

Сравнение низкочастотного фильтра Баттерворта с радиально-симметричным SE-фильтром

К.С. Медведева¹, Г.С. Бердников¹

¹ Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, Россия, 410012

Аннотация. В статье проводится сравнительный анализ двух фильтров — фильтра Баттерворта и радиально-симметричного SE-фильтра, с целью определения их достоинств и недостатков. Помимо визуальной оценки качества проводятся эксперименты с метрикой PSNR (peak signal-to-noise ratio - пиковое соотношение сигнал/шум). Результаты опытных исследований показали, что радиально-симметричный фильтр лучшим образом восстанавливает изображения посредством настройки небольшого числа параметров непрерывной функции, на которые первоначально вносились искажения низкочастотным фильтром Гаусса.

1. Введение

Из-за несовершенства формирующих и регистрирующих систем записанное ими изображение представляет собой искаженную (нечеткую) копию оригинала. Основными причинами искажений, приводящих к ухудшению четкости, являются ограниченная разрешающая способность формирующей системы, расфокусировка, наличие искажающей среды (например, атмосферы), движение камеры по отношению к регистрируемому объекту и т.п. Устранение или ослабление искажений с целью повышения резкости относится к задаче восстановления изображений.

Для фильтрации сигналов в электросвязи, системах автоматического управления, измерительной технике, системах обработки сигналов и т.д. широко используются фильтры различных принципов действия с различными характеристиками. В зависимости от диапазона частот, относящихся к полосе пропускания и полосе подавления, различают режекторные, полосовые, высокочастотные, низкочастотные фильтры. Также применяются всепропускающие фильтры, которые обладают постоянной амплитудно-частотной характеристикой на требуемом диапазоне частот, при этом их фазочастотная характеристика представляет собой заданную функцию частоты [1].

Простейшим способом восстановления четкости изображения является обработка наблюдаемого изображения в пространственно-частотной области инверсным фильтром [2]. К недостаткам данного фильтра можно отнести возникновение краевых эффектов, которые проявляются в виде осциллирующей помехи большой мощности, полностью маскирующей восстановленное изображение. Краевые эффекты могут наблюдаться даже при отсутствии шума. Но основная проблема в использовании инверсного фильтра состоит в том, что соответствующая передаточная функция может иметь полюса близкие к нулю.

В данной работе будет рассмотрено два частотных фильтра — это фильтр Баттерворта и радиально-симметричный SE-фильтр [3]. Посредством экспериментов будет произведен их сравнительный анализ с целью выявления их преимуществ и недостатков.

В [3] предлагается технология синтеза КИХ-фильтра, в которой вместо определения самих отсчетов импульсного отклика осуществляется идентификация параметров непрерывной функции, аппроксимирующей импульсный отклик. При этом зависящее от небольшого числа параметров параметрическое семейство аппроксимирующих функций задается с учетом желаемых частотных характеристик КИХ-фильтров, предназначенных для коррекции искажений.

Выбор фильтра Баттерворта обусловлен следующими причинами. Амплитудночастотная характеристика (АЧХ) данного фильтра является максимально гладкой на частотах полосы пропускания и снижается практически до нуля на частотах полосы подавления. Фильтр Баттерворта — единственный из фильтров, который сохраняет форму АЧХ для более высоких порядков (за исключением более крутого спада характеристики на полосе подавления), тогда как многие другие разновидности фильтров (фильтр Чебышева, фильтр Бесселя, эллиптический фильтр) имеют различные формы АЧХ при различных порядках. В [3] проводилось сравнение радиально-симметричного фильтра с фильтром Винера. В данной работе рассмотрим результаты эксперимента по сравнению радиально-симметричного фильтра с низкочастотным фильтром Баттерворта.

2. Постановка задачи

Передаточная функция низкочастотного фильтра Баттерворта (БФНЧ) порядка n с частотой среза на расстоянии D_0 от начала координат задается формулой [4]

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}, \quad (1)$$

где расстояние $D(u, v)$ задано формулой

$$D(u, v) = \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

Передаточная функция БФНЧ не имеет разрыва, который устанавливает точную границу между пропускаемыми и обрезаемыми частотами. Для фильтров с гладкой передаточной функцией обычной практикой является определение местоположения обрезающих частот как множества точек, в которых значения функции $H(u, v)$ становятся меньше некоторой части ее максимального значения. В случае функции Баттерворта при $H(u, v) = 0,5$ (меньше 50% максимального значения, равного 1) при $D(u, v) = D_0$.

Фильтр Баттерворта характеризуется порядком фильтрации — параметром, определяющим крутизну передаточной функции фильтра. При малых значениях порядка фильтра передаточная функция имеет гладкую форму, близкую по форме к передаточной характеристике гауссова фильтра; при высоких значениях фильтр характеризуется крутой передаточной функцией и приближается по форме к характеристикам идеального фильтра.

