

Топологический заряд оптических вихрей с геометрическими искажениями

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

²Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. Теоретически и численно показано, что целочисленный топологический заряд оптического вихря сохраняется при его смещении с оси любого несущего осесимметричного пучка. Также показано, что эллиптичность оптического вихря не изменяет его топологический заряд.

1. Введение

Лазерные оптические вихри (ОВ), это особый тип лазерных пучков, обладающих орбитальным угловым моментом (ОУМ) [1]. Исследованию ОУМ для параксиальных, непараксиальных и векторных пучков посвящено множество работ, например только работы 2019 года [2-6]. Хорошо известные примеры лазерных ОВ – это модовые Лагерра-Гаусса [7], Бесселя [8], Бесселя-Гаусса [9], Гипергеометрические [10] и Круговые пучки [11]. Они все обладают радиальной симметрией, и все имеют одинаковый нормированный на мощность пучка ОУМ, который равен целому топологическому заряду этих пучков n . Известны и ОВ без круговой симметрии, у которых ОУМ разный, и для каждого типа асимметричных пучков получены разные формулы для ОУМ [12, 13]. Но кроме ОУМ оптические вихри характеризуются топологическим зарядом (ТЗ), определение которого дано в [14]. Расчёту ТЗ сложных ОВ посвящено очень мало работ. Например, в [15] исследуется изменение ТЗ при ограничении ОВ секторными диафрагмами.

В данной работе предпринята попытка рассчитать ТЗ для ОВ с двумя видами геометрических искажений – смещение и растяжение. Показано, что ТЗ оптического вихря сохраняется при обоих этих искажениях.

2. Топологический заряд смещённого оптического вихря

Рассмотрим, как изменяется ТЗ при смещении центра ОВ с оптической оси пучка с радиально-симметричной амплитудой $A(r)$. Пусть ОВ смещается на произвольный вектор (r_0, φ_0) (в полярных координатах). Тогда его комплексная амплитуда $E_n(r, \varphi)$ запишется в виде:

$$E_n(r, \varphi) = (re^{i\varphi} - r_0e^{i\varphi_0})^n A(r), \quad (1)$$

где (r, φ) – полярные координаты.

Определение ТЗ оптического вихря (и любого парааксиального светового поля) дано в работе М. Берри [14]. Для произвольного светового поля с комплексной амплитудой $E(r, \varphi)$, где (r, φ) – полярные координаты ТЗ, равен:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (2)$$

Подставим (1) в (2) и получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inre^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inre^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}} = n. \quad (3)$$

Последнее равенство в (3) получается из-за того, что для больших радиусов ($r \gg r_0$) в знаменателе остаётся только первое слагаемое. Из (3) следует, что смещение центра ОВ с оптической оси пучка с радиально-симметрично амплитудой (например, гауссова пучка) не изменяет ТЗ. Хотя нормированный на мощность ОУМ пучка со смещённым центром фазовой сингулярности меньше, чем ТЗ всего пучка и убывает с увеличением величины смещения r_0 [16, 17].

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы гауссова пучка с внеосевым оптическим вихрем в начальной плоскости и после распространения в пространстве для разной величины смещения. Комплексная амплитуда в начальной плоскости равна

$$E_n(x, y) = \left[(re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}) / w \right]^n \exp[-(x^2 + y^2) / w^2], \quad (4)$$

где w – радиус перетяжки гауссова пучка, n и (r_0, φ_0) – соответственно топологический заряд оптического вихря и вектор (в полярных координатах) его смещения с оптической оси.

