

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ СВОЙСТВАМИ, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ДВУХКОЛЕСНОЙ ТЕЛЕЖКЕ

М.Е. Семенов, А.Г. Рукавицын

Воронежский государственный университет

Задача заключается в обеспечении заданного закона движения при условии стабилизации маятника. Рассматривается ситуация, когда управляющее воздействие является выходом гистерезисного преобразователя - люфта, а вход формируется по принципу обратной связи. Перевернутый маятник, должен держать свое положение равновесия, которое необходимо для устойчивости системы на протяжении движения транспортного средства. Задачу осложняет наличие гистерезиса в обратной связи.

Возможность управления неустойчивыми техническими системами теоретически рассматривалась уже давно, однако практическая значимость такого управления играет особую роль. Известно, что при выходе из строя автоматической системы управления неустойчивый объект может представлять собой существенную угрозу, опасность и для человека, и для окружающей среды. Один из способов изучения и моделирования неустойчивых объектов заключается в рассмотрении классических систем - обратного маятника. Приступать к изучению свойств систем управления неустойчивыми объектами целесообразно на простых примерах, одним из которых является классический обратный маятник.[1] Отметим, что в процессе функционирования механических систем вследствие старения и износа деталей неизбежно возникают люфты, упоры, поэтому для описания динамики таких систем необходимо принимать во внимание влияние гистерезисных эффектов.

В работе рассматривается механическая система, состоящая из двухколесной тележки на оси, которой располагается обратный маятник.[2] Задача заключается в формировании такого управляющего воздействия, которое, с одной стороны, обеспечивало бы, заданный закон движения механического средства, а с другой, стабилизировало бы неустойчивое положение маятника. Ниже графически представлены элементы, изучаемой механической системы.

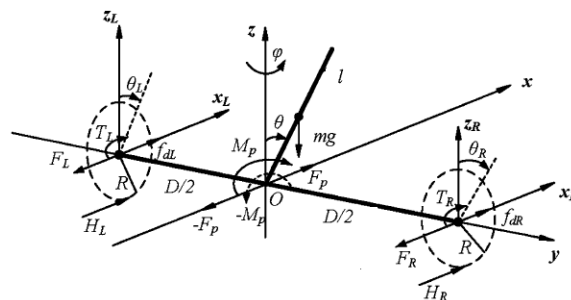


Рисунок 1 - Силы и моменты, действующие на систему

Параметры и переменные, которые описывают рассматриваемую систему: φ - угол поворота транспортного средства; D - расстояние между двумя колесами вдоль центра оси; R - радиус колес; J_φ - момент поворота угла транспортного средства; T_ω - разность крутящих моментов левого и правого колес; v - продольная скорость транспортного средства; θ - угол наклона маятника; m - масса перевернутого маятника; l - расстояние между центром тяжести тела и осью колеса; T_ω - Сумма крутящих моментов левого и правого колес; x - перемещение транспортного средства по направлению продольной скорости; M - масса шасси; M_ω - масса колес, h -раствор люфта.

Будем считать заданным, желаемый закон движения системы:

$$\varphi_d = \varphi_d(t), \theta_d = \theta_d(t), X_d = X_d(t); \quad (4)$$

Модель, описывающую динамику изменения параметров системы можно представить в виде двух независимых подсистем. Первая подсистема состоит из одного уравнения, определяющего угловые движения транспортного средства:

$$\ddot{\varphi} = \frac{D}{2RJ_\varphi} T_\omega, \quad (5)$$

Уравнение (5) можно переписать в виде системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \frac{D}{2RJ_\varphi} T_\omega - \ddot{\varphi}_d \end{cases} \quad (6)$$

где $e_1 = \varphi - \varphi_d$, $e_2 = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_d$.

Вторая подсистема, описывающая радиальные движения транспортного средства:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{\Omega} [J_\theta m l \dot{\theta}^2 \sin \theta - m^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta] + \frac{J_\theta}{\Omega R} T_v \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{\Omega} [M_x m g l \sin \theta - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta] - \frac{m l \cos \theta}{\Omega R} T_v \end{cases} \quad (7)$$

Эти уравнения также удобно представить в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{e}_3 = e_4 \\ \dot{e}_4 = \frac{1}{\Omega_0} [J_\theta m l (\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) - \\ - m^2 l^2 g \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d)] + \frac{J_\theta}{\Omega_0 R} T_v - \ddot{x}_d \\ \dot{e}_5 = e_6 \\ \dot{e}_6 = \frac{1}{\Omega_0} [M_x m g l \sin(e_5 + \theta_d) - m^2 l^2 (\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d)] - \\ - \frac{m l \cos(e_5 + \theta_d)}{\Omega_0 R} T_v - \ddot{\theta}_d \end{cases} \quad (8)$$

где $\Omega_0 = M_x J_\theta - m^2 l^2 \cos^2(\theta_d + e_5)$, $e_3 = x - x_d$, $e_4 = v - v_d$, $e_5 = \theta - \theta_d$, $e_6 = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$.