К преимуществам низкочастотных фильтров Баттерворта относится меньшее проявление нежелательных эффектов размытия и появления ложных контуров по сравнению с идеальными низкочастотными фильтрами. С увеличением порядка низкочастотного фильтра Баттерворта возрастает проявление эффектов размытия.

Представляет интерес эксперимент по сравнению фильтра Баттерворта с радиально-симметричным SE-фильтром. В данной работе строился КИХ-фильтр с нулевой фазой, то есть с чисто вещественным частотным откликом [2, 5]. Значит опорная область будет являться квадратом $N \times N$ со стороной N и центром в точке с координатами $k_1 = 0, k_2 = 0, N$ — нечетно и $N_1 = N_2 = N$.

Фильтр имеет опорную область D :

$$\{D(n_1, n_2) : 0 \leq n_1 < N_1, 0 \leq n_2 < N_2\}. \quad (3)$$

Отсчеты изображения $y(n_1, n_2)$, восстановленного с помощью КИХ-фильтра, можно определить по отсчетам $x(n_1, n_2) \in D$ искаженного изображения в соответствии с соотношением:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} h(k_1, k_2) x(n_1 - k_1, n_2 - k_2), \quad (4)$$

где $h(k_1, k_2)$ – двумерная импульсная характеристика.

Для описания одномерного частотного отклика в радиальном направлении воспользуемся моделью QEFR-фильтра [9]:

$$S(\omega) = \begin{cases} a\omega^2, & \text{при } |\omega| \leq \omega^*, \\ e^{-c|\omega|}, & \text{при } |\omega| > \omega^*, \end{cases} \quad (5)$$

$$S(\omega^*) = a\omega^{*2} = e^{-c\omega^*} \quad (6)$$

Аппроксимирующая функция радиально-симметричного SE-фильтра выглядит следующим образом:

$$h(r) = \frac{e^{-c\omega^*}}{\pi} \left[\frac{\sin \omega^* r}{r} + \frac{2 \cos \omega^* r}{r^2 \omega^*} - \frac{2 \sin \omega^* r}{r^3 \omega^{*2}} + \frac{(c \cos(\omega^* r) - r \sin(\omega^* r))}{c^2 + r^2} \right] \quad (7)$$

Из (7) видно, что аппроксимация импульсного отклика $h(r)$ сводится к настройке двух параметров: ω^* и c . Параметр ω^* — это абсцисса максимального значения частотной характеристики КИХ-фильтра. Параметр c характеризует степень присутствия высоких частот в восстановленном изображении.

К преимуществам данной технологии построения КИХ-фильтров можно отнести возможность достижения высокого качества восстановления изображений путем настройки небольшого числа параметров непрерывной функции, аппроксимирующей импульсный отклик, соответствующий заданному частотному отклику.

3. Результаты экспериментов

В фильтре Баттерворта помимо расстояния D_0 за пределами которого удаляются все высокочастотные составляющие фурье-образа, которое задано от 0 до 256, дополнительно задается порядок фильтрации от 0 до 20.

Настройка параметров фильтров осуществлялась с использованием тестового изображения «Лена», которое приведено на рисунке 1.



Рисунок 1. Тестовый рисунок «Лена».

Далее исходное изображение подвергалось искажениям путем моделирования фильтра Гаусса нижних частот для нескольких вариантов задания σ . Степень размытия была задана при $\sigma = 3$ и $\sigma = 5$. На рисунке 2 (а) и (б) представлено тестовое изображение «Лена» после внесения искажений с заданными параметрами.

В данной работе используется метрика PSNR (peak signal-to-noise ratio - пиковое соотношение сигнал/шум), которая определяется формулой:

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{MAX_I^2}{MSE} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}} \right),$$

где MSE (англ. mean square error) -

среднеквадратичная ошибка, MAX_I – это максимальное значение, принимаемое пикселем изображения.

В работе [3] были получены следующие результаты. Метрикой PSNR оценивались результаты на тестовом изображении «Лена». Максимальные значения PSNR составили 30,41 при $\sigma = 3$ и 27,18 при $\sigma = 5$. Для следующего эксперимента тестовое изображение подвергалось искажениям с интенсивностью размытия $\sigma = 3$. Дополнительно на изображение "накладывался" шум в диапазоне от 20 до 50 дб. Далее в зависимости от значений опорной области производились сравнения по метрике PSNR. При размере опорной области $N = 5$ был получен лучший результат 29,92. При увеличении опорной области показатели метрики постепенно уменьшались. При $N = 13$ они уже составляли 26,66.