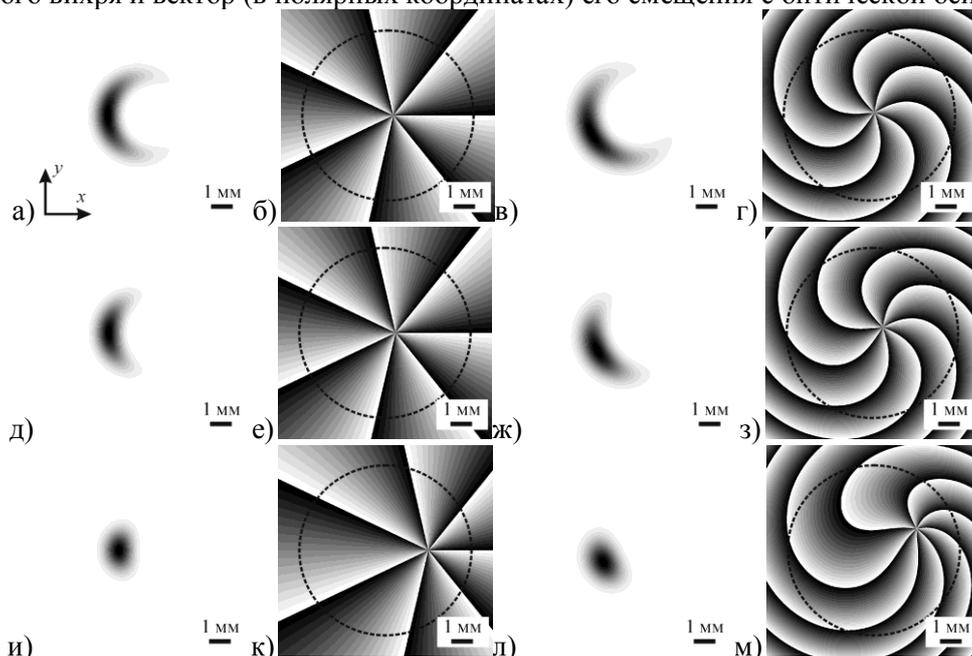


Рисунок 1. Распределения интенсивности (а,в,д,ж,и,л) (негатив) и фазы (б,г,е,з,к,м) гауссова пучка с внеосевым оптическим вихрем в начальной плоскости (а,б,д,е,и,к) и после распространения в пространстве (в,г,ж,з,л,м) для разного поперечного смещения вихря от оптической оси. Параметры расчёта: радиус перетяжки $w = 1$ мм, топологический заряд $n = 7$, смещение $r_0 = w/4$ (а-г), $r_0 = w/2$ (д-з), $r_0 = 2w_0$ (и-м); $r_0 = 0$ на всех рисунках, расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ (z_0 – расстояние Рэлея). Пунктирные кольца на распределениях фазы обозначают радиус кольца, по которому рассчитывался топологический заряд по формуле (2).

Комплексная амплитуда после распространения в пространстве рассчитана с помощью численного преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки с помощью быстрого

преобразования Фурье. Использовались следующие параметры расчёта: $w=1$ мм, $n=7$, $\varphi_0=0$, $r_0=w_0/4$ (рис. 1а-з), $r_0=w_0/2$ (рис. 1д-з), $r_0=2w_0$ (рис. 1и-м), расстояние распространения в пространстве $z=z_0/2$ ($z_0 = kw^2/2$ – расстояние Рэлея), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R=5$ мм). Топологический заряд в начальной плоскости, рассчитанный численно по формуле (2) (по кольцу радиуса $0,8R$), равен 6,9997 при $r_0=w_0/4$ и $r_0=w_0/2$, 6,9995 при $r_0=2w_0$, то есть во всех случаях примерно 7. На расстоянии ТЗ оказался равен соответственно 6,9989, 6,9989 и 6,9986, то есть $TC=7$.

3. Топологический заряд гауссова пучка с эллиптическим вихрем

Рассмотрим простой пример фазового искажения оптического вихря – придание вихрю эллиптической формы. Если обычный простой оптический вихрь имеет комплексную амплитуду в начальной плоскости вида

$$E(r, \varphi) = A(r) \exp(in\varphi), \quad (5)$$

то комплексная амплитуда эллиптического вихря, внедрённого, например, в гауссов пучок (или любой другой пучок с радиальной симметрией) будет иметь вид:

$$E_e(x, y) = A(\sqrt{x^2 + y^2})(x + i\alpha y)^n = A(\sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + \alpha^2 y^2)^{n/2} \exp\left[in \arctan\left(\frac{\alpha y}{x}\right)\right]. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2) получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E_e(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (n \arctan(\alpha \tan \varphi)) = \left(\frac{n\alpha}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi} = n. \quad (7)$$

Заметим, что результат, аналогичный (7), но только для $n=1$, ранее был получен в [18].

