

Стабилизация систем перевернутых маятников в условиях упругих связей

А.М. Соловьев¹, М.Е. Семенов^{1,2}, П.А. Мелешенко^{1,2}

¹Воронежский государственный университет, Университетская пл. 1, Воронеж, Россия, 394018

²Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Старых большевиков 54А, Воронеж, Россия, 394064

Аннотация. В работе исследуется математическая модель неустойчивой системы связанных осцилляторов, представляющей собой набор из n перевернутых маятников с упругими связями. Разработаны принципы стабилизации системы в окрестности неустойчивого вертикального положения, проведено исследование динамики, а также найдены предельные значения параметров, обеспечивающие возможность ее стабилизации. Посредством численного моделирования продемонстрирован ряд важных аспектов динамики исследуемой системы.

1. Введение

Стабилизация перевернутого маятника является классической задачей теории управления. Первое теоретическое исследование обратного маятника было проведено Стефенсоном в работе [1], а первые эксперименты по его стабилизации были поставлены П.Л. Капицей в 1951 году и описаны в его работе [2]. Таким образом, задача стабилизации перевернутого маятника имеет достаточно большую историю исследований, тем не менее, большая часть этих исследований посвящена упрощенной модели с рядом допущений. Отметим, что в некоторых технических приложениях возникает необходимость поиска регулятора более сложной, связанной системы, представляющей собой набор перевернутых маятников с динамическими связями.

В работах [3,4] решалась задача стабилизации двух связанных перевернутых маятников. В настоящей работе производится обобщение указанной системы на случай произвольного числа n упруго связанных перевернутых маятников, шарнирно закрепленных на подвижной платформе, при этом сила, приложенная к платформе и вызывающая ее горизонтальные перемещения, трактуется как управление. Производится исследование динамических характеристик указанной системы (в условиях управления по обратной связи), а также значений параметров, обеспечивающих ее стабилизацию.

2. Математическая модель

Рассмотрим систему из n перевернутых маятников, каждый из которых имеет массу m и длину стержня l , жестко закрепленных на подвижной тележке и связанных между собой пружинами жесткостью k . При этом пружины находятся в нерастянутом состоянии в случае, когда маятники занимают вертикальное положение. Будем считать, что тележка не имеет массы и

движется без трения, а управляющее воздействие, приложенное к тележке, сообщает ей ускорение u (рисунок. 1).

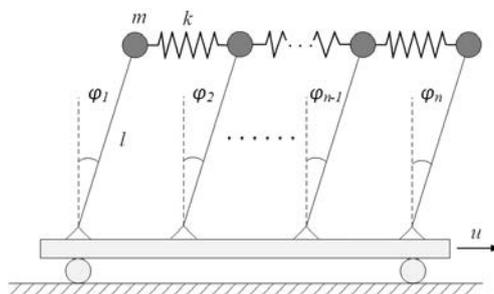


Рисунок 1. Система связанных обратных маятников.

Пренебрегая трением, запишем уравнения моментов исследуемой системы:

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} = \bar{M}_1^{(g)} + \bar{M}_1^{(kr)} + \bar{M}^{(u)}, \\ I_i \frac{d\bar{\omega}_i}{dt} = \bar{M}_i^{(g)} + \bar{M}_1^{(kr)} + \bar{M}_1^{(kl)} + \bar{M}^{(u)}, \quad i = \overline{2, n-1}, \\ I_n \frac{d\bar{\omega}_n}{dt} = \bar{M}_n^{(g)} + \bar{M}_n^{(kl)} + \bar{M}^{(u)}. \end{cases} \quad (1)$$

здесь I – момент инерции маятника, ω – угловая скорость, $M^{(g)}$ – возвращающий момент силы тяжести, $M^{(kl)}$ и $M^{(kr)}$ – моменты силы упругости пружин, расположенных слева и справа от i -го маятника, соответственно, а $M^{(u)}$ – момент управления. Поскольку рассматривается плоское движение, все указанные векторы имеют направления перпендикулярные плоскости рисунка, что позволяет перейти к уравнениям в скалярной форме.

Как следует из рисунка 1, положение маятников характеризуется углами их отклонения от вертикальной оси φ . При этом, углы отклонения маятников предполагаются малыми. В этом случае удлинение пружины Δx можно приближенно записать как:

$$\Delta x_i \approx l(\varphi_{i+1} - \varphi_i). \quad (2)$$

Введем собственную частоту колебаний для изолированного маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \quad (3)$$

Также предположим, что массы являются точечными, сосредоточенными на концах соответствующих стержней, тогда:

$$I = ml^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4)$$

Таким образом, учитывая равенства (2) – (4), система уравнений (1) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \omega^2 \varphi_1 + a(\varphi_2 - \varphi_1) - c, \\ \ddot{\varphi}_i = \omega^2 \varphi_i + a(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) - c, \\ \ddot{\varphi}_n = \omega^2 \varphi_n - a(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - c, \end{cases} \quad (5)$$

где $a_i = \frac{k}{m}$, $c = \frac{u}{l}$.

