Система синус-Гордона с гистерезисной нелинейностью

П.А. Мелешенко[1,2], О.О. Решетова[1], А.В. Толкачев[1]

[1]Воронежский государственный университет, Университетская площадь 1, Воронеж, Россия, 394018

[2]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», ул. Старых Большевиков 54 «А», Воронеж, Россия, 394064

Аннотация. В работе рассматривается нелинейная динамическая система, представляющая собой набор нелинейных осцилляторов, связанных пружинами (система синус-Гордон) с гистерезисными блоками (гистерезисная нелинейность рассматривается в рамках модели Бука-Вена). В частности, исследуются волновые процессы (солитонные возбуждения) с учетом гистерезисной природы связи между отдельными элементами системы.

1. Введение

Колебательные процессы, в силу их универсальности, имеют широкое распространение в различных областях как фундаментальной, так и прикладной науки. В связи с чем, теория колебаний, изучающая осцилляции, протекающие в системах самой различной природы, является интенсивно развивающимся направлением современной математики и физики [1, 2, 3, 4]. При этом основными эталонными моделями теории колебаний являются такие объекты как линейный и нелинейный осцилляторы, ротаторы и пр., которые широко используются при моделировании физических процессов в различных реальных системах.

Однако, известно, что новые закономерности колебательных процессов появляются в том случае, когда имеет место большое количество взаимодействующих подсистем. Общепризнанным эталоном в этом смысле является конечные и бесконечные цепочки связанных (взаимодействующих) осцилляторов. С прикладной точки зрения наиболее широкое распространение получили радиотехнические цепочки, которые используют как фильтры для выделения или подавления сигналов с частотами, лежащими в определенной полосе частот. С фундаментальной точки зрения цепочки осцилляторов являются наиболее широко используемыми моделями сред, в которых могут существовать колебания и волны с заданными свойствами [5, 6, 7]. Колебательные процессы большого числа подобных элементов называют волнами. Волновые явления широко распространены в природе: это волны на поверхности жидкости, звук в газе, волны сжатия-растяжения в твердом теле, колебания струны и мембраны, электромагнитные волны и т.д.

Отметим, что, наряду с нелинейными колебаниями существуют и нелинейные волны, поведение которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. В рамках теории нелинейных волн существуют свои эталонные модели, подобные эталонным моделям теории колебаний. Среди них - простые волны, ударные волны, а также уединенные волны - солитоны, исследования которых в настоящее время играют значительную роль в теории нелинейных процессов. Одной из базовых моделей для исследования нелинейных процессов является модель синус-Гордона (физическая реализация которой представляет собой цепочку нелинейных осцилляторов связанных пружинами) [8].

Еще одним из примеров сильно нелинейных систем, играющих значительную роль в современных исследованиях, является гистерезис. Гистерезисное поведение свойственно как для характеристик веществ (сегнетоэлектрики, ферромагнетики и т.д.), так и для динамики множества механических систем (люфт, упор и т.д.). Причем в механических системах гистерезисные нелинейности возникают вследствие старения материала и должны быть учтены на уровне моделирования динамики соответствующих систем. Учет гистерезиса в таких системах приводит к исследованию нелинейных операторно-дифференциальных уравнений, что представляет отдельную, сложную задачу.

Целью настоящей работы является исследование динамики колебательной системы со многими степенями свободы в условиях гистерезисной связи между отдельными звеньями такой системы. Именно, рассматривается модель синус-Гордона в случае, когда связи между маятниками содержит гистерезисную нелинейность. На основе численного моделирования изучается динамика солитоно-подобного образования.

2. Модель Боука-Вена

Зависимости гистерезисного типа определяются входно-выходными соответствиями, в которых выход зависит не только от мгновенного значения входа, но и от его поведения в предшествующие моменты времени (явление эридитарности). Математические модели механических свойств многих строительных материалов, таких как железобетон, сталь, дерево, а также демпфирующие материалы, обычно включают нелинейный гистерезисный механизм, учитывающий восстанавливающие свойства указанных структур.

