

Система Лоренца. Модель водяного колеса с сухим трением

Е.А. Карпов¹, М.Е. Семенов¹, П.А. Мелешенко¹

¹Воронежский Государственный Университет, Университетская площадь 1, Воронеж, Россия, 394018

Аннотация. В настоящей работе исследована модель водяного колеса с сухим трением, описываемая модифицированной системой Лоренца. Исследуются динамические особенности этой системы в зависимости от параметра сухого трения, соответствующего моменту сухого трения. Даны достаточные условия для стабилизации модифицированной системы Лоренца в начало координат.

1. Введение

В 1963г. американский исследователь Эдвард Лоренц опубликовал в журнале «Journal of Atmospheric Science» знаменитую статью «Детерминированное непериодическое течение» [3]. В этой статье было показано, что относительно простая система с квадратичными нелинейностями трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, полученная при анализе задачи о конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости, может порождать чрезвычайно сложное поведение. Это открытие заложило основы теории детерминированного хаоса.

В указанной работе Лоренц изучал систему нелинейных дифференциальных уравнений, имеющую вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (1)$$

где переменные x , y и z имеют следующий физический смысл (в рамках модели конвективных процессов в подогреваемой снизу слое жидкости): x - величина пропорциональная скорости конвекции, y - величина пропорциональная разности температур между восходящими и нисходящими потоками, z - параметр, характеризующий степень отклонения вертикального температурного профиля от линейной зависимости. Параметры σ , r и b соответствуют числу Прандтля, числу Рэлея и коэффициенту, отражающему геометрию области конвективных процессов, соответственно.

Одной из особенностей, обнаруженных Лоренцем в ходе численных экспериментов, является чувствительность решений по отношению к малым изменениям начальных условий. В частности, с использованием стандартной итерационной процедуры было замечено, что с течением времени расхождение между решениями, отвечающими близким начальным условиям, возрастало с экспоненциальной скоростью (см. Рис. 1). В настоящее время такая

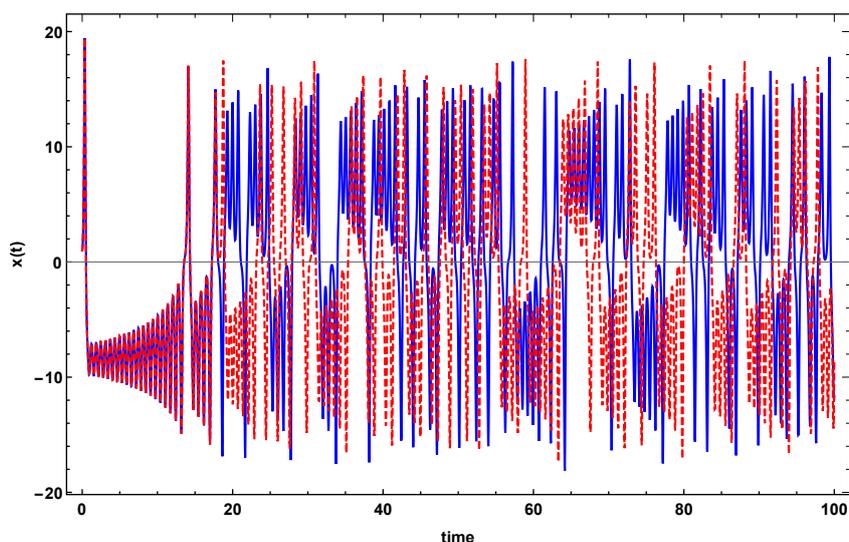


Рисунок 1. График зависимости траектории $x(t)$ в зависимости от начальных условий. Точки $(2.01, -2, 2)$ и $(2, -2, 2)$ соответствуют синей и красной траектории, соответственно.

существенная зависимость решений от начальных условий является одним из важных индикаторов хаотического поведения динамических характеристик нелинейных систем. Отметим, что хаотическое поведение различных физических систем наблюдалось многими исследователями. К таким системам относятся: одномодовый лазер [4], конвекция в трубке [5], диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением [5], химические реакции [6] и многие другие. Модель каждой из указанных систем в той или иной постановке сводится к системе уравнений (1). Из последних работ, посвященных исследованию динамики системы Лоренца, отметим [7, 8, 9].

Так в работе [7] исследовалась так называемая дробная система Лоренца, в которой производные по времени заменены на дробные производные. В частности, исследована адаптивная и неадаптивная синхронизации двух систем Лоренца, а также предложены стратегии управления, позволяющие уменьшить количество сигналов и контролируемых параметров на основе ряда ограничений. В работе [8] система Лоренца рассматривается, как основа для модели атмосферных возмущений. В частности, в рамках указанной работы определяется аналитическое выражение для динамической характеристики атмосферного возмущения. В работе [9] предлагается метод генерации последовательностей псевдослучайных чисел на основе обобщенной системы Лоренца. Показано, что исследуемые методы применимы для обеспечения криптологической безопасности.

