

# Трёхслойная дифракционная структура для пространственно-временного дифференцирования оптических сигналов

Н.В. Головастиков<sup>1,2</sup>, Д.А. Быков<sup>1,2</sup>, Е.А. Безус<sup>1,2</sup>, Л.Л. Досколович<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Предложен оптический дифференциатор на основе трёхслойной дифракционной структуры, состоящей из узкого плоского диэлектрического волновода, окружённого с двух сторон слоями-обкладками. Дифференцирование оптического сигнала осуществляется при отражении за счет резонанса, связанного с возбуждением моды, локализованной в центральном слое. Добротность резонанса (ширина резонансного минимума) увеличивается с ростом толщины слоёв-обкладок. Теоретически обоснована и численно подтверждена возможность применения рассматриваемой структуры для выполнения операций дифференцирования первого и второго порядка огибающей падающего импульса (временное дифференцирование), профиля падающего пучка (дифференцирование по пространственной координате), а также так называемого пространственно-временного дифференцирования оптического сигнала (дифференцирование по направлению в пространстве  $(x,t)$ ). Дифференцирование второго порядка выполняется системой из двух структур-дифференциаторов, расстояние между которыми выбирается в зависимости от угла падения оптического сигнала, его центральной частоты и фазы коэффициента пропускания на центральной частоте. Результаты численного моделирования методом фурье-мод демонстрируют высокую точность осуществляемого дифференцирования. Полученные результаты могут найти применение при разработке полностью оптических вычислительных устройств, более компактных и простых в изготовлении по сравнению с устройствами на основе метаповерхностей, представляющих собой массив нанорезонаторов.

## 1. Введение

Математическая операция дифференцирования функции является одной из наиболее распространенных в решении самых разнообразных задач науки и техники. В последние годы наблюдается новый всплеск интереса к разработке компактных структур фотоники для дифференцирования оптических сигналов, которые могут служить элементной базой для новых электронно-оптических устройств обработки информации [1, 2]. Для осуществления операций дифференцирования были предложены различные резонансные структуры, включая брэгговские решётки [3–6], дифракционные решётки [7, 8], плазмонные структуры на основе схемы Кречмана [9, 10], микро- и нанорезонаторы [2, 11, 12]. Использование резонансных структур для пространственного и временного дифференцирования возможно благодаря тому,

что профиль Фано, описывающий коэффициент отражения (пропускания) структуры в окрестности резонанса, может аппроксимировать передаточную функцию дифференцирующего фильтра [5, 8].

В настоящей работе впервые исследовано выполнение операции дифференцирования оптического сигнала с помощью простой трехслойной диэлектрической структуры, состоящей из центрального волноводного слоя и двух слоёв-обкладок из материала с меньшим показателем преломления (англ. – W-type waveguide) [13]. В случае, если показатель преломления материала над и под структурой превышает показатель преломления слоёв-обкладок, в такой структуре возможно возбуждение вытекающих мод, локализованных в центральном слое. Добротность резонансов контролируется за счет выбора толщин слоёв-обкладок. Ранее подобные структуры исследовались как волноводы [13], были исследованы эффекты усиления поля в W-структуре [14], было рассмотрено применение W-структуры для интегрирования оптического сигнала по пространственной переменной [15].

В данной работе теоретически обоснована и подтверждена результатами численного моделирования возможность применения W-структур для выполнения операций дифференцирования оптического сигнала при отражении по времени, по пространственной координате, а также для выполнения операции пространственно-временного дифференцирования (дифференцирование по направлению в пространстве  $(x,t)$ ). Авторы полагают, что дифференциаторы на основе резонансных структур значительно компактнее, чем фурье-корреляторы с градиентными линзами [1, 16, 17], поскольку не требуют дополнительных линз, выполняющих преобразование Фурье. Кроме того, резонансные структуры значительно проще в изготовлении, по сравнению с метаповерхностями, которые обычно представляют собой массив нанорезонаторов.

## 2. Преобразование оптического сигнала дифракционной структурой

В рамках линейной оптики преобразование профиля оптического пучка (или огибающей оптического импульса), происходящее при дифракции на дифракционной структуре, может быть описано в рамках теории линейных систем [5-8, 18, 19]. Передаточная функция (ПФ) системы определяется комплексным коэффициентом отражения (пропускания) дифракционной структуры, рассматриваемым как функция от тангенциальной компоненты волнового вектора  $k_x$  и частоты  $\omega$  падающей плоской волны.