Номенклатура математических моделей явлений гистерезисного типа чрезвычайно разнообразна и включает в себя как конструктивные модели (люфты, упоры, неидеальные реле, а также их континуальные аналоги - модели Ишлинского, Прейзаха [9]), так и феноменологические модели (S-преобразователь, модель Дьюэма и т.д. [10]). В настоящей работе предлагается феноменологический подход к описанию гистерезисной нелинейности на основе модели Боука-Вена [10, 11]. Вкратце перечислим основные положения указанной модели.

Модель Боука-Вена может быть представлена в виде отображения $x(t) \to \Phi_s(x)(t)$ и формализует гистерезисную зависимость посредством следующих соотношений:

$$\Phi_{BW}(x,t) = \alpha k x(t) + (1-\alpha) D k z(t), \tag{1}$$

$$\dot{z} = D^{-1}(A\dot{x} - \beta|\dot{x}||z|^{n-1}z - \gamma\dot{x}|z|^n), \tag{2}$$

где $\dot{z}$ обозначает производную по времени, а $n \geq 1, D > 0, k > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Эта модель была первоначально разработана в контексте исследований механических систем, в которых x является смещением, а Φ_s является восстанавливающей силой. Гистерезисная сила $\Phi_s(x)(t)$ представляет собой суперпозицию из упругой $\alpha k x$ и гистерезисной составляющей $(1-\alpha)kDz$, где $D > 0$ и $\alpha \in (0,1)$. Гистерезисная часть включает в себя безразмерную переменную z, которая является решением нелинейного дифференциального уравнения первого порядка (2). В этом уравнении A, β и γ безразмерные параметры, которые определяют форму и размер петли гистерезиса (в частности, параметр β определяет раствор люфта), а n - скалярная величина, регулирующая гладкость перехода от упругого отклика к пластичному отклику. Модель Боука-Вена способна в аналитическом виде описывать различные формы гистерезисных циклов, которые отвечают поведению широкого класса гистерезисных систем [10, 11].

3. Модель синус-Гордона с гистерезисной нелинейностью

Наиболее известными и хорошо исследованными уравнениями математической физики являются уравнения, описывающие распространение волн в линейной среде. Для нелинейной среды, обладающей, к тому же, гистерезисными свойствами готовые методы решения таких уравнений отсутствуют.

Одним из интересных результатов, следующих из анализа процессов распространения волн в нелинейных средах, является солитонное решение - уединенная волна, обладающая свойствами частицы. Одной из моделей, имеющей солитонное решение является система синус-Гордона – цепочка нелинейных маятников с упругими связями.

Ниже рассматривается механическая система с гистерезисными связями, физическая модель которой показана на рисунке 1. Она представляет собой цепочку одинаковых маятников, нанизанных на струну и связанных пружинами. Принципиальное отличие рассматриваемой механической системы состоит в том, что в связь между двумя соседними маятниками включена гистерезисная нелинейность типа люфт. Отметим, что указанная система представляет собой модификацию системы синус-Гордона [12].

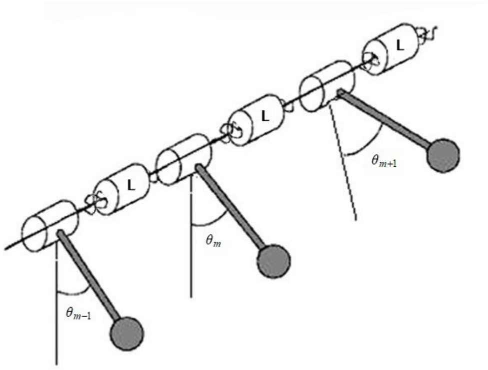


Рисунок 1. Система синус-Гордона с гистерезисными связями

Пусть μ масса маятника, его момент инерции - I, длина - l, постоянная кручения пружины - κ и расстояние между маятниками - d. При отклонении m-го маятника из положения равновесия на угол θ_m на маятник действует момент силы тяжести $M_{\mathrm{g}} = -\mu g l \sin\theta_m$ и момент силы кручения со стороны соседних пружин: $M_m^+ = -\kappa(\theta_m - \theta_{m+1})$ и $M_m^- = -\kappa(\theta_m - \theta_{m-1})$, соответственно. Поскольку в систему включена гистерезисная нелинейность, то можем записать следующим образом: $L[M_m^+] = L[-\kappa(\theta_m - \theta_{m+1})]$ и $L[M_m^-] = L[-\kappa(\theta_m - \theta_{m-1})]$, где $L[\cdot]$ - оператор люфта [9]. Тогда уравнение движения маятника примет вид