В рамках представленной работы предлагается модификация системы Лоренца, позволяющая осуществлять управление хаотической динамикой такой системы на основе естественных физических процессов.

2. Модель водяного колеса с сухим трением.

Одной из реальных физических систем, описываемых уравнениями Лоренца, является модель водяного колеса. Эта система впервые была предложена и сконструирована американским ученым Малкусом и его коллегами в 1970-х годах.

Водяное колесо представляет собой набор чаш, имеющих отверстия на дне и находящихся на ободе колеса, сверху на чаши льется поток воды (см. Рис.2). В зависимости от скорости потока, изменяется характер движения колеса. Однако, как правило используется

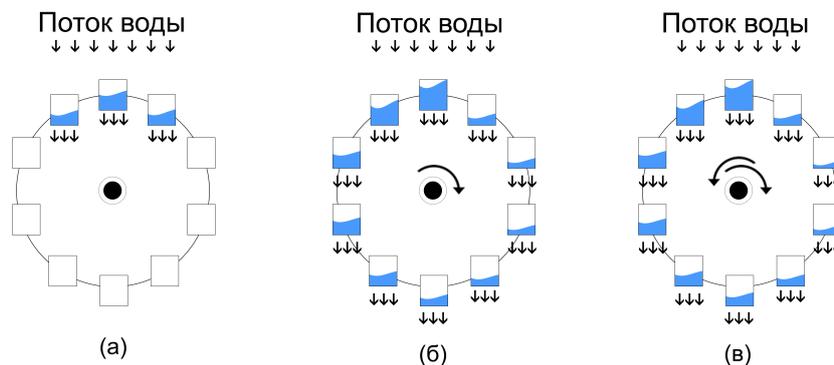


Рисунок 2. Модель водяного колеса. При малом потоке воды колесо остается в покое (а) - при большем вращается с постоянной скоростью (б) - при значительном (в) - вращается хаотически.

идеальная модель, не учитывающая сухое трение на ободе (например, см. [10, 11]), которое, очевидно, в реальности имеет место быть. Система уравнений, описывающая динамику водяного колеса с трением будут выглядеть следующим образом(подробный вывод уравнений, приводящих к системе (1) описан в [10]):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) - M_{df}\text{sign}(x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}, \tag{2}$$

где M_{df} - момент сухого трения.

3. Анализ модифицированной системы Лоренца

3.1. Исследование особых точек

Известно, что при исследовании динамики любой системы, описываемой дифференциальными уравнениями, особую роль играют стационарные решения, поэтому анализ модифицированной системы Лоренца-Малкуса (2) начнем с идентификации стационарных точек. Приравняв нулю правые части уравнений (2) и, решая соответствующую систему алгебраических уравнений, получим особые точки системы. В настоящем разделе приводятся лишь их численные значения, поскольку их явный вид достаточно громоздок. Для системы с параметрами $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3, M_{df} = 3$ стационарные точки имеют следующие координаты:

- (0, 0, 0)
- (8.642059263, 8.342059263, 27.03471396)
- (-8.330947618, -8.630947618, 26.9639896)
- (-0.011111644, -0.311111644, 0.001296360)
- (0.011111644, 0.311111644, 0.001296360)

Анализ полученных особых точек показал, что начало координат имеет тип устойчивый узел (в отличие от классической системы Лоренца, где начало координат есть седло), вторая и третья неустойчивые фокусы, а четвертая и пятая - являются седло-узлами.

3.2. Показатели Ляпунова

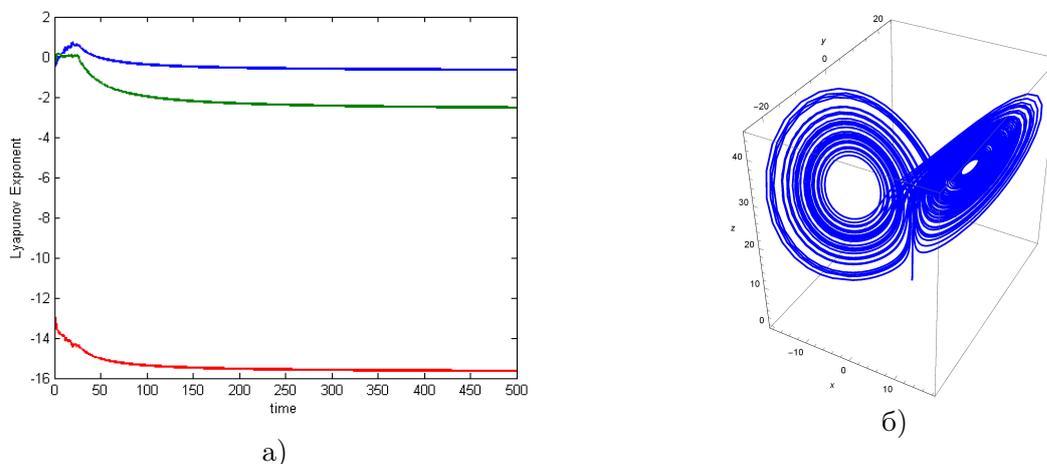


Рисунок 3. (а) - Спектр Ляпуновских показателей (старшему показателю соответствует синяя кривая) для модифицированной системы, (б) - Фазовый портрет модифицированной системы. Параметры модифицированной системы: $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, $M_{df} = 3$.

