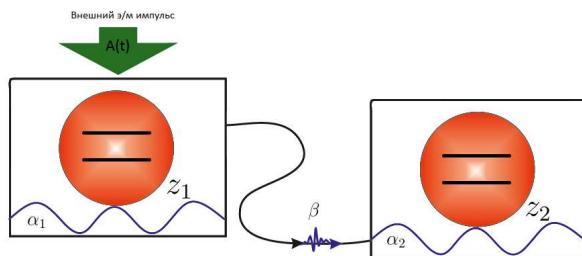


Рисунок 4. Схема элементарной квантовой сети

Тогда гамильтониан такой модели примет вид:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^2 \hat{H}_{a_i} + \sum_{i=1}^2 \hat{H}_{f_i} + \sum_{i=1}^2 \hat{H}_{int_i} + \hat{V}(t) + \hat{H}_b \quad (5)$$

где $\hat{H}_b = \hbar\kappa(t)_1(\hat{a}_1^\dagger\hat{b} + \hat{a}_1\hat{b}^\dagger) + \hbar\kappa(t)_2(\hat{b}^\dagger\hat{a}_2 + \hat{b}\hat{a}_2^\dagger)$ отвечает за перенос информации через оптоволокно от первого резонатора ко второму.

Для того чтобы рассчитать временные зависимости населенности верхних уровней кубитов, а затем определить коэффициент передачи требуется найти решение временного уравнения Шредингера. Расписав гамильтониан в явном виде, решаем его в обкладках когерентного состояния. И получаем уравнения описывающие динамику нашей системы:

$$\begin{cases} i\dot{\alpha}_1 = (\omega_{a1} - i\gamma_{a1})\alpha_1 + g_1(t)\frac{z_1 + z_1^*}{1 + z_1 z_1^*} + \kappa_1(t)b \\ i\dot{\alpha}_2 = \kappa_2(t)b + (\omega_{a2} - i\gamma_{a2})\alpha_2 + g_2(t)\frac{z_2 + z_2^*}{1 + z_2 z_2^*} \\ i\dot{b} = \kappa_1(t)b + (\omega_b - i\gamma_b)b + \kappa_2(t)b \\ i\dot{z}_1 = \omega_1 z_1 + g_1(t)(\alpha + \alpha^*)(1 - z_1^2) + A(t)(e^{-i\omega t} - z_1^2 e^{i\omega t}) \\ i\dot{z}_2 = \omega_2 z_2 + g_2(\alpha + \alpha^*)(1 - z_2^2) \end{cases} \quad (6)$$

Константа взаимодействия $g_1(t)$ имеет вид:

$$g(t) = g [\Theta(t_1) - \Theta(t_2)] \sin\left(\frac{\pi v}{l} t\right) \quad (7)$$

t_1 и t_2 времена влета и вылета в элементарную ячейку для первого кубита. Константа связи во второй ячейке включена постоянно, так как второй атом находится в центре ячейки в течении всего времени процесса.

Коэффициент передачи $\kappa(t) = \kappa [\Theta(t_{\kappa 1}) - \Theta(t_{\kappa 2})]$ описывает момент передачи квантовой информации через оптоволокно. $t_{\kappa 1}$ время с которого сигнал начал поступать в

оптоволокно, $t_{\kappa 2}$ время вылета первого кубита из резонатора, которое соответствует времени прекращения сигнала.

Выполняя численные расчеты при параметрах $g = 0.1$, $A = 1.2$, $\beta = 0.02$, $\kappa = 0.9999$ были получены траектории для когерентных состояний системы (рис. 5.I) и временные зависимости населенностей (рис. 5.II). А коэффициент передачи составил $\mathcal{K} = 1,42607\%$. Являясь вполне нормальным результатом при условии, что в моделировании были учтены параметры соответствующие достаточно большим потерям, вызванным внешними факторами.

4. Заключение

В данной работе, используя в качестве математического метода технику когерентных состояний для двухуровневых атомов и фотонов резонатора, был произведен теоретический анализ временной динамики кубитов в двухузельных моделях квантовой коммуникации. Отталкиваясь от проводимых в настоящее время реальных экспериментов [1, 2, 3] был осуществлен выбор физических моделей, описывающих квантовую передачу информации. Для выбранных моделей, обобщающих хорошо апробированную в квантовой оптике модель Тависа - Каммингса были выведены уравнения для параметров когерентных состояний как кубитов, так и фотонов.

