

# Расчет вихревых собственных функций ограниченного оператора распространения в ближней зоне дифракции

М.С. Кириленко<sup>1,2</sup>, С.Г. Вологовский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

<sup>2</sup>Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

**Аннотация.** Распространение вихревых лазерных пучков в ближней зоне дифракции (на расстояние порядка длины волны) может быть описано с помощью разложения по плоским волнам, которое с учетом осевой симметрии сводится к вихревому оператору распространения на основе преобразования Фурье-Ханкеля. Собственные функции такого оператора, имеющие собственные значения близкие к единице, определяют характеристики сигналов (информации), передаваемой без потерь (без искажения). Расстояние распространения пучка и область ограничения пространственных частот являются параметрами оператора и существенно меняют набор собственных чисел и функций. Выполнен расчет вихревых собственных функций ограниченного оператора распространения в ближней зоне дифракции и исследованы их качественные и количественные характеристики в зависимости от расстояния распространения, порядка вихря и ограничений, наложенных в объектной и спектральной областях.

## 1. Введение

Вихревые оптические пучки с фазовой сингулярностью впервые обсуждались в работе Nye и Bege в 1974 [1], в которой такие пучки идентифицировались с особенностями случайно рассеянных полей. Последующие работы по исследованию оптических и акустических вихрей также показали, что вихревые оптические поля порождаются при рассеянии волн на шероховатых поверхностях [2, 3]. При этом все формируемые таким образом оптические вихри имеют первый порядок, так как вихревые фазовые сингулярности более высокого порядка неустойчивы к случайным возмущениям поля и распадаются на соответствующее число оптических вихрей первого порядка [4, 5].

Важно, что вихревые фазовые сингулярности могут возникать не только в результате рассеяния в случайных средах, но и формироваться в лазерных резонаторах [6]. Моды Лагерра-Гаусса и моды Бесселя являются хорошо известными примерами пучков с винтовыми фазовыми дислокациями, или фазовыми вихрями, фундаментальные и прикладные аспекты которых оказались настолько существенными, что привело к появлению нового раздела - «сингулярной оптики» [7, 8]. Область применения вихревых пучков имеет широкий спектр от оптического манипулирования микрообъектами до передачи информации на большие расстояния [9-15]. Особый интерес представляет использование элементов сингулярной оптики в острой фокусировке, когда сочетание поляризационных и фазовых особенностей приводит к разнообразным эффектам, в том числе к преодолению дифракционного предела в дальней зоне

дифракции [16, 17]. Однако, в этом случае требуется амплитудная или фазовая аподизация зрачка фокусирующей системы [18-20], использование специальных типов поляризации [21, 22] или внесение фазовой сингулярности в пучок [23], а также сочетания всех этих факторов [24, 25] с целью оптимизации формируемого поля [26, 27].

Другим подходом к преодолению дифракционного предела является оптика ближнего поля [28-33], основанная на увеличении интервала пространственных частот, обеспечивающих сохранение затухающих компонент поля источника. Если уменьшение размера светового пятна вне зоны ближнего поля, как правило, сопровождается значительным ростом боковых лепестков [34, 35], то в области затухающих волн (на расстоянии менее длины волны) не имеется каких-либо ограничений на размер светового пятна – локализация лазерного излучения может быть сколь угодно малой, хотя существенно зависит от размера деталей фокусирующего элемента [36, 37] или воздействующих пучков [38].

В данной работе рассматривается распространение вихревых лазерных пучков в ближней зоне дифракции (на расстоянии порядка длины волны) с помощью разложения по плоским волнам на основе преобразования Фурье-Ханкеля. Собственные функции такого оператора, имеющие собственные значения близкие к единице, определяют характеристики сигналов (информации), передаваемой без потерь (без искажения). Ограниченность оператора распространения как в пространственной, так и спектральной областях приводит к необходимости численного расчета собственных функций. Выполнен расчет вихревых собственных функций ограниченного оператора распространения в ближней зоне дифракции и исследованы их качественные и количественные характеристики в зависимости от расстояния распространения, порядка вихря и ограничений, наложенных в объектной и спектральной областях.

## 2. Теоретические основы

Скалярный непараксиальный оператор распространения с использованием разложения по плоским волнам записывается следующим образом [16, 17]:

$$E(u, v, z) = \int_{\Sigma_s} F(\xi, \eta) \exp\left(ikz\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\right) \exp[ik(\xi u + \eta v)] d\xi d\eta,$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{\Sigma_o} E_0(x, y) \exp[-ik(\xi x + \eta y)] dx dy, \quad (1)$$

где  $F(\xi, \eta)$  – спектр разложения входного поля по плоским волнам,  $\Sigma_s: \sigma_1 \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq \sigma_2$  – область учитываемых пространственных частот. При  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1$  рассматриваются только распространяющиеся волны, а при  $\sigma_1 = 1, \sigma_2 > 1$  – только затухающие волны.