3. Стабилизация системы

Стабилизацию исследуемой механической системы будем осуществлять посредством управления, формируемого по принципу обратной связи [5,6]. Найдем суммарное отклонение маятников относительно вертикального положения. С этой целью просуммируем все уравнения системы (5):

$$\ddot{s} = \omega^2 s - nc, \quad s = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \tag{6}$$

Тогда ускорение (управление), приложенное к тележке (рисунок 1), определим следующим соотношением:

$$u = A \cdot \text{sign}(Bs + \dot{s}), \tag{7}$$

где A и B – коэффициенты, задающие характер управления.

4. Исследование динамики системы

Проведем исследование динамики изучаемой механической системы и найдем значения коэффициентов A и B , приводящие к стабилизации маятников в окрестности неустойчивого вертикального положения.

Заметим, что управление u , как видно из уравнения (6), влияет только на суммарное положение маятников в пространстве, а жесткость пружин k – только на их положение относительно друг друга.

Общее решение дифференциального уравнения (6) имеет следующий вид:

$$s(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{nu}{\omega^2 l}. \tag{8}$$

Пусть начальные значение суммарного отклонения $s(0) = s_0$, а его производная $\dot{s}(0) = \dot{s}_0$. Тогда, решение задачи Коши уравнения (6) имеет вид:

$$s(t) = \frac{1}{2} \left(s_0 + \frac{\dot{s}_0}{\omega} - \frac{nu}{\omega^2 l} \right) e^{\omega t} + \frac{1}{2} \left(s_0 - \frac{\dot{s}_0}{\omega} - \frac{nu}{\omega^2 l} \right) e^{-\omega t} + \frac{nu}{\omega^2 l}. \tag{9}$$

Рассмотрим фазовый портрет исследуемой системы (рисунок 2) [3,4].

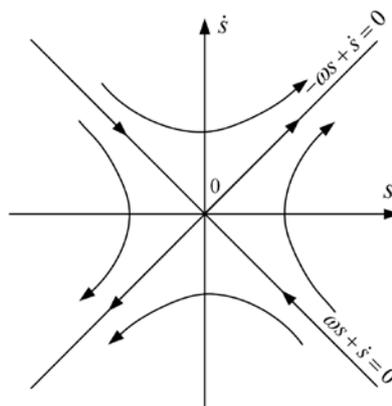


Рисунок 2. Фазовый портрет системы.

При отсутствии управления, как видно из рисунка, попадая на прямую $\omega s + \dot{s} = 0$, фазовые координаты будут «стремиться» к нулевому положению равновесия. То есть, в случае, когда управление u способно «довести» суммарное положение маятников до прямой $\omega s + \dot{s} = 0$, система будет стабилизирована [7]. Таким образом, из решения (9) следует, что для стабилизации системы необходимо выполнение условия:

$$s_0 + \frac{\dot{s}_0}{\omega} - \frac{nu}{\omega^2 l} = 0 \Rightarrow u = \frac{\omega l}{n} (\omega s_0 + \dot{s}_0). \tag{10}$$

С учетом (7) условие (10) можно записать в следующем виде:

$$u = \frac{\omega l}{n} |\omega s_0 + \dot{s}_0| \text{sign}(\omega s_0 + \dot{s}_0). \tag{11}$$

Таким образом, искомые коэффициенты управления, приводящие к стабилизации системы, определяются посредством соотношений:

$$\begin{cases} A = \frac{\omega l}{n} |\omega s_0 + \dot{s}_0|, \\ B = \omega. \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что устойчивое положение маятников, к которому приводит выполнение условия (12), не является вертикальным, так как в этом случае суммарное отклонение маятников

$s \rightarrow \frac{nu}{\omega^2 l}$. Однако, из решения (9) также следует, что, при

$$s_0 + \frac{\dot{s}_0}{\omega} - \frac{nu}{\omega^2 l} < 0 \tag{13}$$

управление будет «возвращать» маятники в сторону вертикального положения, а в момент пересечения вертикали, знак управления изменится на противоположный и процесс повторится. Таким образом, условие стабилизации системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} A \geq \frac{\omega l}{n} |\omega s_0 + \dot{s}_0|, \\ B = \omega. \end{cases} \tag{14}$$

Графически условие (14) можно отобразить на фазовой плоскости в форме, представленной на рисунке 3.