Рассмотрим дифракцию монохроматического пучка на W-структуре, состоящей из трёх диэлектрических слоев. В системе координат падающего пучка  $(x_{inc}, z_{inc})$  (рисунок 1) пучок может быть представлен в виде суперпозиции плоских волн с различными значениями пространственной частоты  $k_{x,inc} = k_0 n_{sup} \sin \theta$ , где  $\theta$  — угол между направлением плоской волны и осью  $z_{inc}$ . Если пространственный спектр пучка  $G(k_{x,inc})$ ,  $|k_{x,inc}| \leq g$  является достаточно узким, так что  $g \ll k_0 n_{sup}$  и  $k_{z,inc} = \sqrt{k_0^2 n_{sup}^2 - k_{x,inc}^2} \approx k_0 n_{sup}$ , то пучок имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{inc}(x_{inc}, z_{inc}) &= \exp(-ik_0 n_{sup} z_{inc}) P_{inc}(x_{inc}) \\ &= \exp(-ik_0 n_{sup} z_{inc}) \int G(k_{x,inc}) \exp(ik_{x,inc} x_{inc}) dk_{x,inc}, \end{aligned} \quad (1)$$

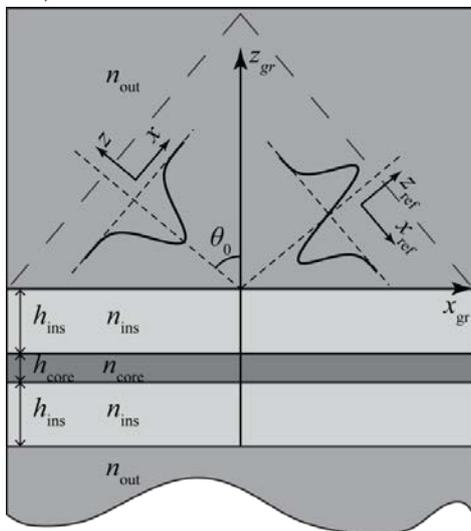
где  $P_{inc}(x_{inc})$  - поперечный профиль пучка. Функция  $u(x_{inc}, z_{inc})$  соответствует у-компоненте электрического или магнитного поля в зависимости от поляризации (ТЕ- или ТМ-, соответственно).

Профиль отраженного пучка в системе координат отраженного пучка  $(x_{refl}, z_{refl})$  (рисунок 1) имеет вид:

$$P_{refl}(x_{refl}) = \int G(k_{x,inc}) R(k_x) \exp(ik_{x,inc} x_{refl}) dk_{x,inc}, \quad (2)$$

где  $k_x = k_0 n_{sup} \sin(\theta + \theta_0) \approx k_{x,inc} \cos \theta_0 + k_{x,0}$ ,  $k_{x,0} = k_0 n_{sup} \sin \theta_0$ ,  $\theta_0$  – угол падения пучка. Таким образом, преобразование профиля пучка при отражении можно описывать как преобразования сигнала  $P_{inc}(x_{inc})$  линейной системой со следующей ПФ [5, 18]:

$$H_s^R(k_{x,inc}) = R(k_{x,inc} \cos \theta_0 + k_{x,0}). \tag{3}$$



**Рисунок 1.** Геометрия трёхслойной структуры и дифракция оптического пучка.

Аналогично можно показать, что при отражении импульса, соответствующего суперпозиции плоских волн с фиксированным направлением, но с различными частотами  $\omega = \omega_{inc} + \omega_0$ , где  $\omega_0$  - центральная частота, преобразование формы огибающей описывается линейной системой с ПФ в виде [7, 8]:

$$H_t^R(\omega_{inc}) = R(\omega_{inc} + \omega_0). \tag{4}$$

Из (3), (4) следует, что в общем случае, когда падающий пучок (импульс) представляется в виде суперпозиции плоских волн различных частот и направлений, пространственно-временное преобразование профиля огибающей падающего импульса  $P_{inc}(x_{inc}, t) \rightarrow P_{refl}(x_{refl}, t)$  описывается следующей ПФ [19]:

$$H_{st}^R(k_{x,inc}, \omega_{inc}) = R\left(k_{x,inc} \cos \theta_0 + \frac{\omega_{inc} + \omega_0}{c} n_{sup} \sin \theta_0, \omega_{inc} + \omega_0\right). \tag{5}$$

Отметим, что последнее уравнение сводится к уравнениям (3) и (4) при  $\omega_{inc} = 0$  и  $k_{x,inc} = 0$ , соответственно. Аналогичным образом преобразование формы профиля огибающей прошедшего импульса описывается ПФ:

$$H_{st}^T(k_{x,inc}, \omega_{inc}) = T\left(k_{x,inc} \cos \theta_0 + \frac{\omega_{inc} + \omega_0}{c} n_{sup} \sin \theta_0, \omega_{inc} + \omega_0\right). \tag{6}$$