В случае, когда входное поле является вихревым порядком вихря  $m$ :

$$E_0(x, y) = E_0(r) \exp(im\varphi), \quad (2)$$

выражение (1) можно упростить:

$$E(\rho, \theta, z) = k^2 \exp(im\theta) \int_0^{\sigma_0} \left( \int_0^{\sigma_0} E_0(r) J_m(k\sigma r) r dr \right) \exp\left(ikz\sqrt{1-\sigma^2}\right) J_m(k\sigma\rho) \sigma d\sigma, \quad (3)$$

где  $\rho$  – радиальная координата в выходной плоскости,  $\sigma$  – радиальная координата в частотной плоскости,  $\sigma_0$  – радиус учитываемых пространственных частот,  $\theta$  – угловая координата в выходной плоскости.

Запишем оператор (3) в виде:

$$E(\rho, \theta, z) = k^2 \exp(im\theta) \int_0^{\sigma_0} E_0(r) K_m(r, \rho, z) r dr, \quad (4)$$

где

$$K_m(r, \rho, z) = \int_0^{\sigma_0} \exp(ikz\sqrt{1-\sigma^2}) J_m\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma\rho\right) J_m\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma r\right) \sigma d\sigma \quad (5)$$

Тогда задача вычисления вихревых собственных функций в ближней зоне дифракции сводится к поиску собственных функций следующего ограниченного оператора:

$$b_{n,m}(z)\psi_{n,m}(\rho, z) = \int_0^{r_0} \psi_{n,m}(r) K_m(r, \rho, z) r dr \quad (6)$$

где  $z$  - расстояние,  $b_{n,m}(z)$  - собственные значения,  $\psi_{n,m}(\rho, z)$  - радиальная часть собственных функций.

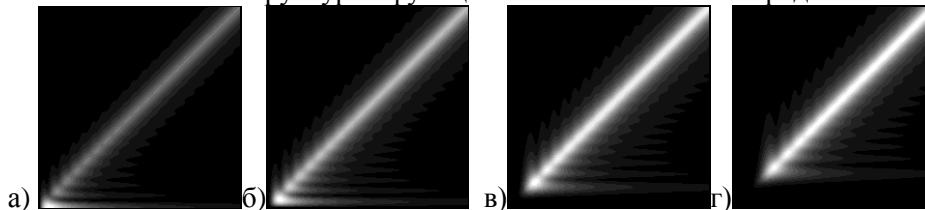
Очевидно, характеристики собственных функций будут зависеть не только от расстояния распространения  $z$  и порядка  $m$ , но и от ограничений, наложенных на поле в объектной и спектральной областях.

### 3. Расчет вихревых собственных функций ограниченного оператора распространения в ближней зоне дифракции

Расчет собственных значений и собственных функций был выполнен для различных значений параметров при тестовой длине волны лазерного излучения  $\lambda = 1$  мкм.

Рассмотрен расчет собственных функций в области затухающих волн, т.е. на расстоянии менее длины волны  $z = 0,5\lambda$  при  $\sigma_0 = 5$ , радиус входной области выбран равным  $r_0 = 10\lambda$ .

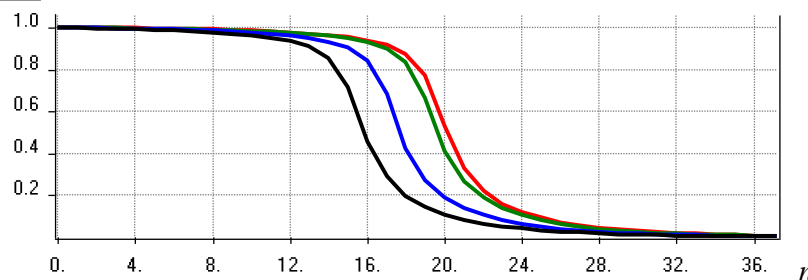
На рис. 1 показан вид матриц (5), являющихся ядром преобразования (4) для  $m=0, 1, 5, 9$ . Как видно, с увеличением номера  $m$ , область нулевых значений в нижней левой части матрицы увеличивается. Это связано со структурой функций Бесселя высокого порядка.



**Рисунок 1.** Амплитуда (негатив) матриц (5), являющихся ядром преобразования (4) при  $z = 0,5\lambda$ ,  $\sigma_0 = 5$ ,  $r_0 = 10\lambda$  для  $m=0$  (а),  $m=1$  (б),  $m=5$  (в),  $m=9$  (г).

