СТРУКТУРА БЕССЕЛЕВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗ СДВИГОВ ФУНКЦИЙ

С.Я. Новиков, М.Е. Федина

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Получены следствия решенной недавно проблемы Кадисона –Зингера в изучении структуры бесселевой последовательности и фрейма из сдвигов оконной функции.

Ключевые слова: преобразование Фурье, частотно-временной анализ, фрейм, бесселева последовательность.

Преобразование Фурье играет первостепенную роль в цифровой обработке и анализе сигналов.

Наряду с несомненными достоинствами преобразования Фурье, серьезным его недостатком является трудоемкость восстановления информации, скрытой в фазе преобразования, так, что, зная только амплитудный спектр сигнала, невозможно определить момент возникновения сигнала и его длительность.

Габор в 1946 году [1] сформулировал идею локализованного частотно-временного представления, которая впоследствии выросла в частотно-временной анализ сигналов [2].

Последовательность $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H называется *базисной последовательностью Рисса*, если существуют числа $A, B > 0$ такие, что для всех числовых последовательностей $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ имеем

$$A\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2 \le \left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i\right\|^2 \le B\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2.$$

Если $A = 1-\varepsilon,\ B = 1+\varepsilon,$ то говорят о $\varepsilon-$базисной последовательности Рисса.

Если последовательность $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна в пространстве H, то ее называют *базисом Рисса*.

Последовательность $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ образует базис Рисса тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что оператор $Te_i = \phi_i$ обратим. В частности каждый базис Рисса ограничен, т.е.

$$0 < \inf_i \|\phi_i\| \le \sup_i \|\phi_i\| < \infty.$$

Последовательность элементов $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H называется *фреймом* для H, если существуют числа $0 < A \le B < \infty$ (их называют, соответственно, нижней и верхней фреймовой границей) такие, что для произвольного $f \in \mathrm{H}$ имеем

$$A\|f\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle f, \phi_i\rangle\right|^2 \le B\|f\|^2.$$

Если последовательность является фреймом в замыкании своей линейной оболочки, то она называется *фреймовой последовательностью*.

Если выполнено только правое неравенство, то последовательность $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется бесселевой последовательностью с бесселевой границей $B.$ Если $A = B = 1,$ то фрейм называется *фреймом Парсеваля -Стеклова*.

Фрейм называется *равномерным*, если все его элементы имеют одинаковые нормы.

Каждый базис Рисса является фреймом. Обратное неверно: построены примеры фреймов, которые *не* являются базисами Рисса.

Широкую известность в литературе приобрела *гипотеза Фейхтингера[5]:* каждый ограниченный фрейм является объединением конечного числа базисных последовательностей Рисса.

Из определения фрейма следует, что $\|\phi_i\|^2 \le B, \quad i = 1,2,\ldots.$

Если $\inf_i \|\phi_i\| > 0,$ то фрейм называется *ограниченным*.

После положительного решения проблемы Кадисона - Зингера [3] гипотеза Фейхтингера стала теоремой.

Основной компонентой построения элементарных сигналов в конструкциях Габора является так называемая оконная функция $g \in L^2(R).$ Два семейства операторов формируют, при определенных условиях, фрейм Габора вида $\{Mod_x T_y g\}_{(x,y)\in A},$ где $A \subset R \times R,$ $Mod_x g(t) = e^{2\pi ixt} g(t) -$ модуляция, $T_y g(t) = g(t-y) -$ сдвиг.

Если $g \in L^2(R),$ $\lambda_n \in R,$ $n \in Z,$ то определяется система сдвигов оконной функции g вида $\{T_{\lambda_n} g\}_{n\in Z}.$

Если такая система образует фрейм в замыкании своей линейной оболочки, то ее называют *фреймом сдвигов*.

За свою полувековую историю проблема Кадисона - Зингера получила много эквивалентных формулировок, одна из которых выглядит как первое утверждение следующей теоремы. Для ее формулировки введем понятие оператора Тёплица [5]. Пусть $\phi \in L^{\infty}[0,1].$ Оператор Тёплица $M_\phi : L^2[0,1] \to L^2[0,1],$ $M_\phi(f) := f \cdot \phi.$

Теорема 1. Оператор Тёплица M_ϕ удовлетворяет условию Фейхтингера: существует такое разбиение $\{A_j\}_{j=1}^{r}$ множества целых чисел $Z,$ что семейство $\{M_\phi e^{2\pi \mathrm{int}}\}_{n\in A_j}$ образует базисную последовательность Рисса для каждого $j = 1,2,\ldots,r.$

Из теоремы 1 и результатов [3] и [6] можно получить и более точный результат о фреймах Фурье.

Теорема 2. Фрейм Фурье вида $\{e^{2\pi int}\chi_E\}_{n\in Z}$ в $L^2(E)$ может быть представлен в виде объединения r подмножеств так, что $\{e^{2\pi int}\chi_E\}_{n\in S_j}$ являются $\varepsilon-$базисными последовательностями Рисса для каждого $j=1,2,\ldots,r,$ причем

$$r=\left(\frac{6|E|+1}{\varepsilon|E|}\right)^8.$$

(В формулировке теоремы χ_E обозначает индикатор или характеристическую функцию множества $E,$ а $|E|-$ меру Лебега этого множества.)

Преобразование Фурье позволяет получить из теоремы 1 утверждение о структуре бесселевой последовательности сдвигов:

- пусть $0\neq\phi\in L^2(R)$. Если для множества $A\subset Z$ последовательность вида $\{T_n\varphi\}_{n\in A}$ является бесселевой, то ее можно представить в виде конечного объединения базисных последовательностей Рисса.

Благодарности

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект № 204) .

Литература

1. Gabor, D. Theory of communication / D. Gabor // Jour. IEEE. – 1946. – Vol. 93. – P. 429–457.
2. Gr¨ochenig, K.H. Foundations of time-frequency analysis / K.H. Gr¨ochenig – Boston: Birkh¨auser, 2000. – 360 pp.
3. Marcus, A. Interlacing families II: Mixed Characteristic Polynomials and the Kadison-Singer Problem / A. Marcus, D. Spielman, N. Srivastava Annals of Math – 2015. Vol.182, No 1. PP.327-350.
4. Kadison, R. Extensions of pure states / R. Kadison, I. Singer // American Jour. Math. – 1959. – Vol. 81. – P. 383-400.
5. Casazza, P. G. The Kadison–Singer problem in mathematics and engineering: a detailed account / P.G. Casazza, M. Fickus, J.C. Tremain, E. Weber // Operator theory, operator algebras, and applications. Contemporary Mathematics. – 2006. 414. Providence, RI: American Mathematical Society. pp. 299–355.
6. Casazza, P. G. Consequences of the Marcus/Spielman/Srivastava solution to the Kadison-Singer Problem [Электронный ресурс]. – arXiv: 1407.4768 – 2014.