Были получены следующие новые результаты:

- исследована динамика фотонного поля и кубитов в изученных моделях простейшей квантовой сети;
- рассчитаны временные зависимости населенностей верхних уровней кубитов при разных значениях параметров моделей;
- проведены расчеты коэффициентов передачи информации от узла к узлу в данных моделях, которые хорошо коррелируют с имеющимися экспериментами.

Предложенные в работе модели квантовых сетей допускают ряд модификаций, состоящих в следующем:

- проектирование сетей, использующих гибридные узлы (атомы в резонаторах в одном узле и квантовые точки, или нити в другом);
- проектирование квантовых сетей на основе джозефсоновских контактов, что, в принципе, сулит существенное повышение коэффициента передачи информации;
- рассмотрения передачи квантовой информации от узла к узлу в свободном пространстве, вместо оптоволокна;
- кроме того наше исследование обобщений модели Тависа - Каммингса может быть использовано в теоретической разработке регистров квантовых компьютеров, где N -двухуровневых атомов одновременно находятся в одном резонаторе.

5. Литература

- [1] Ritter, S. An elementary quantum network of single atoms in optical cavities / S. Ritter, C. Nolleke, C. Hahn, A. Reiserer, A. Neuzner, M. Uphoff, M. Mucke, E. Figueroa, J. Bochmann, G. Rempe // Nature. — 2012. — Vol. 484. — P. 195–198.
- [2] Benson, O. Linking two quantum dots with single photons / O. Benson // Physics. — 2017. — Vol. 10. — P. 42(1-3).
- [3] Yin, J. et al. Satellite-based entanglement distribution over 1200 kilometers / J. Yin et al. // Science. — 2017. — Vol. 356. — P. 1140-1144.
- [4] Flurin, E. Superconducting Quantum Node for Entanglement and Storage of Microwave Radiation / E. Flurin, N. Roch, J.D. Pillet, F. Mallet, B. Huard // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114. — P. 090503.

