

# Решение задачи идентификации порядка и параметров авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений

Н.А. Андриянов<sup>1,2</sup>, М.Н. Служивый<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ульяновский государственный технический университет, Северный Венец 32, Ульяновск, Россия, 432027

<sup>2</sup>Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Можайского 8/8, Ульяновск, Россия, 432071

**Аннотация.** На этапе представления реального изображения с помощью математической модели важное место занимает задача идентификации параметров модели. При этом саму идентификацию проще выполнить, когда известен конкретный тип модели. Другими словами, если имеется ряд моделей, характеризующихся разными свойствами, то если для них составлено соответствие с типом подходящих изображений, тогда можно заранее определять используемую модель. Поэтому в работе мы не рассматриваем критерии выбора моделей, а выполняем идентификацию параметров для авторегрессионных моделей, в том числе с кратными корнями характеристических уравнений. Это связано с тем, что эффективность идентификации проверяется по порожденным данной моделью изображениям. Однако даже при таком подходе, когда известна модель, нужно предварительно определить порядок модели. В связи с этим на основе уравнений Юла-Уокера исследуется алгоритм определения порядка модели, также находятся оптимальные параметры модели. При этом предложенный алгоритм может быть использован и при работе с реальными изображениями.

## 1. Введение

Математическое моделирование применяется во многих областях науки и техники, в том числе и при обработке изображений. В частности, методы, ориентированные на описание изображений с помощью моделей случайных полей (СП), позволяют вести разработку алгоритмов оценивания параметров, фильтрации, обнаружения аномалий на фоне изображений и проводить их анализ для большого числа симитированных изображений.

Существует множество изображений, для которых характерно плавное изменение яркости [1,2]. Как правило, такие изображения имеют медленно убывающую корреляционную функцию (КФ) в некоторой заданной окрестности. Применение авторегрессионных (АР) моделей изображений первого порядка [3,4] не обеспечивает сильной связи между пикселями, поскольку ее КФ спадает по экспоненциальному закону. Между тем известны разделимые СП, порождаемые одномерными авторегрессиями с кратными корнями характеристических уравнений [5-6]. Важной особенностью АР с кратными корнями является их значительная простота по сравнению с произвольными АР высоких порядков.

Вместе с тем при описании реального материала с помощью математических моделей возникает вопрос идентификации параметров модели. При этом следует подбирать модель таким образом, чтобы был найден компромисс между ее сложностью и сходством имитированного изображения с реальным. В работе рассматривается решение задачи идентификации параметров АР моделей с кратными корнями характеристических уравнений, которые в силу разделимости КФ позволяют значительно упростить данную задачу. Следует отметить, что научной новизной обладает применение подхода идентификации параметров на базе уравнений Юла-Уокера к определению порядка и корреляционных параметров АР моделей с кратными корнями.

## 2. Краткий обзор методов идентификации параметров для случайного процесса

В настоящее время идентификация процессов АР, скользящего среднего (СС) и АРСС по одноканальным незашумленным наблюдениям является наиболее изученной. Особенно много создано методов для оценивания параметров таких процессов. Методы оценивания построены либо на непосредственном использовании наблюдений, либо на первоначальном вычислении по этим наблюдениям выборочных статистических характеристик (автокорреляций, спектральных плотностей) с последующим использованием их для определения оценок параметров. К первой группе методов относится метод наименьших квадратов (МНК) для процесса АР [7,8], метод максимального правдоподобия (МП) для процессов АР, СС, АРСС и различные разновидности и модификации этих методов [9-11]. Ко второй группе – метод Юла-Уокера для процесса АР [10], корреляционные методы Бокса и Дженкинса для процессов АРСС, СС [10], метод Линдбергера для процессов АР, СС, АРСС [12], метод Дурбина для процесса СС [13], метод инверсных автокорреляций Клевеланда для процесса АРСС [14] и другие методы [15]. В обеих группах имеются методы, в которых оценки параметров вычисляются линейными алгоритмами путем решения некоторой системы линейных уравнений (например, МНК и метод Юла-Уокера для процесса АР), а также методы, в которых применяются нелинейные методы вычисления оценок, сводящиеся к численным алгоритмам минимизации некоторой функции от параметров (метод МП и метод Линдбергера для процесса АРСС). Значительно слабее разработаны методы определения класса процессов АР, СС и АРСС [16]. В работе Китлера и Уайтхеда [17] задача определения класса сведена к задаче определения порядка процесса АРСС. Поэтому интерес представляет решение определения и класса модели. В простейшем случае такая задача сводится к задаче, когда по выбранной модели АР необходимо определить ее порядок.

