

# РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА РАСШИРЕННЫХ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Р.В. Скиданов, А.А. Морозов, С.Ю. Гоголева

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Предлагается новый подход для решения интегральных уравнений Фредгольма, который позволяет эффективно вычислять нормальные псевдорешения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и находить приемлемое по точности решение интегрального уравнения в рамках задачи повышения разрешения фильтрового изображающего спектрометра.

**Ключевые слова:** уравнения Фредгольма, расширенные регуляризованные нормальные уравнения, изображающий спектрометр.

## Введение

Многие практические задачи, в том числе и оптического характера приводят к решению интегральных уравнений Фредгольма. Такие уравнения являются типичными представителями некорректных задач. Однако следует отметить, что такие задачи обладают рядом неприятных с точки зрения обработки свойств и для их решения стандартные методы неприменимы. Благодаря трудам академика А.Н. Тихонова разработана общая стратегия построения устойчивых методов решения некорректных (неустойчивых задач) в операторной форме [1]. В ее основе лежит понятие регуляризирующего оператора или, что тоже, регуляризирующего алгоритма. Реализуя этот алгоритм, приходится решать систему нормальных регуляризованных систем линейных алгебраических уравнений. Эта система часто является плохо обусловленной. Необходимо правильно подобрать параметр регуляризации, чтобы снизить число обусловленности. Также важно выбрать метод решения, который был бы численно устойчивым. В данной работе предлагается подход, с использованием специальной формы расширенных регуляризованных нормальных уравнений. Этот подход позволяет решить систему уравнений при существенно меньших значениях параметра регуляризации, а также снизить погрешности решения. В данной работе рассматривается использование этого подхода применительно к задаче построения гиперспектральных изображений в фильтровом спектрометре.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Au = \int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x), \quad x \in [c, d] \quad (1)$$

Будем считать для определенности, что  $K(x, s), K_x(x, s), K_s(x, s) \in C([c, d] \times [a, b])$ ,  $u \in C[a, b]$ ,  $f \in C[c, d]$ .

Для этого уравнения операторного уравнения не выполняются условия корректности.

Рассмотрим систему алгебраических уравнений, к которой сводится рассматриваемое интегральное уравнение (1)

$$Ax = b, \quad (2)$$

где матрица  $A \in R^{n \times m}$ ,  $b \in R^n$ .

Регуляризованное решение системы (2) находится как  $x = \operatorname{Argmin}_{x \in R^m} \{\|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x\|_2^2\}$ ,

которое является эквивалентным решению смещенной нормальной системы

$$(A^T A + \alpha^2 E)x = A^T b, \quad (3)$$

где  $\alpha^2$ –параметр регуляризации.

Число обусловленности системы (3) находится как

$$\operatorname{cond}_2(A^T A + \alpha^2 E) = \frac{\sigma_1^2 + \alpha^2}{\sigma_m^2 + \alpha^2},$$

где  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$  - сингулярные числа матрицы  $A$ .

Так как матрица системы симметричная, то, в случае хорошей обусловленности, она решается методом Холесского. Система (3) часто является плохо обусловленной, тогда применяют методы, основанные на ортогональных преобразованиях, но они ведут к значительному росту числа арифметических операций. Поэтому вместо системы (3) в работе предложено рассмотреть подход на основе расширенной регуляризованной системы уравнений.

## 2. Метод расширенной регуляризованной нормальной системы.

Вместо системы (3) в работе предлагается рассмотреть эквивалентную ей систему алгебраических уравнений [2]:

$$\begin{pmatrix} E & A \\ A^T & -\alpha^2 E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $r = b - Ax$ – вектор невязки.

Число обусловленности матрицы системы (4) незначительно меньше числа обусловленности матрицы нормальной системы уравнений (3). Поэтому с целью снижения числа обусловленности в систему (4) вводится параметр  $\beta > 0$ :

$$\begin{pmatrix} \beta E & A \\ A^T & -\frac{\alpha^2 E}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow C(\beta) = d. \quad (5)$$

Регуляризованная нормальная система эквивалентна регуляризованной расширенной системе. Минимум числа обусловленности матрицы (5) достигается при  $\beta_* = \sqrt{\frac{\sigma_m^2}{2} + \alpha^2}$ , где  $\sigma_m$  – минимальное сингулярное число матрицы  $A$ .