Известно, что наличие или отсутствие хаотического поведения у системы тесно связано с понятием неустойчивости. Одним из методов, связанных с идентификацией устойчивости системы, является метод показателей Ляпунова. Для вычисления спектра ляпуновских показателей в настоящей работе использовалась стандартная процедура ортогонализации Грамма-Шмидта совместно с известным алгоритмом Вольфа (детали см. в [12]). Анализ спектра ляпуновских показателей для модифицированной системы (2) с параметрами $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, $M_{df} = 3$ показал, что с течением времени происходит стабилизация системы. На Рис. 3.2 продемонстрирована динамика изменения спектра ляпуновских показателей.

3.3. Бифуркационные диаграммы

Бифуркационная диаграмма является мощным инструментом для анализа систем, демонстрирующих хаотическую динамику. В настоящей работе для модифицированной системы строилась не классическая бифуркационная диаграмма, а ее склеенные фрагменты. Это было сделано исходя из того, что решение системы из некоторых начальных условий достаточно быстро приходит в ноль и построение прекращается, поэтому приходилось учитывать тот факт, что при попадании изображающей точки в притягивающую область нулевого решения система оказывалась в области нулевой динамики (в следствие чего, на бифуркационных диаграммах видно множество точек, соответствующих нулевому значению x). Для модифицированной системы Лоренца с кулоновским трением переход к хаосу начинается несколько раньше, чем в классической системе Лоренца, что можно видеть на Рис. 3.3 (а), (б). При больших r переход к хаотической динамике происходит по сценарию удвоения периода (с уменьшением параметра r).

4. Заключение

В настоящей работе исследовалась динамика модели водяного колеса, описываемого модифицированной системой Лоренца с учетом сухого трения на ободе. Оказалось, что начало координат для рассматриваемой системы является устойчивой неподвижной точкой. При этом замечено, что в течении начального времени система демонстрирует хаотическое