## 3. Авторегрессии с кратными корнями характеристических уравнений

С помощью АР моделей с кратными корнями характеристических уравнений возможно получать реализации СП, которые будут близки по характеру к реальным изображениям. При этом важным свойством порождаемых СП будет их квазиизотропность. Общая формула для моделей различных кратностей может быть записана в виде

$$x_{i,j} = \beta \xi_{i,j} - \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{i,j_1} x_{i-i,j-j_1}, \quad (1)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  характеризуют кратность модели; коэффициенты  $\alpha_{i,j_1}$  ( $\alpha_{0,0} = 0$ ) являются произведениями соответствующих коэффициентов одномерных АР вдоль осей  $x$  и  $y$

$$\alpha_{i,j_1} = \alpha_{x_{i_1}} \alpha_{y_{j_1}}. \quad (2)$$

Коэффициенты одномерных АР (2) можно получить с помощью выражений

$$\alpha_{x_{i_1}}(\rho_x, N_1) = (-1)^{i_1+1} C_{N_1}^{i_1} \rho_x^{i_1}, \alpha_{y_{j_1}}(\rho_y, N_2) = (-1)^{j_1+1} C_{N_2}^{j_1} \rho_y^{j_1}, \quad (3)$$

где  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . Коэффициент  $\beta$  двумерной модели является нормированным произведением соответствующих коэффициентов одномерных АР вдоль осей  $x$  и  $y$

$$\beta = \frac{\sigma_x}{\sigma_\xi} \beta_x \beta_y, \quad (4)$$

$$\text{где } \beta_x = \left( \frac{(1-\rho_x^2)^{2N_1-1}}{\sum_{l=0}^{N_1-1} (C_{N_1-l}^l \rho_x^l)^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \beta_y = \left( \frac{(1-\rho_y^2)^{2N_2-1}}{\sum_{l=0}^{N_2-1} (C_{N_2-l}^l \rho_y^l)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При идентификации параметров будем приближать КФ исходных данных и наиболее подходящей модели. Для того, чтобы получить КФ моделей произвольных порядков, можно использовать выражения для одномерных КФ АР с кратными корнями характеристических уравнений [18]

$$B_x(k) = \sigma_x^2 \sum_{l=0}^{m-1} g(m, l, k) \frac{\rho^{2(m-l-1)}}{(1-\rho^2)^{2k-l-1}}, \quad (5)$$

где  $g(m, l, k) = \frac{(m+k-1)!(2m-l-2)!}{l!(m-1)!(m-l-1)!(m+k-l-1)!}$ . Дисперсию независимых случайных величин

$\xi_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , найдем по заданной дисперсии СП  $B_x(0) = \sigma_x^2$

$$\sigma_\xi^2 = \sigma_x^2 (1-\rho^2)^{2m-1} \left/ \sum_{l=0}^{m-1} (C_{m-1}^l \rho^l)^2 \right. . \quad (6)$$

Таким образом, для пространственного АР уравнения с характеристическими корнями кратности  $(m_1, m_2)$  выражение для КФ может быть записано в виде

$$B_{xy}(k_1, k_2) = \sigma_x^2 \sum_{l=0}^{m_1-1} g(m_1, l, k_1) \frac{\rho_x^{2(m_1-l-1)}}{(1-\rho_x^2)^{2k_1-l-1}} \sum_{l=0}^{m_2-1} g(m_2, l, k_2) \frac{\rho_y^{2(m_2-l-1)}}{(1-\rho_y^2)^{2k_2-l-1}}. \quad (7)$$

Тем не менее, в случае для модели с кратными корнями можно отдельно выполнять идентификацию параметров по строке и по столбцу, используя формулу (5).