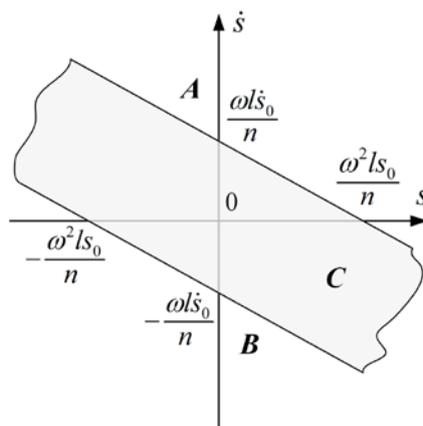


Рисунок 3. Область устойчивости системы

Области A и B определяют все возможные начальные состояния системы, при которых маятники невозможно «удержать» в окрестности вертикального положения равновесия, а область C является областью устойчивости системы.

Следует отметить, что после воздействия управления u , суммарный угол отклонения маятников s может изменить знак, вследствие чего, на каждой расчетной итерации необходимо переопределять управляющее воздействие. Однако, вследствие консервативности рассматриваемой системы, для корректного управления достаточно переопределить лишь знак величины u исходя из текущих значений s и \dot{s} согласно (7), при этом коэффициенты A и B , согласно (14), оставив неизменными.

5. Результаты численного моделирования

Проведем численное моделирование динамики исследуемой механической системы. С этой целью найдем решение системы уравнений (5) для случая, когда

$$\begin{aligned}
 k &= 200, \quad m = 0.1, \quad l = 1, \quad n = 10, \\
 s_1(0) &= 0, \quad \dot{s}_1(0) = 0.1, \quad s_i(0) = \dot{s}_i(0) = 0, \quad i = \overline{2, n}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Решение будем искать с помощью одношагового метода Рунге-Кутты 5-го порядка.

На рисунке 4 приведены результаты для суммы углов отклонений маятников при выполнении и невыполнении условия (14). Как видно из рисунка 4, результаты компьютерного моделирования подтверждают необходимость выполнения условия (14) для стабилизации системы маятников в окрестности их вертикального положения.

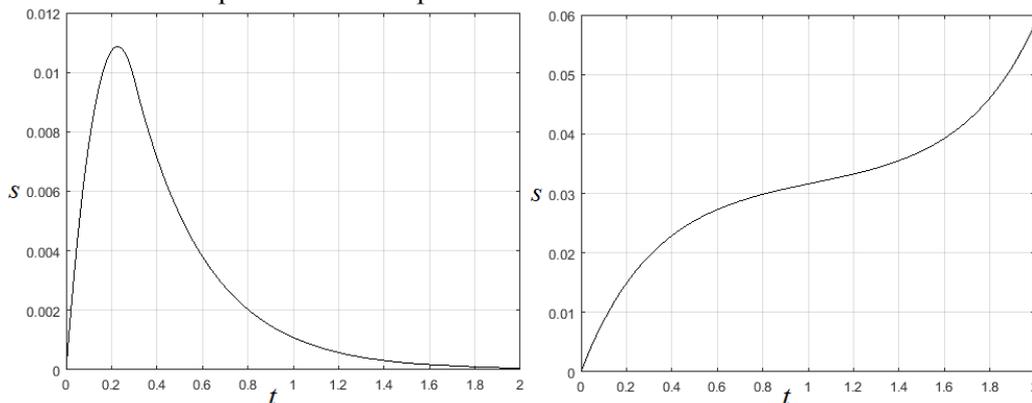


Рисунок 4. Суммарное отклонение маятников при выполнении (слева) и невыполнении (справа) условия стабилизации (14).

6. Упругие волны

Как известно [8,9], при возбуждении цепочки связанных осцилляторов в условиях упругих связей возникает волновое движение, при котором фазовый волновой фронт перемещается с конечной скоростью, постоянной для однородной среды, перенося энергию колебаний. Это явление называется бегущей волной. Примерами бегущих волн могут служить упругие волны в металлическом стержне, столбе газа или жидкости, электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль длинной линии или в волноводе.

В исследуемой механической системе при определенных начальных условиях в процессе стабилизации также возникают упругие волны, что демонстрируют результаты компьютерного моделирования. Так, на рисунке 5 (слева) показана упругая волна, движущаяся от 1-го маятника системы к n -му и в обратном направлении, а на рисунке 5 (справа) изображены две упругие волны, движущиеся в противоположных направлениях.