### 3. Оптический дифференциатор

В работе исследуется структура, представляющая собой диэлектрический волновод с “W”-образным профилем показателя преломления [15] и состоящая из центрального волноводного слоя (показатель преломления  $n_{core}$ , толщина  $h_{core}$ ), двух слоёв-обкладок (показатель преломления  $n_{ins} < n_{core}$ , толщины  $h_{ins}$ ) (рисунок 1). Если показатель преломления среды над и под структурой  $n_{out} > n_{ins}$ , то в “W-структуре” возможны резонансы, связанные с возбуждением вытекающей волноводной моды, локализованной в центральном слое [15]. При достаточной большой толщине обкладок  $h_{ins}$  возбуждение моды будет происходить в окрестности значений

$\omega = \omega_0$ ,  $k_x = k_{x,0}$ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению плоскопараллельного волновода. Соответственно, при резонансных условиях коэффициент отражения будет обращаться в ноль при некоторых  $k_x$ ,  $\omega$ , находящихся в окрестности значений  $k_{x,0}$ ,  $\omega_0$ . Учитывая это, разложим ПФ (3)-(6) в ряд Тейлора в окрестности точки  $k_{x,inc} = 0$ ,  $\omega_{inc} = 0$  до линейных членов:

$$H_s^R(k_{x,inc}) \approx \alpha_R k_{x,inc}, H_t^R(\omega_{inc}) \approx \beta_R \omega_{inc}, H_{st}^R(k_{x,inc}, \omega_{inc}) = \alpha_R k_{x,inc} + \beta_R \omega_{inc}, \quad (7)$$

$$H_s^T(k_{x,inc}) \approx e^{i\varphi} + \alpha_T k_{x,inc}, H_t^T(\omega_{inc}) \approx e^{i\varphi} + \beta_T \omega_{inc}, H_{st}^T(k_{x,inc}, \omega_{inc}) = e^{i\varphi} + \alpha_T k_{x,inc} + \beta_T \omega_{inc}, \quad (8)$$

где  $\alpha_{R,T} = \frac{dH_s^{R,T}}{dk_{x,inc}}(0)$ ,  $\beta_{R,T} = \frac{dH_t^{R,T}}{d\omega_{inc}}(0)$ . Первые две ПФ в (7), (10) пропорциональны ПФ

дифференциатора по пространственной переменной  $H_{s,diff}(k_{x,inc}) = ik_{x,inc}$  и ПФ дифференциатора во времени  $H_{t,diff}(\omega_{inc}) = -i\omega_{inc}$ . Третья ПФ в (7), (8) соответствует линейной комбинации пространственной и временной ПФ и поэтому далее именуется передаточной функцией «пространственно-временного» дифференциатора. Отметим, что добротность резонанса (ширина резонансного минимума) для рассматриваемой структуры определяется толщиной  $h_{ins}$  слоёв-обкладок. За счёт выбора толщины  $h_{ins}$  можно получить требуемый интервал линейности для ПФ (3)–(5). Кроме того, воспользовавшись законом сохранения энергии, можно показать, что фазы коэффициентов  $\alpha_T, \alpha_R$ , а также  $\beta_T, \beta_R$  совпадают с точностью до  $\pi$ .

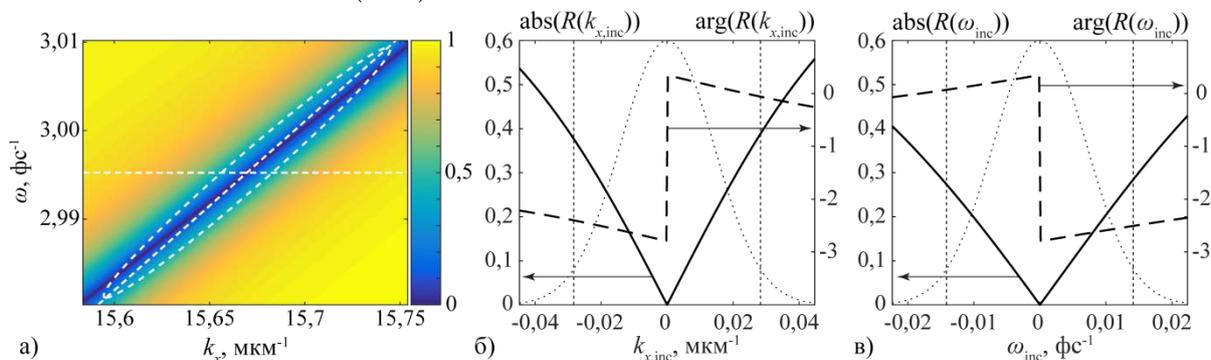
#### 4. Вычисления производной первого порядка