#### 4. Идентификация параметров на основе теоретических значений КФ

Для решения задачи идентификации будем использовать АР модели произвольного порядка

$$x_i = \rho_1 x_{i-1} + \rho_2 x_{i-2} + \dots + \rho_m x_{i-m} + \xi_i, \quad i=1, 2, \dots, M, \quad (8)$$

где  $m$  – порядок АР.

С помощью подбора коэффициентов  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  можно получить гауссовские СП  $\{x_i\}$ ,  $i=1, 2, \dots, M$ , с разнообразными корреляционными свойствами. При этом для значений КФ можно использовать следующее выражение

$$R_x(k) = \rho_1 R_x(k-1) + \rho_2 R_x(k-2) + \dots + \rho_m R_x(k-m), \quad k > 0. \quad (9)$$

КФ модели с кратными корнями при различных корнях  $z_\nu$ ,  $\nu=1, 2, \dots, m$ , характеристического уравнения

$$z^m - \rho_1 z^{m-1} - \rho_2 z^{m-2} - \dots - \rho_m = 0, \quad (10)$$

и выполнении условия устойчивости  $|z_\nu| < 1$ ,  $\nu=1, 2, \dots, m$ , представляется суммой экспонент

$$R_x(k) = A_1 z_1^{|k|} + A_2 z_2^{|k|} + \dots + A_m z_m^{|k|}. \quad (11)$$

Подстановка в (9) значений  $k=1, 2, \dots, m$  дает известную систему уравнений Юла-Уокера, которая, например, для систем второго порядка примет вид

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 R(1) &= R(1), \\ \rho_1 R(1) + \rho_2 &= R(2). \end{aligned} \quad (12)$$

Решение этой системы позволяет найти коэффициенты  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  уравнения (8) по заданным заранее или оцененным на основе эксперимента значениям КФ  $R_x(1), R_x(2), \dots, R_x(m)$ . Будем выполнять идентификацию параметров для моделей с кратными корнями характеристических уравнений 1-4-го порядков. При этом порядок можно идентифицировать,

если учитывать только коэффициенты, вносящие в модель достаточно отличный от нуля вклад. В таблице 1 представлены результаты нахождения корреляционных параметров по значениям КФ АР с кратными корнями. По строкам отложена реальная кратность, по столбцам - оцениваемая. Коэффициент  $\rho = 0.8$  для моделей всех порядков. Слева найденные значения, справа - действительные.