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta_m}{\mathrm{d}t^2} = -\mu g l \sin\theta_m + L[-\kappa(\theta_m - \theta_{m+1})] + L[-\kappa(\theta_m - \theta_{m-1})]. \qquad (3)$$

Введем обозначение $\omega_0^2 = \frac{\mu g l}{I}$, тогда

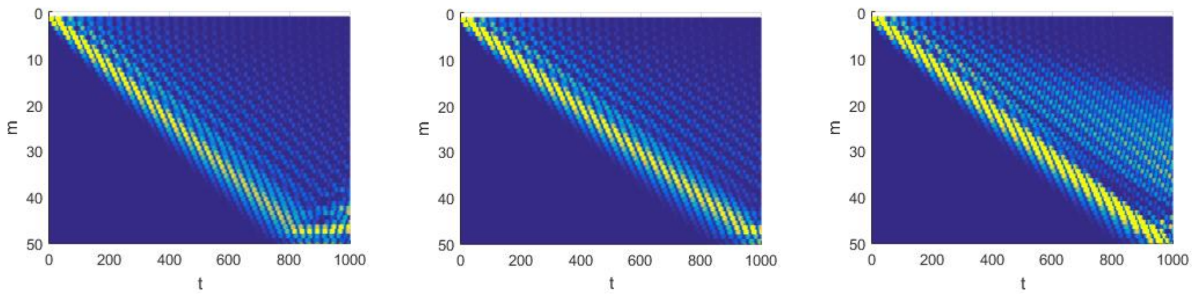
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta_m}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{I}\left(L[-\kappa(\theta_m - \theta_{m+1})] + L[-\kappa(\theta_m - \theta_{m-1})]\right) + \omega_0^2 \sin\theta_m = 0. \qquad (4)$$

4. Численные результаты моделирования

Известно, что операторная трактовка гистерезисной нелинейности подразумевает негладкость соответствующего оператора. Поэтому для численного моделирования указанной системы используем гладкую аппроксимацию люфта в рамках модели Боука-Вена. В таком случае система синус-Гордона с гистерезисной нелинейностью примет следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\theta_m}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 \sin\theta_m - \alpha\kappa(\theta_m - \theta_{m+1}) + (1-\alpha)D\kappa z_m^+(t) - \alpha\kappa(\theta_m - \theta_{m-1}) + (1-\alpha)D\kappa z_m^-(t), \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}z_m^+}{\mathrm{d}t} = D^{-1}(A(\dot\theta_m - \dot\theta_{m+1}) - \beta|(\dot\theta_m - \dot\theta_{m+1})||z_m^+|^{n-1}z_m^+ - \gamma(\dot\theta_m - \dot\theta_{m+1})|z_m^+|^n), \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}z_m^-}{\mathrm{d}t} = D^{-1}(A(\dot\theta_m - \dot\theta_{m-1}) - \beta|(\dot\theta_m - \dot\theta_{m-1})||z_m^-|^{n-1}z_m^- - \gamma(\dot\theta_m - \dot\theta_{m-1})|z_m^-|^n). \end{cases} \tag{5}$$

На основании вышеприведенной системы (5) обыкновенных дифференциальных уравнений возможно провести численное моделирование, результаты которого представлены на рисунке 2. На изображении представлена динамика солитона от одного края цепочки



а) б) в)

Рисунок 2. Динамика солитона а) без гистерезисной нелинейности б) с малым значением раствора люфта в) с большим значением раствора люфта