Исследуем возможность использования рассмотренной W-структуры (рисунок 1(а)) для выполнения операций дифференцирования. Для численного моделирования была выбрана структура из работы [14] со следующими параметрами:  $n_{core} = 2.2698$  (TiO<sub>2</sub>),  $n_{cl} = 1.457$  (SiO<sub>2</sub>),  $n_{sup} = 1.7786$  (SF11),  $h_{core} = 40$  нм,  $h_{cl} = 400$  нм. На рисунке 2(а) представлен спектр отражения W-структуры  $|R(k_x, \omega)|$ , рассчитанный методом фурье-мод [20]. Для подтверждения резонансной природы наблюдаемого минимума была рассчитана комплексная частота собственной моды планарной структуры  $\omega_p = 2.991 \cdot 10^{15} - 6.205 \cdot 10^{12}i$  с<sup>-1</sup> как полюс коэффициента отражения  $R(\omega)$  по методу, описанному в [21]. Полученное значение комплексной частоты  $\omega_p$  находится в окрестности частоты  $\omega = \omega_0 = 2.99 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>.

На рисунках 2(б), (в) показаны «пространственная» ПФ  $H_s(k_{x,inc})$  (3) и «временная» ПФ  $H_t(\omega_{inc})$  (4), соответствующая сечениям коэффициента отражения  $R(k_x, \omega)$  (5) (пунктирные линия на рис. 2(а)). ПФ на рис. 2(б)-(в) хорошо совпадают с ПФ идеальных дифференциаторов в окрестности точек  $k_{x,inc} = 0$  и  $\omega_{inc} = 0$ , соответственно.

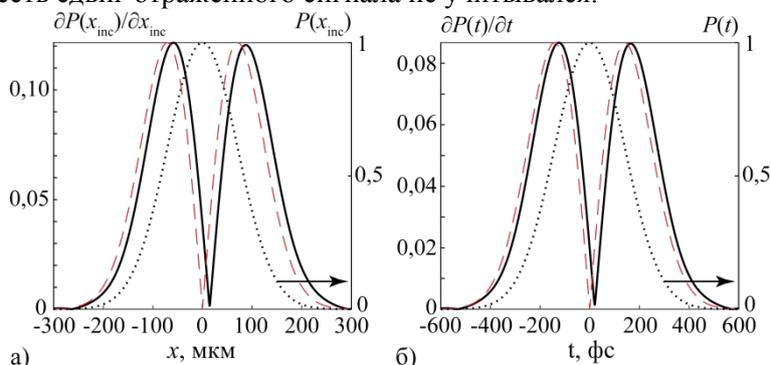
Результаты численного моделирования дифракции монохроматического пучка (рисунок 3(а)) и временного импульса (рисунок 3(б)) на рассмотренной W-структуре подтверждают возможность выполнения операций пространственного и временного дифференцирования. На рисунке 3 показаны профиль падающего монохроматического гауссова пучка  $P_{inc}(x_{inc}) = \exp(-x_{inc}^2/\sigma_x^2)$ ,  $\sigma_x = 100$  мкм (а) и огибающая падающего гауссова импульса  $P_{inc}(t) = \exp(-t^2/\sigma_t^2)$ ,  $\sigma_t = 200$  фс (б) (точечная линия, шкала справа), модуль профиля отражённого пучка (а) и импульса (б), рассчитанные методом фурье-мод для  $\omega_0 = 2.99 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup> и  $\theta_0 = 61.29^\circ$  (сплошная линия), также модуль аналитический вычисленной

производной гауссовой функции (пунктирная линия). Нормированные спектры пучка  $G(k_{x,inc}) \sim \exp(-k_{x,inc}^2 \sigma_x^2 / 4)$  и импульса  $G(\omega_{inc}) \sim \exp(-\sigma_t^2 \omega_{inc}^2 / 4)$  и их ширина по уровню  $1/e^2$  показаны пунктирными линиями на рисунке 2(б),(в). Из рисунка 2(б),(в) видно, что эти спектры лежат в интервале линейности ПФ  $H_s(k_{x,inc}), H_t^R(\omega_{inc})$ .



**Рисунок 2.** Спектр отражения W-структуры  $|R(k_x, \omega)|$  (а) и его сечения, соответствующие пространственной ПФ (б) и временной ПФ (в).

Отметим, что линейная фаза в ПФ описывает сдвиг отражённого пучка (эффект Гуса-Хэнкена) либо задержку импульса  $\tau = 16,5$  фс и не влияет на качество дифференцирования. Рисунки 3(а),(б) показывают высокое качество дифференцирования, СКО составляет 2,2% (а) и 1,4% (б). Отметим, что при расчёте СКО минимумы графиков на рисунках 3(а),(б) совмещались, то есть сдвиг отраженного сигнала не учитывался.