**Таблица 1.** Идентификация параметров по теоретическим значениям КФ.

	$m^*=1$	$m^*=2$	$m^*=3$	$m^*=4$
$m=1$	$\rho_1 = 0.8, \rho_1 = 0.8,$ $\rho_2 = 0, \rho_2 = 0,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 0,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$	$\rho_1 = 0.8, \rho_1 = 0.8,$ $\rho_2 = 0, \rho_2 = 0,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 0,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$	$\rho_1 = 0.8, \rho_1 = 0.8,$ $\rho_2 = 0, \rho_2 = 0,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 0,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$	$\rho_1 = 0.8, \rho_1 = 0.8,$ $\rho_2 = 0, \rho_2 = 0,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 0,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$
$m=2$	$\rho_1 = 0.976, \rho_1 = 1.6,$ $\rho_2 = 0, \rho_2 = -0.64,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 0,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$	$\rho_1 = 1.6, \rho_1 = 1.6,$ $\rho_2 = -0.64, \rho_2 = -0.64,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 0,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$	$\rho_1 = 1.6, \rho_1 = 1.6,$ $\rho_2 = -0.64, \rho_2 = -0.64,$ $\rho_3 = 3 \times 10^{-14}, \rho_3 = 0,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$	$\rho_1 = 1.6, \rho_1 = 1.6,$ $\rho_2 = -0.64, \rho_2 = -0.64,$ $\rho_3 = 3 \times 10^{-14}, \rho_3 = 0,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$
$m=3$	$\rho_1 = 0.992, \rho_1 = 2.4,$ $\rho_2 = 0, \rho_2 = -1.92,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 0.512,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$	$\rho_1 = 1.92, \rho_1 = 2.4,$ $\rho_2 = -0.937, \rho_2 = -1.92,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 0.512,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$	$\rho_1 = 2.4, \rho_1 = 2.4,$ $\rho_2 = -1.92, \rho_2 = -1.92,$ $\rho_3 = 0.512, \rho_3 = 0.512,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = 0$	$\rho_1 = 2.4, \rho_1 = 2.4,$ $\rho_2 = -1.92, \rho_2 = -1.92,$ $\rho_3 = 0.512, \rho_3 = 0.512,$ $\rho_4 = -1 \times 10^{-13}, \rho_4 = 0$
$m=4$	$\rho_1 = 0.995, \rho_1 = 3.2,$ $\rho_2 = 0, \rho_2 = -3.84,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 2.048,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = -0.41$	$\rho_1 = 1.969, \rho_1 = 3.2,$ $\rho_2 = -0.979, \rho_2 = -3.84,$ $\rho_3 = 0, \rho_3 = 2.048,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = -0.41$	$\rho_1 = 2.837, \rho_1 = 3.2,$ $\rho_2 = -2.724, \rho_2 = -3.84,$ $\rho_3 = 0.886, \rho_3 = 2.048,$ $\rho_4 = 0, \rho_4 = -0.41$	$\rho_1 = 3.2, \rho_1 = 3.2,$ $\rho_2 = -3.84, \rho_2 = -3.84,$ $\rho_3 = 2.048, \rho_3 = 2.048,$ $\rho_4 = -0.41, \rho_4 = -0.41$

Анализ таблицы 1 показывает, что значения коэффициентов корреляции оцениваются тем точнее, чем выше кратность. Если оцениваемая кратность превышает действительную, то дополнительные коэффициенты либо равны 0, либо очень к нему близки. Таким образом, процесс идентификации порядка модели может выполняться сперва для какой-то большой кратности. Если в полученных коэффициентах нет 0, то следует проводить расчет по большей кратности, пока не появятся 0. Если имеются нулевые коэффициенты, то порядок соответствует номеру последнего значимого коэффициента.

Аналогичную связь коэффициентов корреляции и значений КФ можно получить и для двумерного случая, т.е. изображения. Соотношение для значений КФ, соответствующее выражению (9), но для трехточечной модели запишется в виде

$$R(k_1, k_2) = \rho_{10}R(k_1 - 1, k_2) + \rho_{01}R(k_1, k_2 - 1) + \rho_{11}R(k_1 - 1, k_2 - 1), k_1 > 0, k_2 > 0. \tag{13}$$

Легко проверить, что решение двумерной системы уравнений Юла-Уокера (13) для КФ модели Хабиби даст коэффициенты корреляции, идентичные коэффициентам двумерной АР модели первого порядка. Чтобы повысить порядок АР, как и в одномерном случае, необходимо увеличение числа коэффициентов корреляции. В таком случае модель формирования СП может быть записана

$$x_{i,j} = \sum_{l=0}^{m_j} \sum_{k=0}^{m_i} \rho_{kl} x_{i-k, j-l} - \rho_{00} x_{i,j} + \xi_{i,j}, i = \overline{1, M_1}, j = \overline{1, M_2}, \tag{14}$$