В таблице 1. приведены результаты эксперимента с фильтром Баттерворта. Изображение первоначально было зашумлено фильтром Гаусса нижних частот. Рассматривается два варианта с разной степенью размытия: $\sigma = 3$ и $\sigma = 5$. Во втором столбце записывается размер опорной области N , в третьем — значения расстояния D_0 за пределами которого удаляются все высокочастотные составляющие фурье-образа, которые могут быть заданы от 0 до 256. В столбце n указан порядок фильтрации, который варьируется от 0 до 20, размер опорной области N . В последнем столбце приведены результаты метрики PSNR.

В таблице 1. приведены результаты эксперимента с фильтром Баттерворта и степенью размытия $\sigma = 3,5$. При $\sigma = 3$ максимальный результат достигается при фильтрации с частотой среза равной 170 и порядком фильтрации равным 10. При одинаковой частоте среза, но с различными порядками фильтрации показатель метрики PSNR изменяется. При степени размытия $\sigma = 5$ наилучший результат достигается при частоте среза равной 170 и порядком фильтрации равном 5.

Таблица 1. PSNR с шумами на изображении "Лена" при $\sigma = 3,5$ отфильтрованное фильтром Баттерворта

| | | N | D0 | n | PSNR | | | N | D0 | n | PSNR |
|-----------|---|----|-----|-------|--------------|-----------|----|----|-------|----|--------------|
| sigma = 3 | | 3 | 256 | 20 | 25,02 | sigma = 5 | | 3 | 256 | 20 | 26,29 |
| | | 5 | 230 | 15 | 26,16 | | | 5 | 230 | 15 | 24,88 |
| | | 3 | 200 | 10 | 26,14 | | | 3 | 200 | 10 | 24,94 |
| | | 5 | 170 | 5 | 26,22 | | | 5 | 170 | 5 | 26,45 |
| | | 3 | 170 | 10 | 28,38 | | | 3 | 170 | 10 | 26,44 |
| | | 5 | 170 | 15 | 28,25 | | | 5 | 170 | 15 | 26,43 |
| | | 3 | 150 | 1 | 26,21 | | | 3 | 150 | 1 | 26,18 |
| | | 5 | 100 | 20 | 26,19 | | | 5 | 100 | 20 | 25,71 |
| | 3 | 50 | 10 | 25,99 | | 3 | 50 | 10 | 26,01 | | |
| | 5 | 20 | 5 | 25,55 | | 5 | 20 | 5 | 24,64 | | |

На рисунке 3 приведены отфильтрованные изображения с максимальными показателями PSNR. Рисунок 3 (а) демонстрирует результаты работы радиально-симметричного фильтра при степени размытия $\sigma = 3$. На рисунке 3 (б) представлены результаты при степени размытия $\sigma = 5$. На рисунке 4 представлены результаты эксперимента с фильтром Баттерворта.

Сложности в использовании фильтра Баттерворта заключаются в том, что приходится самостоятельно подбирать частоту среза и порядок фильтрации. Выбор неоптимальных значений данных может привести к значительным искажениям фильтруемого изображения. Например, если взять слишком малое значение частоты среза, то большинство мелких деталей, представляющих интерес, будут устранены. И наоборот, если выбираются большие значения, то обработанное изображение будет незначительно отличаться от тестового, а уровень шума понизится несущественно.

С увеличением порядка низкочастотного фильтра Баттерворта возрастает проявление нежелательных эффектов размытия. Кроме того, при очень малых значениях частоты среза на отфильтрованных изображениях может появиться так называемый эффект «звона» или эффект Гиббса. Он выражается в возникновении ложных контуров вокруг реальных.

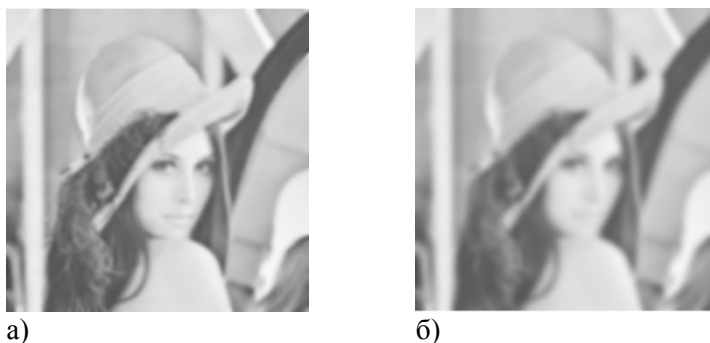


Рисунок 2. Изображение «Лена»: искаженные с размытием а) $\sigma = 3$, б) $\sigma = 5$.



Рисунок 3. Отфильтрованное изображение «Лена» радиально-симметричным SE-фильтром с размытием а) $\sigma = 3$, б) $\sigma = 5$.