**Рисунок 3.** Модуль огибающей отражённого пучка (а) и отражённого импульса (б): вычисленные с использованием метода фурье-мод (сплошная линия); модуль производной первого порядка (штриховая линия); профиль падающего сигнала (пунктирная линия).

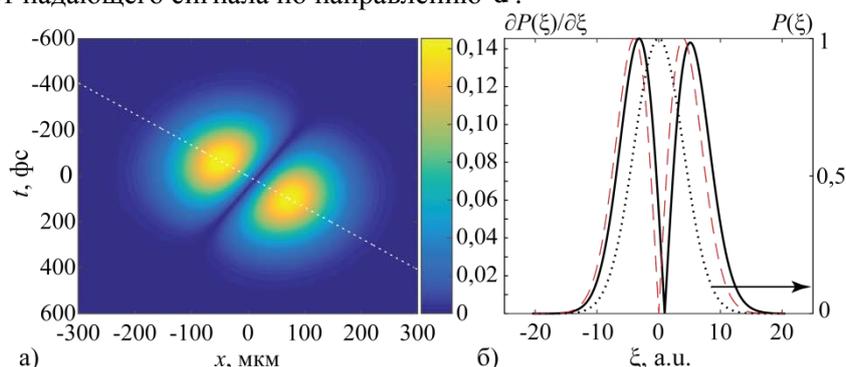
Рассмотрим дифракцию двумерного пространственно-временного импульса с гауссовым профилем  $E_{inc}(x_{inc}, t) = \exp(-x_{inc}^2 / \sigma_x^2 - t^2 / \sigma_t^2)$  с параметрами, совпадающими с параметрами сигналов из предыдущих примеров. Спектр сигнала  $G(k_{x,inc}, \omega_{inc}) \sim \exp(-k_{x,inc}^2 \sigma_x^2 / 4 - \sigma_t^2 \omega_{inc}^2 / 4)$  по уровню  $1/e^2$  отмечен на рисунке 2(а) пунктирным эллипсом. В соответствии с выражением для пространственно-временной ПФ  $H_{st,diff}^R(k_{x,inc}, \omega_{inc})$  (7), отражённый от структуры сигнал будет соответствовать линейной суперпозиции производных, взятых по переменным  $x_{refl}$  и  $t$ :

$$P_{refl}(x_{refl}, t) = -i \left( \alpha_R \frac{\partial E_{inc}(x_{refl}, t)}{\partial x_{refl}} - \beta_R \frac{\partial E_{inc}(x_{refl}, t)}{\partial t} \right) \tag{9}$$

$$= 2i (\alpha_R x_{refl} / \sigma_x^2 - \beta_R t / \sigma_t^2) \exp(-x_{refl}^2 / \sigma_x^2 - t^2 / \sigma_t^2),$$

где значения  $\alpha_R = 13.19 \cdot \exp(i\varphi - i\pi/2)$  мкм и  $\beta_R = 17.42 \cdot \exp(i\varphi + i\pi/2)$  фс рассчитаны численно как производные ПФ на рис. 2(б) и 2(в) при  $k_{x,inc} = 0$  и  $\omega_{inc} = 0$ , соответственно. Значение  $\varphi = 1.968$  соответствует фазе коэффициента пропускания в (8) при  $k_{x,inc} = 0$ ,  $\omega_{inc} = 0$ . Отметим, что фазы полученных значений  $\alpha_R$  и  $\beta_R$  совпадают с точностью до  $\pi$  (см. Приложение А). В рассматриваемом примере, выражение (9) соответствует производной по направлению  $\mathbf{d} = (d_x, d_t) = (\alpha_R, -\beta_R) \cdot \exp(-i\varphi + i\pi/2)$  в пространстве  $(x_{refl}, t)$ . В общем случае направление дифференцирования  $\mathbf{d}$  определяется дисперсией волноводной моды  $\omega_p = \omega_p(k_x)$ , которая, в свою очередь, зависит от геометрических и материальных параметров структуры.

На рисунке 4(а) показан рассчитанный модуль огибающей отражённого импульса, который хорошо совпадает с оценкой (9), СКО составляет 4.8%. На рисунке 4(б) показан профиль отражённого оптического сигнала вдоль прямой  $(x_{refl}, t) = (x_0 + d_x \xi, t_0 + d_t \xi)$  с направлением  $\mathbf{d}$ , где  $(x_0, t_0) = (12.75 \text{ мкм}, 16.5 \text{ фс})$  – центр отражённого сигнала. Этот профиль находится в хорошем соответствии со аналитически вычисленной производной по направлению  $D(\xi) = dE_{inc}(d_x \xi, d_t \xi) / d\xi$ , показанной штриховой линией. В рассмотренном примере,  $d_t / d_x = -\beta_R / \alpha_R = 1.32 \text{ фс/мкм}$ , что соответствует углу  $52.85^\circ$  между направлением  $\mathbf{d}$  и осью  $x_{refl}$ . СКО между кривыми на рисунке 4(б) составляет 3.7%. Таким образом, пространственно-временной профиль отражённого оптического сигнала в рассмотренном примере соответствует производной от падающего сигнала по направлению  $\mathbf{d}$ .