где  $\{x_{i,j}\}$  - реализация СП (изображения);  $\rho_{kl}$  - коэффициенты корреляции для элементов, отстающих друг от друга по осям  $i$  и  $j$  на  $k$  и  $l$  пикселей соответственно;  $\{\xi_{i,j}\}$  - двумерное СП независимых гауссовских случайных величин с нулевым средним  $M\{\xi_{i,j}\} = 0$  и дисперсией

$M\{\xi_{i,j}^2\} = \sigma_\xi^2 = [1 - \sum_{l=0}^{m_j} \sum_{k=0}^{m_i} \rho_{kl} R(k,l) + \rho_{00} R(0,0)] \sigma_x^2$ ;  $m_i$  и  $m_j$  – порядки АР;  $M_1$  и  $M_2$  – размеры изображения.

Количество слагаемых модели с учетом случайной добавки будет равно  $(m_i + 1) \times (m_j + 1)$ .

Используя формулы (9) и (13), можно записать соотношение для расчета значений КФ

$$R(k_1, k_2) = \sum_{l=0}^{m_j} \sum_{k=0}^{m_i} \rho_{kl} R(k_1 - k, k_2 - l) - \rho_{00} R(k_1, k_2), \quad k_1 > 0, k_2 > 0. \quad (15)$$

Выражение (15) можно использовать и для случая неразделимых КФ, если идентифицируются параметры произвольного АР СП любого порядка.

### 5. Идентификация параметров на основе КФ реальных изображений

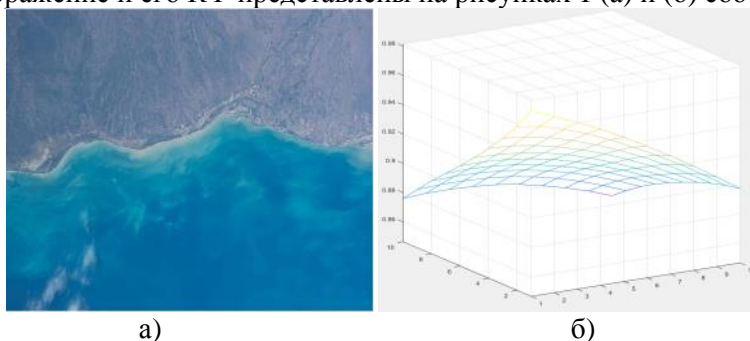
Выполним идентификацию параметров модели, исходя из близости КФ модели и исходных данных. Причем в первом случае будем рассматривать АР с разделимой КФ и отдельно вычислим коэффициенты по строке и по столбцу. Во втором случае воспользуемся уравнениями на основе выражения (15).

Пусть имеется реальное изображение, представленное как  $I(i, j), i \in 1, \dots, M_1, j \in 1, \dots, M_2$ . Тогда можно вычислить его КФ по выражению

$$R_l(k_1, k_2) = \frac{1}{\sigma_l^2} \sum_{i=k_1+1}^{M_1} \sum_{j=k_2+1}^{M_2} (I(i, j) - m_l)(I(i - k_1, j - k_2) - m_l), \quad (16)$$

где  $m_l$  - среднее значение яркости по всему изображению;  $\sigma_l^2$  - дисперсия яркости, посчитанная по всему изображению.

Исследуемое изображение и его КФ представлены на рисунках 1 (а) и (б) соответственно.



**Рисунок 1.** Изображение, для которого осуществляется подгонка параметров (а) и его КФ (б).

Идентификация выполняется для АР модели 4-го порядка:

