

Степень цикличности: ещё одна характеристика распределения фазы

А.В. Устинов¹, С.Н. Хонина^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

²Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34а, Самара, Россия, 443086

Аннотация

Введена новая характеристика распределения фазы, названная степенью цикличности. Она вычисляется путём усреднения мгновенного заряда в L_p . При $p=1$ имеем стандартное определение топологического заряда. Степень цикличности не больше ТЗ и равна ему при равномерном распределении фазы.

Ключевые слова

Спиральная фазовая пластинка, топологический заряд, среднее порядка p

1. Введение

Традиционной характеристикой, используемой для описания полей, имеющих сингулярности в распределении фазы, является топологический заряд (ТЗ). По классическому своему определению эта величина является целым числом [1]. ТЗ, вообще говоря, не сохраняется при распространении поля. Поэтому дробное значение, которое возможно в начальной плоскости, очень быстро превращается в целое. Имеется ряд работ, где анализируется, каким начальным зарядам соответствует целый заряд при распространении. Показано, что в зависимости от амплитуды освещающего пучка скачок значения заряда происходит при переходе начального заряда через полуцелое или целое значение [1,2]. В статье [3] рассмотрен случай многосекторной пластинки, при этом, меняя её параметры, можно получить величину скачка заряда больше, чем на единицу.

Вычисление заряда выполняется либо подсчётом числа переходов фазы через 2π , либо по аналитическим формулам через усреднение мгновенного заряда. При этом длина дуг между точками перехода (в первом способе) и вид изменения фазы (в обоих способах) не влияют на результат. Этот факт можно считать положительным, так как показывает определённую устойчивость ТЗ, но в то же время показывает недостаточность этой характеристики, особенно при описании нелинейной спиральной фазовой пластинки (СФП) [4]. В данном докладе мы покажем, как можно преодолеть эту недостаточность.

2. Теоретическое обоснование степени цикличности

Исходя из сказанного выше, возникает желание учесть влияние длин дуг и вида изменения фазы. Мы не будем покушаться на классическое определение ТЗ, а введём новую характеристику, которая учитывает упомянутые величины, и назовём её *степень цикличности*. Для этого используем подход на основе усреднения мгновенного заряда, но применим другой способ усреднения.

Пусть зависимость фазы от угла задаётся функцией $g(\varphi)$, тогда мгновенный заряд равен $n(\varphi) = g'(\varphi)$. Будем использовать среднее в L_p , которое определяется выражением:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1)$$

Отметим, что $p=1$ соответствует традиционному усреднению. Рассмотрим случай, когда знак $n(\varphi)$ не меняется. Как пример рассмотрим кусочно-линейную фазу:

$$g(\varphi) = \begin{cases} 2\pi\varphi/\varphi_c, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_c \\ 2\pi(\varphi - \varphi_c)/(2\pi - \varphi_c), & \varphi_c \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (2)$$

ТЗ как при подсчёте числа переходов фазы через 2π , так и через усреднение мгновенного заряда будет равен двум. Вычислим среднее значение мгновенного заряда для двух значений порядка $p=2$ и $p=1/2$.

При $p=2$: $\|n\|_2 = 2\pi/\sqrt{\varphi_c(2\pi - \varphi_c)}$. При $\varphi_c = \pi$ (равная длина дуг) $\|n\|_2 = 2$, как и должно быть, и оно будет *минимальным*. При $\varphi_c \rightarrow 0(2\pi)$ значение $\|n\|_2$ стремится к бесконечности. Можно показать, что аналогичные свойства будут у среднего любого порядка $p>1$.

При $p=1/2$: $\|n\|_{1/2} = (\sqrt{\varphi_c} + \sqrt{2\pi - \varphi_c})^2/2\pi$. При $\varphi_c = \pi$ также $\|n\|_{1/2} = 2$, и это значение будет *максимальным*. При $\varphi_c \rightarrow 0(2\pi)$ значение $\|n\|_{1/2}$ стремится к *единице*. Можно показать, что аналогичные свойства будут у среднего любого порядка $0<p<1$.

Качественно свойства зависят только от диапазона значений p , но, изменяя величину p , мы можем менять степень вогнутости ($p>1$) или выпуклости ($0<p<1$) зависимости $\|n\|_p$ от φ_c .

Мы предлагаем ввести *определение степени цикличности* как $\|n\|_p$ при $0<p<1$. Выбор такого диапазона обоснован тем, что именно в нём $\|n\|_p$ имеет свойства, которые должна иметь степень цикличности.

3. Заключение

Итак, с целью более полного описания распределения фазы нелинейной СФП или фазы вдоль контура, мы ввели новую количественную характеристику, которую назвали степень цикличности. Она определяется как среднее в L_p от мгновенного заряда, при этом используется значение $0<p<1$. При равномерном распределении фазы (стандартная СФП) степень цикличности равна топологическому заряду, для нелинейного распределения фазы степень цикличности будет меньше ТЗ.

4. Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-37-70025 и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26).

5. Литература

- [1] Котляр, В.В. Рождение оптических вихрей при распространении поля с начальным дробным топологическим зарядом / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 4. – С. 493-500. DOI: 10.18287/2412-6179-СО-715
- [2] Wen, J. Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams / J. Wen, L. Wang, X. Yang, J. Zhang, S. Zhu // Opt. Express. – 2019. – Vol. 27. – P. 5893-5904.
- [3] Zeng, J. Anomalous multi-ramp fractional vortex beams with arbitrary topological charge jumps / J. Zeng, H. Zhang, Z. Xu, C. Zhao, Y. Cai, G. Gbur // Applied Physics Letters. – 2020. – Vol. 117. – P. 241103.

- [4] Khonina, S.N. Properties of vortex light fields generated by generalized spiral phase plates / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, V.I. Logachev, A.P. Porfirev // *Phys. Rev. A.* – 2020. – Vol. 101. – P. 043829. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.043829.