**Рисунок 4.** (а) Модуль пространственно-временной огибающей отражённого сигнала. (б) Сечение модуля пространственно-временной огибающей вдоль прямой, показанной на рис. (а) (сплошная чёрная линия) и модуль аналитически рассчитанной производной по направлению от падающего сигнала (красная штриховая линия). Сечение пространственно-временного профиля падающего сигнала (пунктирная чёрная линия).

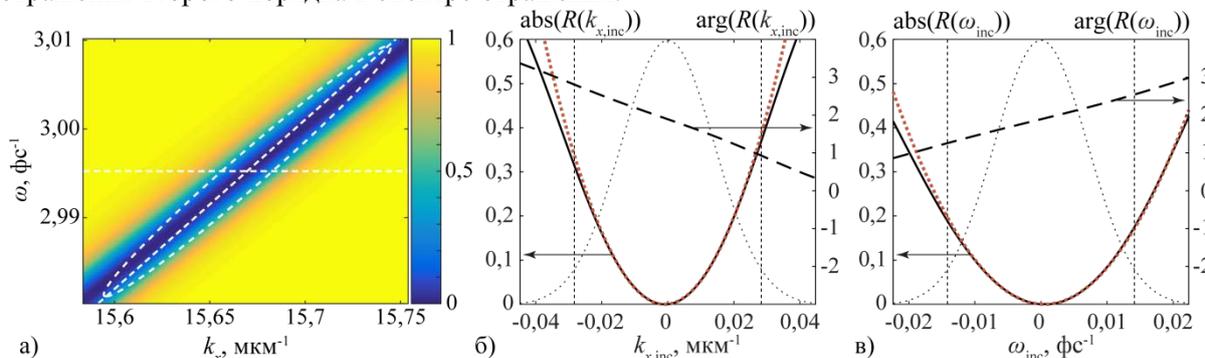
## 5. Вычисление производной второго порядка

В работе [4] на основе известных аналитических выражений для элементов матрицы пропускания было показано, что волоконная БРДС с малой вариацией коэффициента преломления может вычислять вторую производную от огибающей падающего импульса в отражении. В настоящей статье показано, что система из двух дифракционных структур любой геометрии, осуществляющих дифференцирование в отражении, может выполнять дифференцирование второго порядка. Это возможно благодаря тому, что в окрестности точки нулевого отражения  $\theta = \theta_0$ ,  $\omega = \omega_0$  коэффициент отражения составной системы (и соответствующая ему передаточная функция) имеет ноль второго порядка (см. Приложение А). Расстояние между дифференциаторами определяется выражением (А.5) (Приложение А) и зависит от угла падения  $\theta_0$ , центральной частоты  $\omega_0$  и фазы коэффициента пропускания на центральной частоте. Указанный получен с использованием формализма матрицы рассеяния. Из выражения (А.8) следует, что ПФ составной системы имеет вид:

$$H_{st,2}(k_{x,inc}, \omega_{inc}) = 2e^{i\varphi} e^{2ik_x l} \left( \left( \sqrt{\alpha_R \alpha_T} k_{x,inc} + \sqrt{\beta_R \beta_T} \omega_{inc} \right)^2 + o(\rho^2) \right), \tag{10}$$

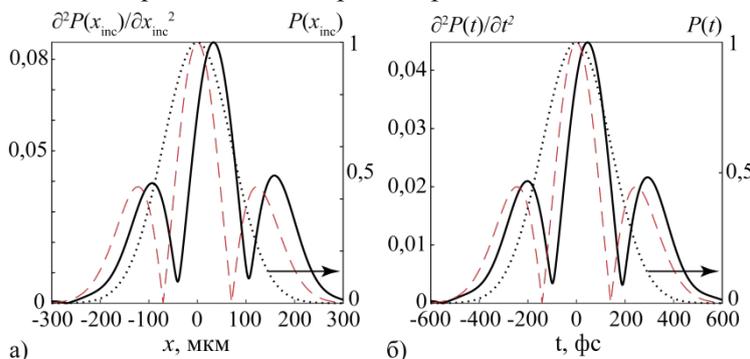
что соответствует двум последовательно взятым производным по направлению  $\mathbf{d} = (d_x, d_t) = (\sqrt{\alpha_R \alpha_T}, -\sqrt{\beta_R \beta_T}) \cdot \exp(i\varphi - i\pi/2)$  в пространстве  $(x_{refl}, t)$  или второй производной по тому же направлению.