- для СП с разделимой КФ

$$\rho_{10} = 1.098; \rho_{20} = -0.39; \rho_{30} = 0.364; \rho_{40} = -0.082; \quad \rho_{01} = 0.828; \rho_{02} = 0.0047; \rho_{03} = 0.111; \rho_{04} = 0.038;$$

$$\varepsilon = (\hat{R} - R)^2 = 0.387.$$

- для СП с неразделимой КФ

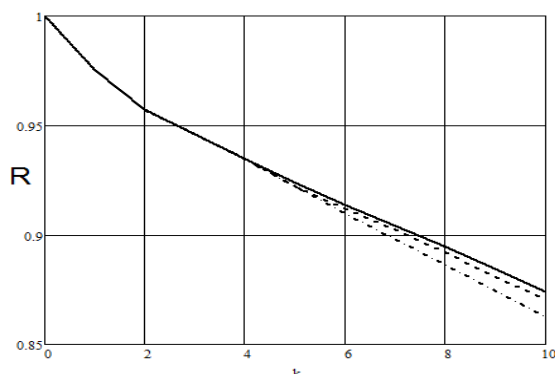
$$\rho_{10} = 0.998; \rho_{20} = -0.514; \rho_{30} = 0.43; \rho_{40} = -0.133; \quad \rho_{01} = 0.185; \rho_{11} = 0.152; \rho_{21} = -0.194; \rho_{31} = 0.142; \rho_{41} = -0.092;$$

$$\rho_{02} = -0.174; \rho_{12} = 0.309; \rho_{22} = -0.265; \rho_{32} = 0.217; \rho_{42} = -0.097; \rho_{03} = -0.048; \rho_{13} = 0.186; \rho_{23} = -0.205;$$

$$\rho_{33} = 0.153; \rho_{43} = -0.079; \rho_{04} = -0.122; \rho_{14} = 0.267; \rho_{24} = -0.242; \rho_{34} = 0.22; \rho_{44} = -0.102; \varepsilon = (\hat{R} - R)^2 = 0.014.$$

Анализ полученных значений дисперсий ошибок показывает, что применение модели с неразделимой КФ обеспечивает большую близость КФ. Это объясняется тем, что для такой модели было посчитано 24 корреляционных параметра, в то время как для модели с разделимой КФ всего 8. При этом обеспечивается достаточная близость КФ, особенно в окрестности около нуля. Поэтому целесообразно использовать такие модели для сокращения вычислительных затрат.

На рисунке 2 представлены сечения КФ для исходного изображения (сплошная линия), а также для СП с разделимой КФ (штрихпунктирная линия) и СП с неразделимой КФ (штриховая).



**Рисунок 2.** Сечения КФ исходного изображения и идентифицируемых моделей.

Анализ представленных кривых показывает, что с увеличением  $k$  начинает увеличиваться расхождение между реальной и имитируемой КФ. Добиться большей близости можно, повышая порядок АР, однако это приводит и к увеличению вычислительных затрат.

Аналогичные исследования были проведены еще на выборке, состоящей из 100 изображений. Анализ полученных результатов показывает, что применение неразделимых моделей в 85% случаев обеспечивает близость КФ в 10-15 раз больше, чем применение разделимых моделей. Однако в 15% случаев разделимые модели были удачно использованы для описания реального изображения, что позволило существенно сократить вычислительные затраты при их обработке.

## 6. Заключение

Был представлен краткий обзор методов идентификации параметров АР СП. Рассмотрены модели с кратными корнями и метод определения порядка модели на базе уравнений Юла-Уокера. Показано, что предложенный метод достаточно точно позволяет определить порядок модели для имитируемых изображений. Выполнен сравнительный анализ идентификации параметров моделей с разделимой и неразделимой КФ по реальному изображению. Анализ показал, что модели с неразделимой КФ требуют больше вычислительных затрат при одинаковом порядке, однако обеспечивают большую близость КФ.