к другому. Система состоит из $m = 50$ осцилляторов. На осях представлены число осцилляторов m (ось ординат), а также отсчеты модельного времени t (ось абсцисс). Из рисунка видно, что в первом случае, когда рассматривалась система синус-Гордона без гистерезисной нелинейности, солитон обладает большей скоростью, так как волна доходит до края решетки гораздо раньше. Во втором случае (панель б) рассматривалась система с малым значением раствора люфта ($\beta = 0.5$). При таком условии солитон двигается медленнее, чем в первом варианте. А в последнем случае система обладает большим значением раствора люфте ($\beta = 45$). При таком условии солитон двигается немного быстрее, чем во втором варианте. Отметим также, что при изменении параметра раствора динамическим образом меняется форма солитона (вплоть до разрушения при достаточно больших значениях раствора люфта, а также при соответствующем времени моделирования). Таким образом, можно сделать вывод о влиянии гистерезисной нелинейности на динамические характеристики солитона в рассматриваемой системе (скорость распространения, форма).

5. Заключение

В настоящей работе была исследована динамика колебательной системы со многими степенями свободы в условиях гистерезисной связи между отдельными звеньями. Рассматривалась модификация модели системы синус-Гордона в случае, когда связи между маятниками содержали гистерезисную нелинейность. На основе численного моделирования была исследована динамика солитонного решения в указанной системе при различных параметрах гистерезисной нелинейности.

6. Литература

[1] Lichtenberg, A.J. Dynamics of Oscillator Chains / A.J. Lichtenberg, R. Livi, M. Pettini, S. Ruffo // Lect. Notes. Phys. — 2008. — Vol. 728. — P. 21–121.
[2] Torre, C.G. Linear Chain of Coupled Oscillators / C.G. Torre // Foundations of Wave Phenomena. — 2014. — Vol.19 . — P. 27–38.
[3] Sieber, J. Stability of a chain of phase oscillators / J. Sieber, T. Kalmar-Nagy // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 84. — P. 016227(1–6).
[4] Semenov, M.E. Coupled inverted pendulums: stabilization problem / M.E. Semenov, A.M. Solovyov, M.A. Popov, P.A. Meleshenko // Arch. Appl. Mech. — 2017. — Vol. 87. DOI: 10.1007/s00419-1323-0.
[5] Скотт, Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Э. Скотт. — Москва: Советское радио, 977. — 368 с.
[6] Трубецков, Д.И. Линейные колебания и волны / Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев. — Москва: Издательство физико-математической литературы, 2001. — 419 с.
[7] Хакен, Х. Квантополевая теория твердого тела / Х. Хакен. — Москва: Наука, 1980. — 344 с.
[8] Скотт, Э. Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур. / Э. Скотт. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 560 с.
[9] Красносельский, М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. — Москва: Наука, 1983. — 272 с.
[10] Ikhouane, F. On the Hysteretic Bouc-Wen Model. Part I: Forced Limit Cycle Characterization / F. Ikhouane, Rodellar // Nonlinear Dynamics. — 2005. — Vol. 42. — P. 63–78.
[11] Charalampakis, A.E. The response and dissipated energy of Bouc-Wen hysteretic model revisited / A.E. Charalampakis // Archive of Applied Mechanics. — 2015. — Vol. 85. — P. 1209–1223.
[12] Scott, A.C. A nonlinear Klein-Gordon equation / A.C. Scott // Am. J. Phys. — 1969. — Vol. 37. — P. 52–61.

Sine-Gordon system with hysteretic nonlinearity

P.A. Meleshenko[1,2], **O.O. Reshetova**[1], **A.V. Tolkachev**[1]

[1]Voronezh state university, Universietskaya sq. 1, Voronezh, Russia, 394018
[2]The military educational and scientific center of the Air Force «The Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin», Starykh Bolshevikov 54 «A», Voronezh, Russia, 394064

Abstract. In this work we consider a nonlinear dynamical system wich is a set of nonlinear oscillators coupled by strings (sine-Gordon system) with hysteretic blocks (the hystertic nonlinearity is modelled by a Bouc-Wen model). In particular, the wave processes (the solitonic waves) in such a system are investigated taking into account the hysteretic nature of the coupling.

Keywords: Sine-Gordon model, Hysteresis, Bouc-Wen model.