Алгоритм управления системой (6) сформируем по принципу обратной связи. Для этого определим управляющий момент, стабилизирующий вращательное движение следующим образом:

$$T_w = \frac{2RJ_\varphi}{D} [\ddot{\varphi}_d - c_1 \dot{e}_1 - k_1 \operatorname{sgn}(s_1) - k_2 s_1], \quad (9)$$

где s_1 – поверхность переключения, определяемая соотношением:

$$s_1 = \dot{e}_1 + c_1 e_1 \quad (10)$$

где c_1 - положительный параметр.

Аналогично будем строить алгоритм управления второй подсистемой (8). Для этого определим управляющий момент, стабилизирующий радиальное движение следующим образом:

$$T_v = -Rml(\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) + \frac{m^2 l^2 g}{J_\theta} \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d) - \frac{\Omega_0 R}{J_\theta} [c_2 \dot{e}_3 - \dot{v}_d + k_3 \operatorname{sgn}(s_2) + k_4 s_2], \quad (11)$$

где s_2 – поверхность переключения, определяемая соотношением:

$$s_2 = \dot{e}_3 + c_2 e_3, \quad (12)$$

где c_2 - положительный параметр.

Для того, чтобы одновременно управлять обеими подсистемами системы (8), введем дополнительное управляющее воздействие:

$$\dot{v}_d = g \tan \theta - \frac{J_\theta}{ml \cos \theta} [\ddot{\theta}_d + c_3 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - k_5 \operatorname{sgn}(s_3) - k_6 s_3], \quad (13)$$

где g - ускорение свободного падения; c_3, k_5, k_6 - положительные параметры; s_3 - поверхность переключения, определяемая соотношением:

$$s_3 = e_6 + c_3 e_5. \quad (14)$$

Сформулируем основные результаты работы, заключающиеся в принципиальной возможности стабилизации обеих подсистем, в сделанных предположениях относительно управляющих воздействий, в окрестности нулевого положения равновесия.

Теорема 1. В системе (6) с управляющим воздействием (11) все сигналы являются ограниченными и ошибки моделирования сходятся асимптотически к нулю, т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |e_1(t)| &\rightarrow 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |e_2(t)| &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично Теореме 1 устанавливается, что система (8) является асимптотически устойчивой.

Рассмотрим обобщение систем (6) и (8), только с наличием люфта в обратной связи:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = \frac{D}{2RJ_\varphi} U - \ddot{\varphi}_d \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \dot{e}_3 = e_4 \\ \dot{e}_4 = \frac{1}{\Omega_0} [J_\theta ml(\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) - \\ - m^2 l^2 g \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d)] + \frac{J_\theta}{\Omega_0 R} U - \ddot{x}_d \\ \dot{e}_5 = e_6 \\ \dot{e}_6 = \frac{1}{\Omega_0} [M_x mgl \sin(e_5 + \theta_d) - m^2 l^2 (\dot{\theta}_d + e_6)^2 \sin(e_5 + \theta_d) \cos(e_5 + \theta_d)] - \\ - \frac{ml \cos(e_5 + \theta_d)}{\Omega_0 R} U - \ddot{\theta}_d \end{cases} \quad (22)$$

где $U = L[x_0; T_w] T_w$, L – оператор люфта.[6]

Люфт - зазор между механическими элементами системы управления, обычно связанными с вращением.

В задаче была исследована зависимость качества стабилизации перевернутого маятника на двухколесной тележке от раствора люфта.[6]

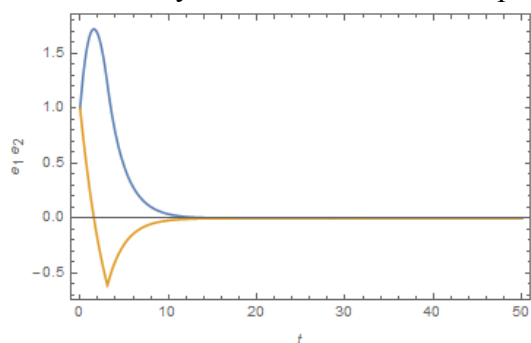


Рисунок 4 – Зависимость e_1, e_2 от времени t

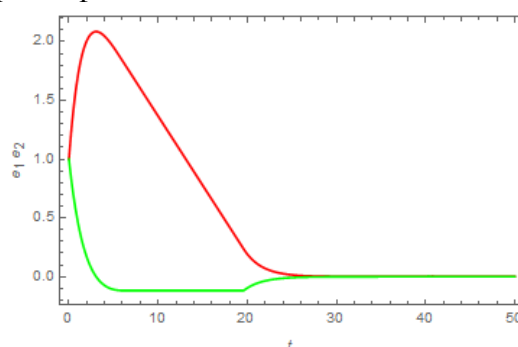


Рисунок 5 – Зависимость e_1, e_2 от времени t с наличием люфта в обратной связи, при $h=0.3$