Исследуем спектр структуры, состоящей из двух дифференцирующих многослойных структур, разделённых слоем из материала  $n_{out} = 1.7786$  (SF11) (материал над и под структурой), толщина которого  $l = 0.7$  мкм получена из уравнения (А.5). На рисунке 5(а) представлен модуль коэффициента отражения  $R(\omega, k_x)$  такой структуры, вычисленный с использованием метода фурье-мод. На рисунке 5(б)-(в) приведены его горизонтальное (б) и наклонное (в) сечения, соответствующие пространственной ПФ  $H_s(k_{x,inc})$  при  $\omega_0 = 2.995 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$  ( $\lambda_0 = 629 \text{ нм}$ ) и временной ПФ  $H_t(\omega_{inc})$  при  $k_{x,0} = 0.01567 \text{ нм}^{-1}$  ( $\theta_0 = 61.86^\circ$ ), соответственно. ПФ на рисунке 5(б)-(в) имеют квадратичный вид (точечная линия соответствует аппроксимации ПФ полиномом второй степени), что подтверждает наличие нуля отражения второго порядка в спектре отражения.



**Рисунок 5.** Спектр отражения многослойной структуры  $R(k_x, \omega)$  (а) и его сечения, соответствующие пространственной ПФ (б) и временной ПФ (в).

Численное моделирование подтверждает возможность вычисления второй производной по времени и пространству с использованием рассматриваемой структуры. Для моделирования были выбраны оптические сигналы с параметрами, использованными в пункте 4. На рисунке 6(а), (б) показаны профили отражённого пучка и отражённого импульса. СКО от аналитически вычисленной второй производной составило 5.8% и 3.9%.



**Рисунок 6.** Модуль огибающей отражённого пучка (а) и отражённого импульса (б): вычисленные и с использованием метода фурье-мод (сплошная линия); модуль производной второго порядка (штриховая линия); профиль падающего сигнала (пунктирная линия).

## 6. Заключение

В представленной работе был предложен оптический дифференциатор на основе многослойной резонансной структуры, работающий в отражении. Операция дифференцирования связана с резонансным возбуждением собственной моды структуры, локализованной в центральном слое. Результаты строгого электромагнитного моделирования демонстрируют возможность высококачественного временного, пространственного и пространственно-временного оптического дифференцирования первого и второго порядков. Полученные результаты могут найти применение при разработке полностью оптических вычислительных устройств.

## 7. Приложение А

Матрица рассеяния  $\mathbf{S}$  связывает вектора комплексных амплитуд волн, падающих на дифракционную структуру,  $\mathbf{I}_1$  и  $\mathbf{I}_2$  и вектора комплексных амплитуд рассеянных волн  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (.11)$$

В рассматриваемом случае многослойной симметричной структуры:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} T & R \\ R & T \end{pmatrix}, \quad (.12)$$

где  $R$  и  $T$  – комплексные коэффициенты отражения и пропускания. Следуя [22, 23], матрица рассеяния системы  $\tilde{\mathbf{S}}$ , состоящей из двух одинаковых структур, разделённых слоем диэлектрика толщины  $l$ , может быть получена в виде:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \otimes \mathbf{L} \otimes \mathbf{S}, \quad (.13)$$

где  $\mathbf{L} = \exp\{ik_z l\} \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}$  – единичная матрица,  $\otimes$  – ассоциативная операция, определённая в [23].

Итоговая матрица  $\tilde{\mathbf{S}}$  составной системы имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \frac{e^{ik_z l} T^2}{1 - e^{2ik_z l} R^2} & R \frac{1 + e^{2ik_z l} (T^2 - R^2)}{1 - e^{2ik_z l} R^2} \\ R \frac{1 + e^{2ik_z l} (T^2 - R^2)}{1 - e^{2ik_z l} R^2} & \frac{e^{ik_z l} T^2}{1 - e^{2ik_z l} R^2} \end{pmatrix} \quad (.14)$$

Подставляя разложения (7)-(8) в (А.4), получим коэффициент отражения исследуемой системы из двух дифференцирующих структур. Можно показать, что при  $l$ , удовлетворяющем условию  $1 + \exp(2ik_z l + 2i\varphi) = 0$ :

$$l = \frac{\pi/2 + \pi m - \varphi}{(\omega_0/c)n \cos \theta_0}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (.15)$$

коэффициент отражения составной структуры имеет ноль второго порядка:

$$\tilde{R} = 2e^{i\varphi} e^{2ik_z l} \left( \alpha_R \alpha_T \frac{(k_x - k_{x,0})^2}{\cos^2 \theta_0} + (\beta_R \alpha_T + \beta_T \alpha_R) (\omega - \omega_0) \frac{(k_x - k_{x,0})}{\cos \theta_0} + \beta_R \beta_T (\omega - \omega_0)^2 + o(\rho^2) \right). \quad (.16)$$