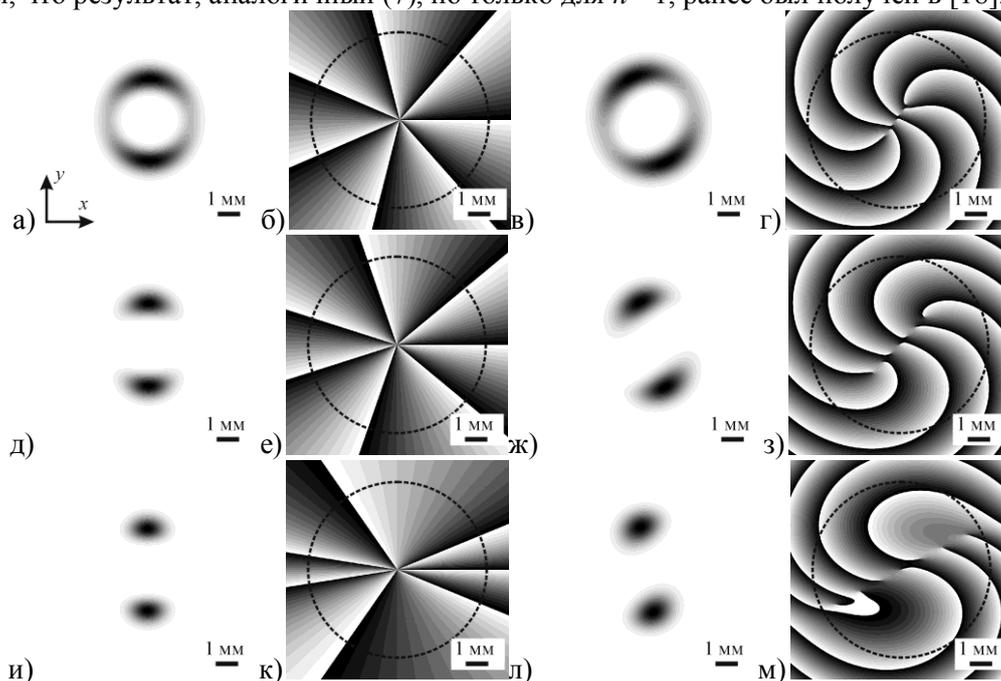


Рисунок 2. Распределения интенсивности (а,в,д,ж,и,л) и фазы (б,г,е,з,к,м) гауссова пучка с эллиптическим вихрем в начальной плоскости (а,б,д,е,и,к) и после распространения в пространстве (в,г,ж,з,л,м) для разной эллиптичности. Параметры расчёта: радиус перетяжки гауссова пучка $w=1$ мм, топологический заряд оптического вихря $n=7$, эллиптичность вихря $r=1,1$ (а-г), $r=1,5$ (д-з), $r=3$ (и-м), расстояние распространения в пространстве $z=z_0/2$ (z_0 – расстояние Рэлея). Пунктирные кольца на распределениях фазы обозначают радиус кольца, по которому рассчитывался топологический заряд по формуле (2).

Из (7) следует, что эллиптичность оптического вихря (или эллиптичность спиральной фазовой пластинки) не изменяет ТЗ исходного простого оптического вихря (5). У

эллиптического вихря при любой степени эллиптичности (при любом α) ТЗ равен n . При этом нормированный ОУМ эллиптического вихря всегда меньше n и равен:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{n P_{n-1}(y)}{P_n(y)} < n, \quad (8)$$

где $y = (1 + \alpha^2)/(2\alpha) > 1$ и $P_n(y)$ – многочлен Лежандра.

На рис. 2 показаны распределения интенсивности и фазы гауссова пучка с эллиптическим вихрем в начальной плоскости и после распространения в пространстве для разной эллиптичности. Комплексная амплитуда в начальной плоскости равна

$$E_e(x, y) = \exp\left[-(x^2 + y^2)/w^2\right](x + i\alpha y)^n, \quad (9)$$

где w – радиус перетяжки гауссова пучка, n и α – соответственно топологический заряд и эллиптичность оптического вихря. Комплексная амплитуда после распространения в пространстве рассчитана с помощью численного преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки с помощью быстрого преобразования Фурье. Использовались следующие параметры расчёта: $w=1$ мм, $n=7$, $\alpha=1,1$ (рис. 4а-з), $\alpha=1,5$ (рис. 4д-з), $\alpha=3$ (рис. 4и,м), расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ (z_0 – расстояние Рэлея), расчётная область – $R \leq x, y \leq R$ ($R = 5$ мм). Топологический заряд в начальной плоскости, рассчитанный численно по формуле (2) (по кольцу радиуса $0,8R$), равен 6,9997 при $\alpha=1,1$, 6,9996 при $\alpha=1,5$, 6,9987 при $\alpha=3$, то есть во всех случаях примерно 7. На расстоянии ТЗ оказался равен соответственно 6,9989, 6,9988 и 6,9979, то есть $TC = 7$.