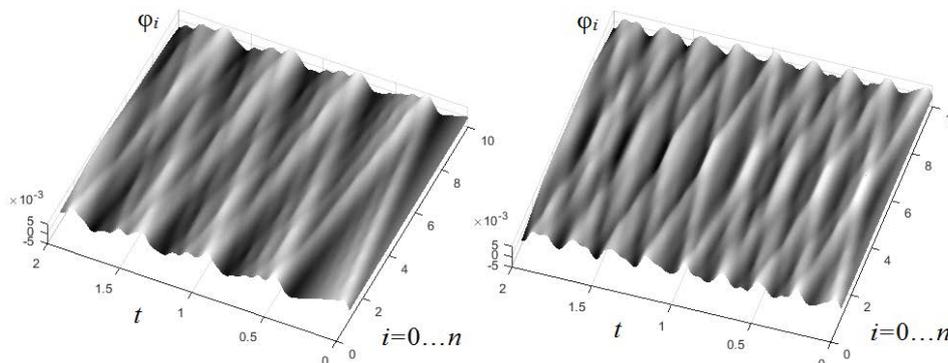


Рисунок 5. Упругие волны.

7. Заключение

В настоящей работе проводилось исследование динамики неустойчивой механической системы с n степенями свободы, представляющей собой набор из n обратных маятников в условиях

упругих связей. В работе была решена задача стабилизация такой системы и найдены области ее устойчивости. Также, в процессе численного моделирования было показано, что в процессе стабилизации системы при определенных начальных условиях возникают упругие волны.

8. Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16-08-312, № 17-01-00251).

9. Литература

- [1] Stephenson, A. On an induced stability / A. Stephenson // *Phil. Mag.* – 1908. – 15. – P. 233.
- [2] Капица, П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом / П.Л. Капица // *УФН.* – 1951. – № 44. – С. 7-20.
- [3] Семенов, М.Е. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы / М.Е. Семенов, А.М. Соловьев, М.А. Попов // *Труды МАИ.* – 2017. – № 93.
- [4] Semenov, M.E. Coupled inverted pendulums: stabilization problem / M.E. Semenov, A.M. Solovyov, M.A. Popov, P.A. Meleshenko // *Archive of Applied Mechanics.* – 2017. DOI: 10.1007/s00419-017-1323-0.
- [5] Semenov, M.E. Inverted pendulum under hysteretic control: stability zones and periodic solutions / M.E. Semenov, D.V. Shevlyakova, P.A. Meleshenko // *Nonlinear Dyn.* – 2014. – Vol. 75. – P. 247-256. DOI: 10.1007/s11071-013-1062-x.
- [6] Semenov, M.E. Hysteretic Nonlinearity in Inverted Pendulum Problem / M.E. Semenov, P.A. Meleshenko, A.M. Solovyov, A.M. Semenov // *Springer Proceedings in Physics. Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis.* – 2015. – Vol. 168. – P. 463-506, DOI: 10.1007/978-3-319-19851-4_22.
- [7] Semenov, M.E. State-feedback control principles for inverted pendulum with hysteresis in suspension / M.E. Semenov, Z.H. Abbas, I.N. Ishchuk, O.I. Kanishcheva, P.A. Meleshenko // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.* – 2016. – Vol. 4(9). – P. 498-509, DOI: 10.17516/1997-1397-2016-9-4-498-509.
- [8] Бхатнагар, П. Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах / П. Бхатнагар. – М.: Наука, 1989. – 134 с.
- [9] Скотт, Э. Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур / Э. Скотт // *Физматлит*, 2007. – 560 с.
- [10] Sazhin, S. Particle grouping in oscillating flows / S. Sazhin, T. Shakked, D. Katoshevski, V. Sobolev // *Eur. J. Mech. B Fluid.* – 2008. – Vol. 27. – P. 131-149.
- [11] Неймарк, Ю.И. Динамические модели теории управления / Ю.И. Неймарк, Н.Я. Коган, В.П. Савельев // М.: Наука, 1985. – 400 с.

Stabilization of inverted pendula system in presence of elastic coupling

A.M. Solovyov¹, M.E. Semenov^{1,2}, P.A. Meleshenko^{1,2}

¹Voronezh State University, Universitetskaya sq. 1, Voronezh, Russia, 394018

²Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, Starykh Bolshevikov st. 54A, Voronezh, Russia, 394064

Abstract. In this paper we consider a mathematical model of the unstable system which is a set of n connected inverted pendula (taking into account the elastic nature of coupling). We construct the conditions of stabilization of the pendula near the unstable upright position. We also studied the dynamics of this system and found the limit conditions ensuring the stability of the system. Simulation results demonstrate several important aspects of the system's dynamics.

Keywords: inverted pendulum, stabilization, connected oscillators, oscillatory system, forced oscillations.