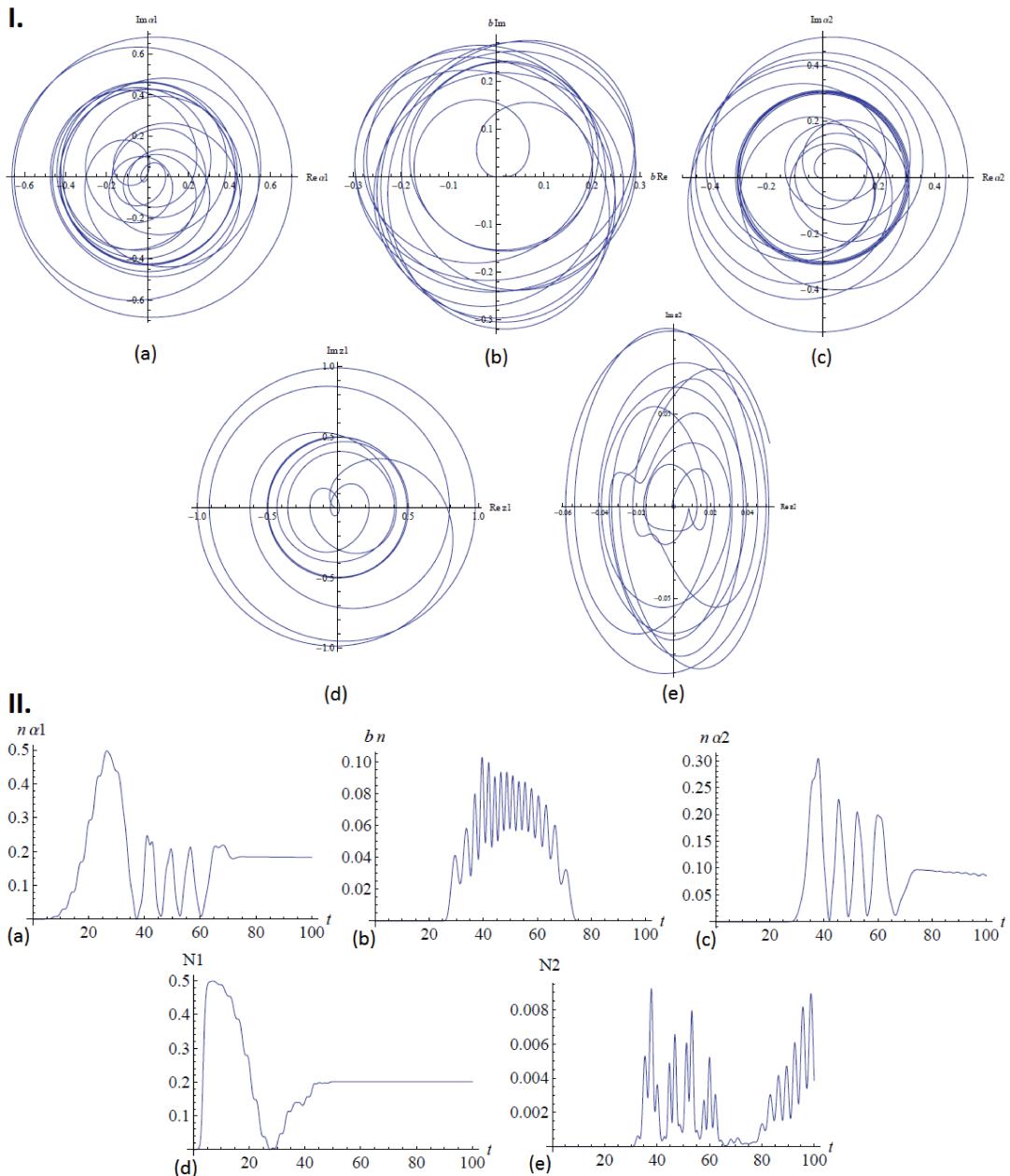


Рисунок 4. I. Когерентные состояния: (а) - фотонной моды первого резонатора, (б) - фотонной моды при передачи через оптоволокно, (с) - фотонной моды второго резонатора, (д) - кубита в первом резонаторе, (е) - кубита во втором резонаторе.

II. Населенность: (а) - фотонной моды первого резонатора, (б) - фотонной моды при передачи через оптоволокно, (с) - фотонной моды второго резонатора, (д) и (е) - кубитов в первом и втором резонаторе соответственно

- [5] Togan, E. Quantum entanglement between an optical photon and a solid-state spin qubit / E. Togan, Y. Chu, A.S. Trifonov, L. Jiang, J. Maze, L. Childress, M.V.G. Dutt, A.S. Sorensen, P.R. Hemmer, A.S. Zibrov, M.D. Lukin // Nature. — 2010. — Vol 466. — P. 730–735.
- [6] Duan, L.-M. Quantum networks with trapped ions / L.-M. Duan, C. Monroe // Rev. Mod. Phys. — 2010. —

Vol. 82. — P. 1209–1224.

- [7] Kimble, H.J. The quantum internet / H.J. Kimble // Nature. — 2008. — Vol. 453(19). — P. 1023–1030 .
- [8] Tavis, M. The exact solution of N two level systems interacting with a single mode, quantized radiation field / M Tavis, F.W. Cummings // Phys. Lett. — 1967. — Vol. A25. — P.714–715.
- [9] Горохов, А.В. Принципы симметрии и теория представлений групп / А.. Горохов — Самара: Самарский государственный университет, 2014. — 109 с.

Calculation of the information transfer from one node to another one in the theory of quantum networks on the basis of generalized Tavis-Cummings models

E.K. Bashkirov¹, A.M. Vorobiev¹, A.V. Gorokhov¹

¹Samara National Research University, Moskovskoye shosse, 34, Samara, Russia, 443086

Abstract. A theoretical study of quantum networks constructed on the basis of generalized Tavis-Cummings models is performed. The coefficient of information transfer from one node of the network to another in a network model realized by natural or artificial two-level atoms in high-Q resonators is calculated. The motion of atoms through resonators and the interaction of atoms with external laser fields and resonator photons are taken into account. The calculation is in good agreement with the results of the latest experiments.

Keywords: quantum networks, natural or artificial two-level atoms, high-Q resonators, laser fields.