Даже при выборе  $\beta_{**} = \sqrt{\alpha^2}$  спектральное число обусловленности матрицы системы (5) будет

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \alpha^2}{\alpha^2}}.$$

Таким образом, рассматриваемый подход позволяет повысить численную устойчивость рассматриваемой задачи и снизить погрешности при нахождении решения системы уравнений (2).

### 3. Численное решение уравнения Фредгольма первого рода в задаче восстановления гиперспектральных изображений в рамках абсорбционной спектроскопии

Рассмотрим задачу восстановления гиперспектральных изображений в рамках абсорбционной спектроскопии, на примере, гиперспектрометра использующего спектральный фильтр [3-6]. В [6] фильтр имеет размеры 12х60мм. Если разделить фильтр по длинной стороне на узкие участки, то каждый из этих участков будет иметь узкий спектр пропускания шириной 7-10нм. От одного конца фильтра к другому спектральная полоса пропускания участков будет плавно перемещаться по спектру от 400 до 700нм. На рис. 1 схематично изображено деление фильтра на различные области пропускания.

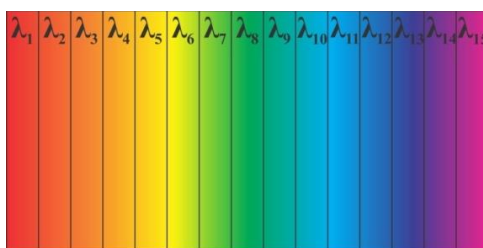


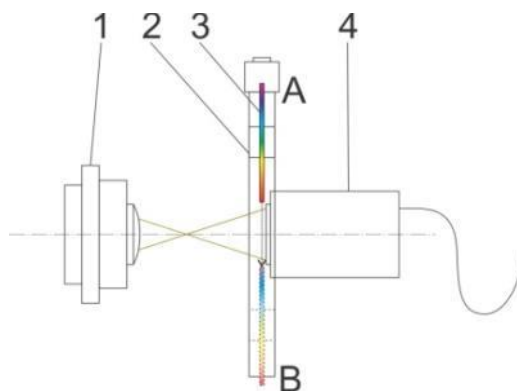
Рис. 1. Схема деления фильтра на области с различными спектрами пропускания

На рис. 2 представлена оптическая схема абсорбционного гиперспектрометра использующего специальный спектральный фильтр. Объектив формирует изображение исследуемого объекта на матрицу камеры. Спектральный фильтр закреплен на линейный однокоординатный моторизованный столик перед камерой и перемещается, с помощью него, из положения А в положение В. В результате такого перемещения каждый участок фильтра имеющий узкий спектр пропускания пройдет через все изображение формируемое объективом. И на выходе получится серия изображений, структура которых представлена на рис. 3.

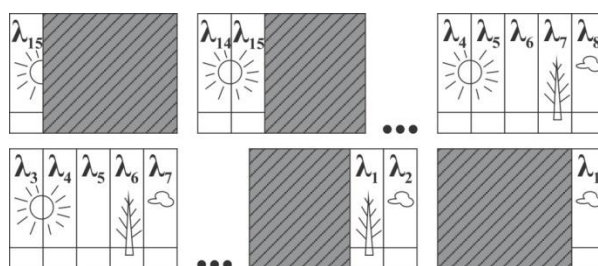
Для получения спектрального разрешения гиперспектральных изображений выше чем спектральное разрешение используемого фильтра необходимо решить уравнение Фредгольма первого рода. В этом случае значение сигнала на матрице по растру изображения  $A(x,y)$  будет определяться формулой

$$A(x, y) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau(\lambda, x) \eta(\lambda) S(\lambda, x, y) d\lambda \quad (6)$$

где  $\tau(\lambda, x)$  - коэффициент пропускания спектрального фильтра,  $\eta(\lambda)$  – спектральная чувствительность ПЗС матрицы  $\lambda_1, \lambda_2$  - границы спектрального диапазона работы спектрометра,  $S(\lambda, x, y)$  – гиперспектральное изображение.



**Рис. 2.** Оптическая схема гиперспектрометра использующего спектральный фильтр Linear Variable VIS Bandpass Filter. 1 - объектив; 2 - линейный однокоординатный моторизованный столик; 3 - спектральный фильтр; 4 - камера.