4. Заключение

Теоретически, с помощью вычисления интеграла по окружности бесконечного радиуса, показано, что целочисленный топологический заряд оптического вихря сохраняется при его смещении с оси любого несущего осе-симметричного пучка. Также показано, что и растяжение оптического вихря не меняет топологический заряд. Таким образом, топологический заряд является инвариантом по отношению к геометрическим искажениям оптического вихря, в отличие от орбитального углового момента. Численное моделирование и эксперимент подтверждают теоретические предсказания.

5. Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-07-01129, в части «Топологический заряд смещённого оптического вихря» и грант 18-07-01380, в части «Топологический заряд гауссова пучка с эллиптическим вихрем»), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в частях «Введение» и «Заключение».

6. Литература

- [1] Allen, L. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, J. Woerdman // Phys Rev A. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185.
- [2] Volyar, A. Vortex avalanche in the perturbed singular beams / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // J Opt Soc Am A. – 2019. – Vol. 36(6). – P. 1064-1071.
- [3] Zhang, Y. Orbital angular momentum transformation of optical vortex with aluminium metasurfaces / Y. Zhang, X. Yang, J. Gao // Sci Rep. – 2019. – Vol. 9. – P. 9133.
- [4] Zhang, H. Grafted optical vortex with controllable orbital angular momentum distribution / H. Zhang, X. Li, H. Ma, M. Tang, H. Li, J. Tang, Y. Cai // Opt Express. – 2019. – Vol. 27(16). – P. 22930-22938.
- [5] Volyar, A.V. Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov //

- Computer Optics. – 2019. – Vol. 43(4). – P. 517-527. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.
- [6] Kotlyar, V.V. Orbital angular momentum of a laser beam behind an off-axis spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev, E.S. Kozlova // Opt Lett. – 2019. – Vol. 44(15). – P. 3673-3676.
- [7] Siegman, A.E. Lasers – University Science, 1986.
- [8] Durnin, J. Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Micely, J.H. Eberly // Phys Rev Lett. – 1987. – Vol. 58. – P. 1499-1501.
- [9] Gori, F. Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattary, C. Padovani // Opt. Commun. – 1987. – Vol. 64(6). – P. 491-495.
- [10] Kotlyar, V.V. Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Opt Lett. – 2007. – Vol. 32(7). – P. 742-744.
- [11] Bandres, M.A. Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Opt Lett. – 2008. – Vol. 33. – P. 177-179.
- [12] Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Opt Lett. – 2014. – Vol. 39(8). – P. 2395-2398.
- [13] Kovalev, A.A. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // Phys Rev A. – 2016. – Vol. 93. – P. 063858.
- [14] Berry, M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps // J Opt A: Pure Appl Opt. – 2004. – Vol. 6. – P. 259-268.
- [15] Volyar, A.V. Sectorial perturbation of vortex beams: Shannon entropy, orbital angular momentum and topological charge / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov, V.V. Milyukov // Computer Optics. – 2019. – Vol. 43(5). – P. 723-734. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-723-734.
- [16] Kotlyar, V.V. Asymmetric Gaussian optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Opt Lett. – 2017. – Vol. 42(1). – P. 139-142.
- [17] Kotlyar, V.V. Fractional orbital angular momentum of a Gaussian beam with an embedded off-axis optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev, E.G. Abramochkin // Computer Optics. – 2017. – Vol. 41(1). – P. 22-29. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-22-29.
- [18] Liang, G. Splitting and rotating of optical vortices due to non-circular symmetry in amplitude and phase distributions of the host beams / G. Liang, W. Cheng // Phys Lett A. – 2020. – Vol. 384. – P. 126046.

Topological charge of geometrically transformed optical vortices

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

²Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. It is shown both theoretically and numerically that the integer topological charge of an optical vortex does not change its value when the vortex shifts from the axis of an arbitrary axisymmetric carrier beam. It is also shown that the ellipticity of the optical vortex does not change its topological charge.