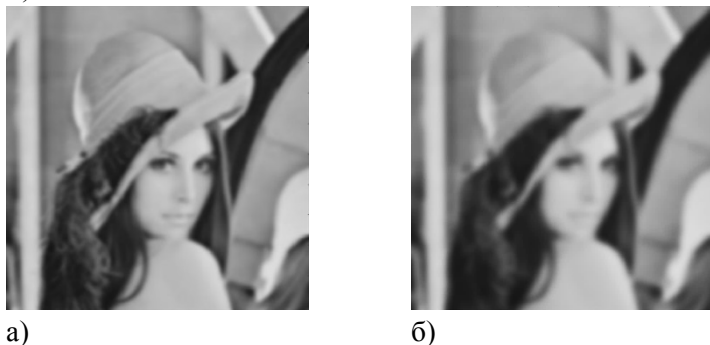


Рисунок 4. Отфильтрованное изображение «Лена» фильтром Баттерворта с размытием а) $\sigma = 3$, б) $\sigma = 5$.

4. Заключение

В результате проведенных экспериментов можно сделать следующие выводы. Радиально-симметричный фильтр обладает высоким качеством восстановления зашумленных изображений за счет настройки малого количества параметров непрерывной функции. Подбор оптимальных параметров фильтрации при использовании фильтра Баттерворта представляется трудной задачей. Необходимо провести большое количество экспериментов для нахождения оптимальных значений для частоты среза и порядка фильтрации.

Также радиально-симметричный фильтр имеет преимущества при оценке качества метрикой PSNR. Максимальные значения данного фильтра составили 30,41 при $\sigma = 3$ и 27,18 при $\sigma = 5$. Фильтр Баттерворта показал следующие результаты: при степени искажения $\sigma = 3$ метрика PSNR составила 28,38; при $\sigma = 5$ максимальный результат оказался равен 26,45.

При визуальной оценке изображений, обработанных радиально-симметричным фильтром и фильтром Баттерворта, первый лучше справился с удалением Гауссова размытия. Таким образом, установлено, что использование радиально-симметричного SE-фильтра возможно достижение качества (по метрике PSNR), превосходящего результат, получаемый с помощью фильтра Баттерворта. Также стоит отметить, что краевые эффекты и смазанность в отличие от фильтра Баттерворта в данном случае весьма незначительны.

5. Благодарности

Работа выполнена при поддержке д.т.н., профессора, заведующего кафедрой суперкомпьютеров и общей информатики в Самарском университете Фурсова Владимира Алексеевича.

6. Литература

- [1] Сорокин, Г.А. Фильтры нижних частот / Г.А. Сорокин // Вестник ЮУрГУ. Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". – 2015. – Т. 15, № 1. – С. 100-107.
- [2] Прэтт, У. Цифровая обработка изображений. Кн.2. / У. Прэтт. – Москва: Мир, 1982. – 480 с.
- [3] Фурсов, В.А. Построение КИХ-фильтров в заданном параметрическом классе частотных характеристик для коррекции дефокусировки / В.А. Фурсов // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 6. – С.878–886. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-6-878-886.
- [4] Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – Москва: Техносфера, 2005. – 1072 с.
- [5] Шапиро, Л. Компьютерное зрение / Л. Шапиро, Дж. Стокман. – Москва: БИНОМ, 2006. – 752 с.
- [6] Зиатдинов, С.И. Импульсная характеристика комплексного полосового фильтра Баттерворта / С.И. Зиатдинов // Изв. вузов. Приборостроение. – 2015. – Т. 58, №8. – С. 653-658.
- [7] Fursov, V.A. Conforming identification of the fundamental matrix in the image matching problem / V.A. Fursov, A.V. Gavrilov, Ye.V. Goshin, K.G. Pugachev // Computer Optics. – 2017. – Vol. 41(4). – P. 559-563.
- [8] Глумов, Н.И. Метод отбора информативных признаков на цифровых изображениях / Н.И. Глумов, Е.В. Мясников // Компьютерная оптика. – 2007. – Т. 31, №3. – С. 73-76.

Comparison of a low-frequency Butterworth filter with a radially symmetric SE-filter

K.S. Medvedeva¹, G.S. Berdnikov¹

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya Street, Saratov, Russia, 410012

Abstract. In the article compares two filters — the Butterworth filter and the radially symmetric SE-filter, in order to determine their merits and shortcomings. In addition to the visual evaluation, experiments are conducted with the PSNR metric (peak signal-to-noise ratio). Results Experimental studies have shown that a radially symmetric filter in the best way restores images by means of setting a small number of parameters continuous function, which were initially distorted by low-frequency Gaussian filter. \

Keywords: Image processing impulse response Fourier transform balanced filters, asymmetrical impulse responses, construction of exponential filters, low-frequency Butterworth filter, radial-symmetric SE-filter.