## 7. Литература

- [1] Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В.А. Соифера. – М.: Физматлит, 2001. – 784 с.
- [2] Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
- [3] Васильев, К.К. Прикладная теория случайных процессов и полей / К.К. Васильев, Я.П. Драган, В.А. Казаков; под ред. К.К. Васильева, В.А. Омельченко. – Ульяновск: УлГТУ, 1995. – 256 с.
- [4] Глазов, Г.Н. Моделирование дискретных гауссовых случайных полей / Г.Н. Глазов, А.Г. Костевич // Интеллектуальные системы в управлении, конструировании и образовании. Вып. 2. – Томск: SST, 2002. – С. 19-27.
- [5] Васильев, К.К. Анализ авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений / К.К. Васильев, Н.А. Андриянов // Радиотехника. – 2017. – Т. 6. – С. 13-17.
- [6] Андриянов, Н.А. Применение авторегрессий с кратными корнями характеристических уравнений для представления и фильтрации изображений / Н.А. Андриянов, К.К. Васильев // Сборник трудов IV международной конференции и молодежной школы

- «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2018). – Самара: Новая техника, 2018. – С. 1023-1031.
- [7] Большаков, А.А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов: учебное пособие для вузов / А.А. Большаков, Р.Н. Каримов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 522 с.
- [8] Жданов, А.И. Идентификация по методу наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии при аддитивных ошибках измерений / А.И. Жданов, О.А. Кацюба // *АиТ*. – 1982. – Т. 43, № 2. – С. 29-38.
- [9] Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов / пер. с англ. И.Г. Журбенко, В.П. Носко; под ред. Ю.К. Беляева. – М.: Мир, 1976. – 755 с.
- [10] Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс; пер. с англ. А.Л. Левшина; под ред. В.Ф.Писаренко. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
- [11] Koreisha, S. A Comparison among Identification Procedures for Autoregressive Moving Average Models / S. Koreisha, G. Yoshimoto // *International Statistical Review. Revue Internationale de Statistique*. – 1991. – Vol. 59(1). – P. 37-57.
- [12] Lindberger, N.A. Computer identification of linear random process // *Intern. J. Control*. – 1974. – Vol. 19(6). – P.1021-1045.
- [13] Durbin, J. Efficient estimation of parameters in moving average models // *Biometrika*. – 1959. – Vol. 46(3-4). – P. 306-316.
- [14] Cleveland, W.S. The inverse autocorrelations of a time series and their applications // *Technometrics*. – 1972. – Vol. 14(2). – P.277-293.
- [15] Лукашин, Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: учебное пособие для вузов. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
- [16] Андриянов, Н.А. Проблема идентификации параметров авто-регрессий с кратными корнями / Н.А. Андриянов, Ю.А. Гаврилина // *Современные проблемы проектирования, производства и эксплуатации радиотехнических систем*. – 2017. – Т. 1-2, № 10. – С. 95-98.
- [17] Kittler, J. Determination of the model structure using pattern recognition techniques / J. Kittler, P.G. Whitehead // *Prepr. 4th IFAC Symp. Ident. Syst. Parameter Estimation (Part 3)*. – 1976. – P. 22-30.
- [18] Васильев, К.К. Статистический анализ изображений / К.К. Васильев, В.Р. Крашенинников. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – 214 с.

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Гранта РФФИ №17-01-00179.

# The solution for identifying the order and parameters of autoregression with multiple roots of characteristic equations

N.A. Andriyanov<sup>1,2</sup>, M.N. Sluzhiviyi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ulyanovsk State Technical University, Severny Venets street 32, Ulyanovsk, Russia, 432027

<sup>2</sup>Ulyanovsk Institute of Civil Aviation, Mozhaiskogo street 8/8, Ulyanovsk, Russia, 432071

**Abstract.** If we want to present a real image using a mathematical model, an important place is occupied by the task of identifying model parameters. In this case, the identification itself is easier to perform when a specific type of model is known. So the model used can be determined in advance. Therefore, in this paper, we do not consider the criteria for choosing models, but perform the identification of parameters for an autoregressive models especially autoregression with multiple roots of characteristics equations. This is due to the fact that the effectiveness of identification is verified by the images generated by this model. However, even with this approach, when the model is known, one must first determine the order of the model. Thus, on the basis of the Yul-Walker equations, an algorithm for determining the order of the model is investigated. Then, using the order obtained, the optimal parameters of the model are found. In this case, the proposed algorithm can be used when processing the real images.