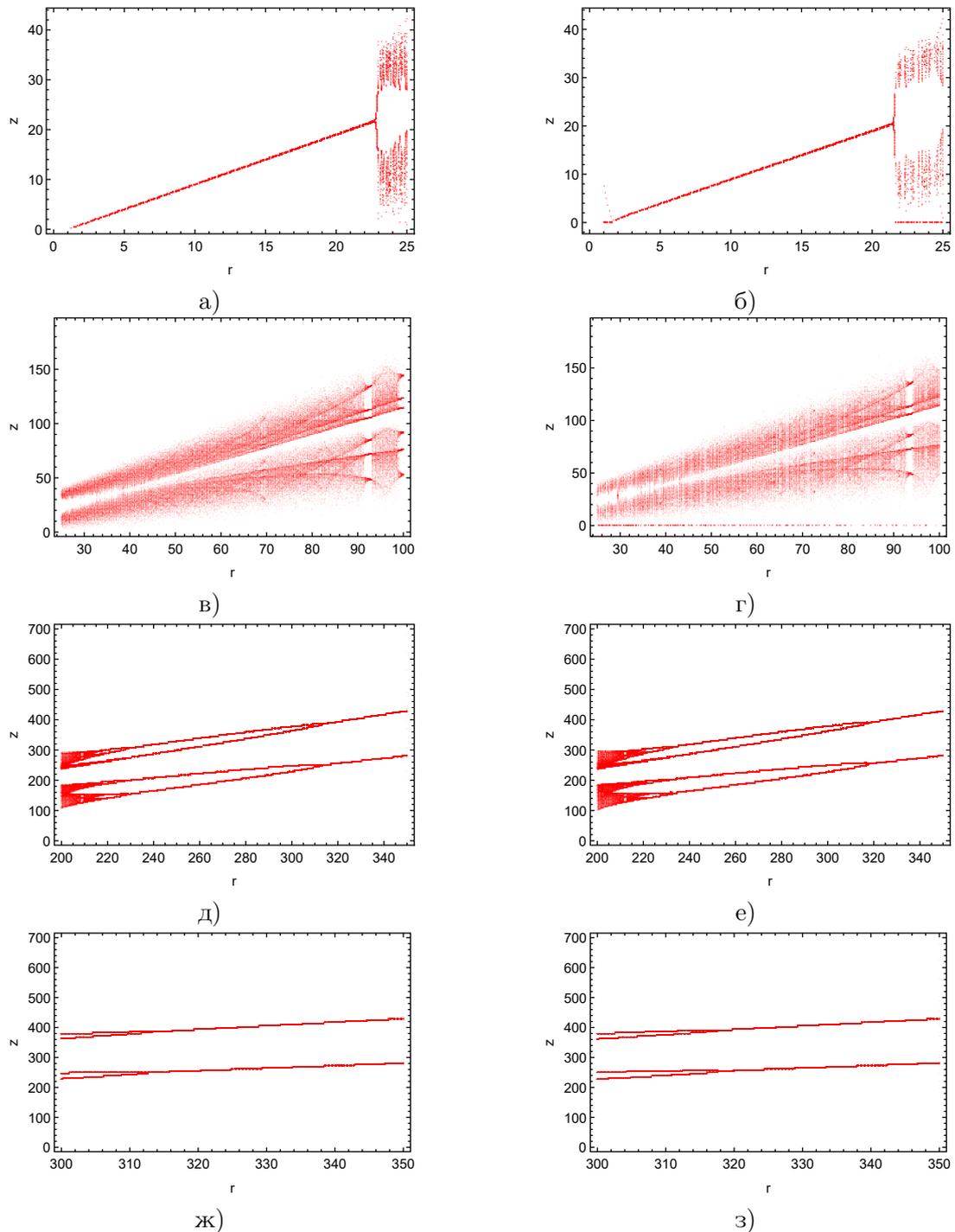


Рисунок 4. Бифуркационная диаграмма при изменении параметра r . (а), (в), (д), (ж) - Классическая система Лоренца, (б), (г), (е), (з) - Модифицированная система Лоренца с моментом $M_{df} = 3$

поведение (старший показатель Ляпунова положительный). Также в работе исследованы и классифицированы неподвижные точки модифицированной системы Лоренца, построены бифуркационные диаграммы, установлены общие свойства и принципиальные отличия модифицированной и классической систем Лоренца.

5. Литература

- [1] Лоскутов, А.Ю. Очарование хаоса // УФН. – 2010. - Т. 180. - С. 1305-1329.
- [2] Кузнецов, С.П. Динамический хаос (курс лекций). - М: Физматлит, 2006. - С. 356.
- [3] Lorenz, E. Deterministic non-periodic flows // Journal of Atmospheric Sciences. - 1963. - Vol. 20. - P. 130-141.
- [4] Haken, H. Laser Light Dyhamics // North Holland, 1985. - P. 336.
- [5] Заславский, Г.М. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса / Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев //Наука, 1988. - С. 368.
- [6] Field, R.J. Oscillations and traveling waves in chemical systems / R.J. Field, M. Burger // Wiley-Interscience, 1985. - P. 681.
- [7] Xiang-Jun, W. Chaos in the fractional-order Lorenz system / W. Xiang-Jun, S. Shi-Lei // International Journal of Computer Mathematics. - 2009. - Vol. 86(7). - P. 1274-1282.
- [8] Zhang, Y. Improved wind prediction based on the Lorenz system / Y. Zhang, J. Yang, K. Wang, Z. Wang, Y. Wang // Renewable Energy. - 2015. - Vol. 81 - P. 219-226.
- [9] Lynnyk, V. Pseudo random number generator based on the generalized Lorenz chaotic system / V. Lynnyk, N. Sakamoto, S. Celikovskiy // 4th IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems. - 2015. - Vol. 48(18). - P. 257-261.
- [10] Illing, L. Experiments with a Malkus-Lorenz water wheel: Chaos and synchronization / L. Illing, R.F. Fordyce, A.M. Saunders, R. Ormond // American Journal Of Physics. - 2012. - Vol. 80. - P. 192-202.
- [11] Matson, L.E. The Malkus-Lorenz water wheel revisited // American Journal of Physics. - 2007. - Vol. 75. - P. 1114-1122.
- [12] Wolf, A. Determining Lyapunov exponents from a time-series / A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano // Physica D: Nonlinear Phenomena. - 1985. - Vol. 16(3). - P. 285-317.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты No. 17-01-00251, No. 18-08-00053, No. 19-08-00158).

Lorenz system. Water wheel model with dry friction

Е.А. Карпов¹, М.Е. Семенов¹, П.А. Мелешенко¹

¹Voronezh State University, Universitetskaya pl. 1, Voronezh, Russia, 394018

Abstract. In this paper, a model of a water wheel with dry friction, described by a modified Lorenz system, investigated. The dynamic features of this system are investigated depending on the dry friction parameter corresponding to the moment of dry friction. Shown that the modified Lorenz system stabilize at the origin what proved by high Lyapunov exponent.