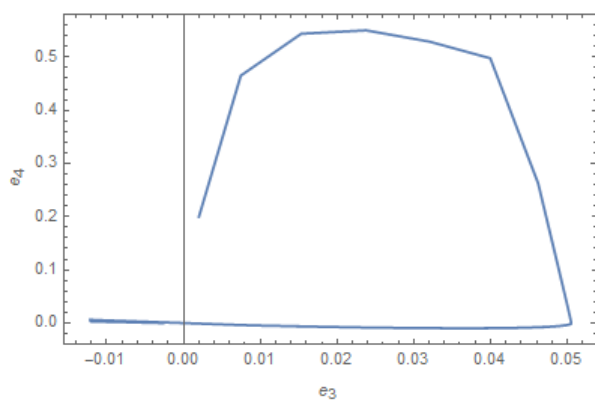


Рисунок 6 – Зависимость e_3 от e_4 , при $t=50$

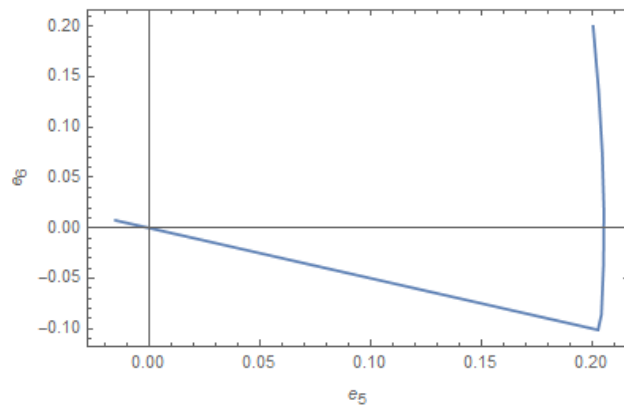


Рисунок 7 – Зависимость e_5 от e_6 , при $t=50$

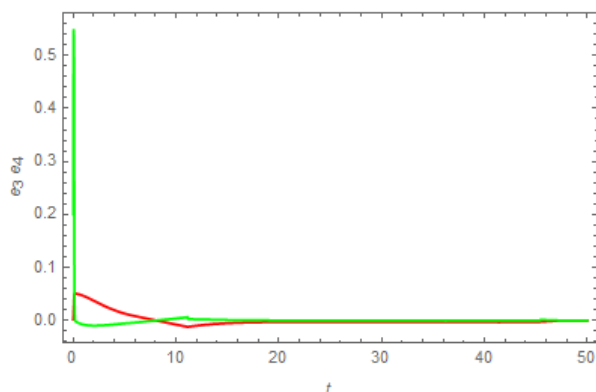


Рисунок 8 – Зависимость e_3, e_4 от времени t с наличием люфта в обратной связи, при $h=0.3$

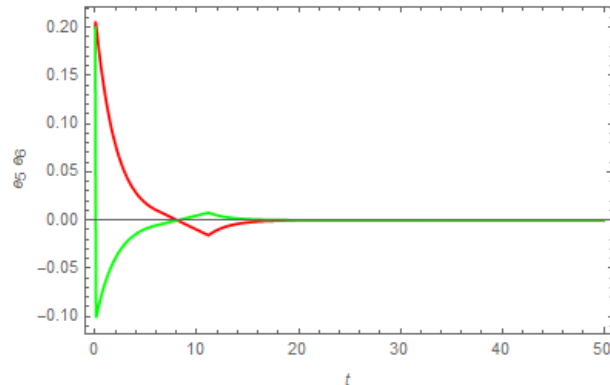


Рисунок 9 – Зависимость e_5, e_6 от времени t с наличием люфта в обратной связи, при $h=0.3$

Из рисунков видно, что процесс стабилизации с люфтом занимает значительно больше времени, чем без люфта в обратной связи.

Литература

1. Семенов М.Е. Стабилизация перевернутого маятника вертикальными осцилляциями с помощью гистерезисного управления // М.Е. Семенов, Д. В. Шевлякова, О. И. Канищева, Д. В. Грачиков// Научно-технические технологии № 3. 2012. – С. 23-31.
2. М.Е. Semenov, D.V. Shevlyakova, P.A. Meleshenko. Inverted Pendulum under hysteretic control: stability zones and periodic solutions. // Springer Science + Business Media Dordrecht/ Nonlinear Dynamics 2014, Vol. 75, Issue 1, pp 271-281.

3. Грачиков Д.В. Стабилизация, рассинхронизация и оптимальное управление обратным маятником с гистерезисными свойствами // Грачиков Д.В., Лебедев Г.Н., Семенов М.Е., Канищева О.И.// Вестник ВГУ, серия: Системный анализ и информационные технологии, 2013, № 1 – С. 29-37.
4. Неймарк, Ю.И. Динамические модели теории управления. УФН. Физ. Наук (на русском языке) 44, 7 – 15 с. (1985).
5. Grachikov D.V. Stabilization and Control Models of Systems With Hysteresis Nonlinearities / Grachikov D.V., Semenov M.E., Mishin M.Y., Shevlyakova D.V. // European Researcher . 2012. – Vol. (20) № 5-1., pp. 523-528.
6. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом //М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.-272 с.