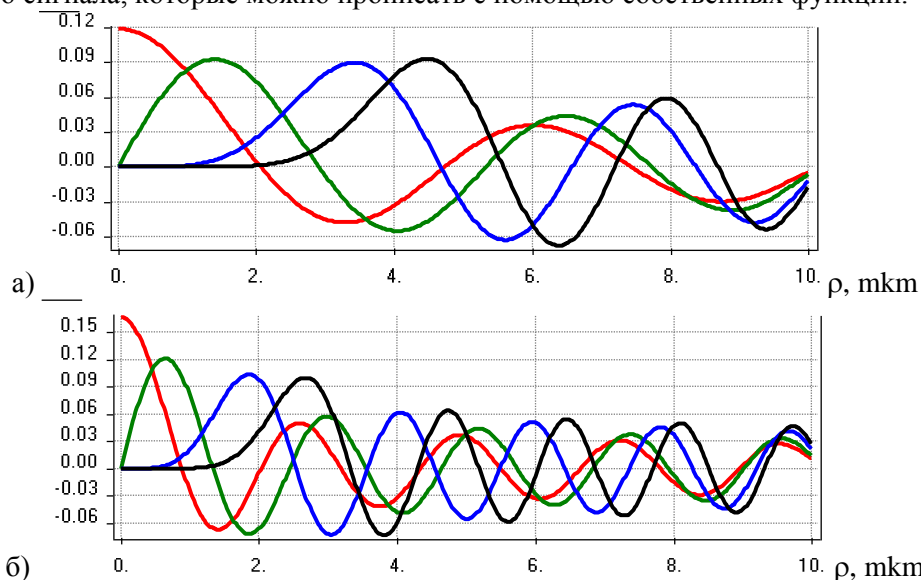
На рис. 2 показаны графики модулей собственных значений  $b_{n,m}(z)$ . Модули собственных чисел определяют «выживаемость» соответствующей собственной моды на данном расстоянии. Если собственное число близко к единице, то мода будет распространяться без искажений и потери энергии. Таким образом, число собственных чисел, близких к единице определяет количество степеней свободы рассматриваемой оптической системы и возможности ее разрешающей способности.

Как следует из рис. 2, число степеней свободы уменьшается при увеличении  $m$ .



**Рисунок 2.** График модулей собственных значений  $b_{n,m}(z)$  при  $z = 0,5\lambda$ ,  $\sigma_0 = 5$ ,  $r_0 = 10\lambda$  для  $m=0$  (красный цвет),  $m=1$  (зеленый цвет),  $m=5$  (синий цвет),  $m=9$  (черный цвет).

На рисунке 3 показаны нормированные графики полученных собственных функций. Так как функции в общем случае комплексные, то показана только действительная часть. Число переходов функций через ноль соответствует индексу  $n$ . Из рис. 3 видно, что собственные функции равны нулю при  $\rho=0$  для  $m \neq 0$ , причем, с увеличением  $m$  увеличивается центральная область нулевых значений функций. Заметим, что одновременно с увеличением  $m$  уменьшается ширина колец в периферийной области функции, что соответствует уменьшению деталей оптического сигнала, которые можно прописать с помощью собственных функций.



**Рисунок 3.** Графики действительной части собственных функций  $\psi_{n,m}(\rho, z)$  при  $z = 0.5\lambda$ ,  $\sigma_0 = 5$ ,  $r_0 = 10\lambda$  для  $n=3$  (а) и  $n=8$  (б),  $m=0$  (красный цвет),  $m=1$  (зеленый цвет),  $m=5$  (синий цвет),  $m=9$  (черный цвет).

#### 4. Заключение

В работе предложен параметрический метод расчета вихревых собственных мод свободного пространства в ближней зоне дифракции при ограничении области пространственных частот. При этом расстояние распространения пучка (порядка нескольких длин волн) и область ограничения пространственных частот являются параметрами системы и существенно меняют набор собственных чисел и мод, определяя количество степеней свободы для аппроксимации заданного поля. Выполнен расчет вихревых собственных функций ограниченного оператора распространения в ближней зоне дифракции. Показано, что число собственных функций с собственными числами, близкими к единице, т.е. количество степеней свободы оптической системы и возможности ее разрешающей способности, уменьшается с ростом порядка вихревой сингулярности. Однако, одновременно с увеличением  $m$  уменьшается ширина колец в периферийной области собственной функции, что соответствует уменьшению деталей оптического сигнала, которые можно прописать с помощью собственных функций.