**Рис. 3.** Структура первоначальных изображений полученных гиперспектрометром

Функции  $A(x, y)$  и  $\tau(\lambda, x)$  на практике измеряются с использованием ПЗС матриц, которые в зависимости от их качества и условий съемки накладывают на измерения шумовую составляющую и приводят к погрешностям. В среднем для обычных матриц погрешность получается 1-2%. Такая погрешность может полностью исказить решение полученной СЛАУ. Для уменьшения влияния данных погрешностей можно воспользоваться методами регуляризации.

Интегральное уравнение (6) сводится к системе линейных уравнений

$$A_j(y) = \sum_i \tau_j(\lambda_i) \eta_j(\lambda_i) S_j(\lambda_i, y), i = 1, n; j = 1, m \quad (7)$$

или в полностью дискретной форме

$$A_j(l) = \sum_i \tau_j(\lambda_i) \eta_j(\lambda_i) S_j(\lambda_i, l), i = 1, n; j = 1, m \quad (8)$$

где  $l$  – номер пиксела в столбце,  $j$  – номер зоны пропускания спектрального фильтра,  $i$  – номер дискретной длины волны,  $A_j(l)$ -яркость  $j$ -го пиксела в столбце.

В результате вычислительного эксперимента была сформирована система линейных уравнений (2) с матрицами:  $A \in R^{242 \times 351}$ ,  $b \in R^{242}$ ,  $x \in R^{351}$ .

Число обусловленности матрицы  $A$ :  $\text{cond}(A) = 4.0660e+8$ . Число обусловленности матрицы  $\text{cond}(A^T A)$ :  $A^T A = 4.0660e+19$ ,  $\alpha^2 = 0.01$ . С целью снижения числа обусловленности будем решать систему вида (5). Числа обусловленности данной системы приведены в таблице 1.

Табл. 1. Числа обусловленности

$\beta$	$\text{Cond}(C(\beta))$
$\beta = 1$	$7.7044 * 10^8$
$\beta = \beta_*$	$3.4365 * 10^5$
$\beta = \beta_{**}$	$1.4302 * 10^6$

Пусть и матрица, и правая часть системы заданы с некоторой погрешностью, тогда наряду с системой (2) рассматривается система

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b, \quad (9)$$

Тогда для оценки относительной погрешности решения справедливо неравенство:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right), \quad (10)$$

Из неравенства (10) видно, что число обусловленности определяет, насколько погрешность входных данных может повлиять на решение системы. Поэтому при малых погрешностях исходных данных и выборе параметра  $\beta = \beta_*$ , опираясь на результаты, приведенные в таблице 1, мы можем прогнозировать наименьшую погрешность в решении.

## Заключение

Рассмотрен новый подход для решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода, в рамках задачи построения высокоразрешающего изображающего спектрометра на основе спектральных фильтров. Данный подход позволяет эффективно вычислять нормальные псевдорешения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и находить приемлемое по точности решение интегрального уравнения, что позволяет говорить о практической применимости метода для изображающей спектроскопии.

## Литература

1. Тихонов А.Н., Гончарский А.В. Численные методы решения некорректных задач. М.:Наука, 1990.
2. Жданов А.И. Метод решения регуляризованных нормальных уравнений //Журнал вычислительной математики и математической физики.2012. Т.52, № 2. С. 205-208.
3. Tack, N. A compact, high-speed, and low-cost hyperspectral imager / N. Tack, A. Lambrechts, S. Sousan, L. Haspelslagh // Proceeding of SPIE. – 2012. – Vol. 8266. – P. 82660Q1-13.
4. Spectral camera pfd [Electronical Resource]. – URL: <http://www.specim.fi/files/pdf/core/datasheets/PFD%20Spectral%20Camera-v3-11.pdf>. - 2015.

5. Gat, N. Imaging Spectroscopy Using Tunable Filters: A Review/ N. Gat // Proceeding of SPIE. – 2000. – Vol. 4056. – P. 50-64.
6. Скиданов, Р.В. Изображающий спектрометр на основе дискретного интерференционного фильтра / Р.В. Скиданов, А.А. Морозов, А.П. Порфирьев, В.А. Бланк // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 5. – С. 716-720. – DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-5-716-720.