#### 5. Литература

- [1] Nye, J.F. Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // Proceedings of the Royal Society A. – 1974. – Vol. 336(1605). – P. 165-190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
- [2] Berry, M.V. Singularities in waves and rays / M.V. Berry. – In: Physics of Defects / R. Balian, M. Klemm, J.-P. Poirier, eds. – Amsterdam: North-Holland, 1981. – P. 453-543.
- [3] Baranova, N.B. Wavefront dislocations: topological limitations for adaptive systems with phase conjugation / N.B. Baranova, A.V. Mamaev, N.F. Pilipetskii, V.V. Shukov, B.Ya. Zel'dovich // Journal of the Optical Society of America. – 1983. – Vol. 73. – P. 525-528.
- [4] Bazhenov, V.Yu. Screw dislocations in light wavefronts / V.Yu. Bazhenov, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // Journal of Modern Optics. – 1992. – Vol. 39. – P. 985-990.

- [5] Gbur, G. Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation / G. Gbur, R.K. Tyson // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2008. – Vol. 25. – P. 225
- [6] Siegman, A.E. *Lasers* / A.E. Siegman. – Sec. ed. – Sausalito, California: University Science Books, 1986. – 1283 p.
- [7] Березный, А.Е. Бессель-оптика / А.Е. Березный, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // *Доклады АН СССР*. – 1984. – Т. 274, № 4. – С. 802-804.
- [8] Soskin, M.S. Singular optics / M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov. – In: *Progress in Optics* / ed. by E. Wolf. – Amsterdam: North Holland, 2001. – P. 42.
- [9] He, H. Optical particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high efficiency computer-generated holograms / H. He, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop // *J. Mod. Opt.* – 1995. – Vol. 42(1). – P. 217-223.
- [10] Kotlyar, V.V. An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images / V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, S.N. Khonina // *J. Modern Opt.* – 1997. – Vol. 44(7). – P.1409-1416.
- [11] Török, P. The use of Gauss–Laguerre vector beams in STED microscopy / P. Török, P.R.T. Munro // *Opt. Express*. – 2004. – Vol. 12. – P. 3605-3617.
- [12] Khonina, S.N. How low can STED go? Comparison of different write-erase beam combinations for stimulated emission depletion microscopy / S.N. Khonina, I. Golub // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2012. – Vol. 29(10). – P. 2242-2246. DOI: 10.1364/JOSAA.29.002242.
- [13] Wang, J. Terabit free-space data transmission employing orbit angular momentum multiplexing / J. Wang, J.-Y. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A.E. Willner // *Nature Photonics*. – 2012. – Vol. 6. – P. 488-496.
- [14] Soifer, V.A. Vortex beams in turbulent media: review / V.A. Soifer, O. Korotkova, S.N. Khonina, E.A. Shchepakina // *Computer Optics*. – 2016. – Vol. 40(5). – P. 605-624. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624.
- [15] Porfirev, A.P. Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium / A.P. Porfirev, M.S. Kirilenko, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56(11). – P. E8-E15. DOI: 10.1364/AO.56.0000E8.
- [16] Khonina, S.N. Optimization of focusing of linearly polarized light / S.N. Khonina, I. Golub // *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36(3). – P. 352-354.
- [17] Khonina, S.N. Simple phase optical elements for narrowing of a focal spot in high-numerical-aperture conditions / S.N. Khonina // *Optical Engineering*. – 2013. – Vol. 52(9). – P. 091711. DOI: 10.1117/1.OE.52.9.091711.
- [18] Quabis, S. Focusing light to a tighter spot / S. Quabis, R. Dorn, M. Eberler, O. Glockl, G. Leuchs // *Opt. Commun.* – 2000. – Vol. 179. – P. 1-7.
- [19] Wang, H. Creation of a needle of longitudinally polarized light in vacuum using binary optics / H. Wang, L. Shi, B. Lukyanchuk, C. Sheppard, Ch. T. Chong // *Nature Photonics*. – 2008. – Vol. 2. – P. 501-505.
- [20] Khonina, S.N. Analysis of wave aberration influence on reducing focal spot size in a high-aperture focusing system / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, E.A. Pelevina // *J. Opt.* – 2011. – Vol. 13. – P. 095702 (13 pp).
- [21] Dorn, R. Sharper focus for a radially polarized light beam / R. Dorn, S. Quabis, G. Leuchs // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol. 91. – P. 233901.
- [22] Kozawa, Y. Sharper focal spot formed by higher-order radially polarized laser beams / Y. Kozawa, S. Sato // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2007. – Vol. 24. – P. 1793-1798.
- [23] Helseth, L.E. Optical vortices in focal regions / L.E. Helseth // *Opt. Commun.* – 2004. – Vol. 229. – P. 85-91.
- [24] Pereira, S.F. Superresolution by means of polarisation, phase and amplitude pupil masks / S.F. Pereira, A.S. Van de Nes // *Opt. Commun.* – 2004. – Vol. 234. – P. 119-124.
- [25] Beversluis, M.R. Programmable vector point-spread function engineering / M.R. Beversluis, L. Novotny, S. J. Stranick // *Opt. Express*. – 2006. – Vol. 14. – P. 2650-2656.

- [26] Rao, L. Focus shaping of cylindrically polarized vortex beams by a high numerical-aperture lens / L. Rao, J. Pu, Zh. Chen, P. Yei // *Opt. & Las. Techn.* – 2009. – Vol. 41. – P. 241-246.
- [27] Khonina, S.N. Enlightening darkness to diffraction limit and beyond: comparison and optimization of different polarizations for dark spot generation / S.N. Khonina I. Golub // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2012. – Vol. 29(7). – P. 1470-1474. DOI: 10.1364/JOSAA.29.0014.
- [28] Betzig, E. Near-field optics: microscopy, spectroscopy, and surface modification beyond the diffraction limit / E. Betzig, J.K. Trautman // *Science.* – 1992. – Vol. 257. – P. 189-194.
- [29] Girard, C. Near-field optics theories / C. Girard, A. Dereux // *Rep. Prog. Phys.* – 1996. – Vol. 59. – P. 657-699.
- [30] Sheppard, C.J.R. Fundamentals of superresolution / C.J.R. Sheppard // *Micron.* – 2007. – Vol. 38. – P. 165-169.
- [31] Хонина, С.Н. Дифракция на бинарных микроаксонах в ближней зоне / С.Н. Хонина, Д.А. Савельев, П.Г. Серафимович, И.А. Пустовой // *Оптический журнал.* – 2012. – Т. 79, № 10. – С. 22-29.
- [32] Degtyarev, S.A. Photonic nanohelix generated by a binary spiral axicon / S.A. Degtyarev, A.P. Porfirev, S.N. Khonina // *Applied Optics.* – 2016. – Vol. 55(12). – P. B44-B48.
- [33] Khonina, S.N. Very compact focal spot in the near-field of the fractional axicon / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // *Optics Communications.* – 2017. – Vol. 391. – P. 24-29.
- [34] Di Francia, G.T. Super-Gain Antennas and Optical Resolving Power / G.T. Di Francia // *Supplto. NuovoCim.* – 1952. – Vol. 9. – P. 426-438.
- [35] Berry, M.V. Evolution of quantum superoscillations and optical superresolution without evanescent waves / M. V. Berry, S. Popescu // *J. Phys. A.* – 2006. – Vol. 39. – P. 6965-6977.
- [36] Verhagen, E. Nanofocusing in laterally tapered plasmonic waveguides / E. Verhagen, A. Polman, L. Kuipers // *Opt. Express.* – 2008. – Vol. 16. – P. 45-57.
- [37] Degtyarev, S.A. Singular laser beams nanofocusing with dielectric nanostructures: theoretical investigation / S.A. Degtyarev, A.P. Porfirev, A.V. Ustinov, S.N. Khonina // *Journal of the Optical Society of America B.* – 2016. – Vol. 33(12). – P. 2480-2485.
- [38] Khonina, S.N. Near-field propagation of vortex beams: models and computation algorithms / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, A.A. Kovalyov, S.G. Volotovskiy // *Optical Memory and Neural Networks.* – 2014. – Vol. 23(2). – P. 50-73.

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-37-00056) в части теоретических выкладок и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части численного моделирования.

# Calculation of the vortex eigenfunctions of the finite propagation operator in the near-field diffraction

M.S. Kirilenko<sup>1,2</sup>, S.G. Volotovskiy<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

<sup>2</sup>Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

**Abstract.** The propagation of vortex laser beams in the near diffraction (at a distance in the order of the wavelength) can be described by means of an expansion in plane waves, which after considering vortices reduces to an vortex propagation operator involving Fourier-Hankel transforms. The eigenfunctions of the operator, when eigenvalues are close to one, determine the characteristics of the signals (information) transmitted lossless (without distortion). The beam propagation distance, vortex order and the region of spatial frequency limitation are parameters of the operator and essentially change the set of eigenvalues and functions. We calculate the vortex eigenfunctions of the finite propagation operator in the near diffraction zone and investigate their qualitative and quantitative characteristics depending on the propagation distance, the order of vortex and the constraints imposed in the object and spectral domains.