Соответствующая ПФ составной системы в соответствии с (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} H_{st,2}(k_{x,\text{inc}}, \omega_{\text{inc}}) &= \tilde{R} \left( k_{x,\text{inc}} \cos \theta_0 + \frac{\omega_{\text{inc}} + \omega_0}{c} n_{\text{sup}} \sin \theta_0, \omega_{\text{inc}} + \omega_0 \right) = \\ &= 2e^{i\varphi} e^{2ik_z l} \left( \alpha_R \alpha_T k_{x,\text{inc}}^2 + (\beta_R \alpha_T + \beta_T \alpha_R) \omega_{\text{inc}} k_{x,\text{inc}} + \beta_R \beta_T \omega_{\text{inc}}^2 + o(\rho^2) \right). \end{aligned} \quad (.17)$$

Или, как можно показать:

$$H_{st,2}(k_{x,\text{inc}}, \omega_{\text{inc}}) = 2e^{i\varphi} e^{2ik_z l} \left( \left( \sqrt{\alpha_R \alpha_T} k_{x,\text{inc}} + \sqrt{\beta_R \beta_T} \omega_{\text{inc}} \right)^2 + o(\rho^2) \right). \quad (.18)$$

## 8. Благодарности

Работа выполнена за счёт гранта РФФИ 14-19-00796.

## 9. Литература

- [1] Silva, A. Performing mathematical operations with metamaterials / A. Silva, F. Monticone, G. Castaldi, V. Galdi, A. Alù, N. Engheta // *Science*. – 2014. – Vol. 343. – P. 160-163.
- [2] Liu, W. A fully reconfigurable photonic integrated signal processor / W. Liu, M. Li, R. S. Guzzon, E. J. Norberg, J. S. Parker, M. Lu, L. A. Coldren, J. Yao // *Nat. Photonics*. – 2016. – Vol. 10(3). – P. 190-195.
- [3] Berger, N.K. Temporal differentiation of optical signals using a phase-shifted fiber Bragg grating / N.K. Berger, B. Levit, B. Fischer, M. Kulishov, D.V. Plant, J. Azaña // *Opt. Express*. – 2007. – Vol. 15(2). – P. 371-381.
- [4] Kulishov, M. Design of high-order all-optical temporal differentiators based on multiple-phase-shifted fiber Bragg gratings / M. Kulishov, J. Azaña // *Opt. Express*. – 2007. – Vol. 15(10). – P. 6152-6166.
- [5] Doskolovich, L.L. Spatial differentiation of optical beams using phase-shifted Bragg grating / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, E.A. Bezus, and V. A. Soifer // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39(5). – P. 1278-1281.
- [6] Bykov, D.A. Optical computation of the Laplace operator using phase-shifted Bragg grating / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich, E.A. Bezus, V.A. Soifer // *Opt. Express*. – 2014. – Vol. 22(21). – P. 25084-25092.
- [7] Bykov, D.A. Temporal differentiation of optical signals using resonant gratings / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich, V.A. Soifer // *Opt. Lett.* – 2011. – 36. – Vol. 3509-3511.
- [8] Bykov, D.A. Time-domain differentiation of optical pulses in reflection and in transmission using the same resonant grating / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich, N.V. Golovastikov, V.A. Soifer // *J. Opt.* – 2013. – Vol. 15. – P. 105703.
- [9] Ruan, Z. Spatial mode control of surface plasmon polariton excitation with gain medium: from spatial differentiator to integrator / Z. Ruan // *Opt. Lett.* – 2015. – Vol. 40(4). – P. 601-604.
- [10] Zhu, T. Plasmonic computing and of spatial differentiation / T. Zhu, Y. Zhou, Y. Lou, H. Ye, M. Qiu, Z. Ruan, S. Fan // *Nat. Commun.* – 2017. – Vol. 8. – P. 15391.
- [11] Yang, T. All-optical differential equation solver with constant-coefficient tunable based on a single microring resonator / T. Yang, J. Dong, L. Lu, L. Zhou, A. Zheng, X. Zhang, J. Chen // *Sci. Rep.* – 2014. – Vol. 4. – P. 5581.
- [12] Kazanskiy, N.L. Use of photonic crystal cavities for temporal differentiation of optical signals / N.L. Kazanskiy, P.G. Serafimovich, S.N. Khonina // *Opt. Lett.* – 2013. – Vol. 38(7). – P. 1149-1151.
- [13] Hu, J. Understanding leaky modes: slab waveguide revisited / J. Hu, C.R. Menyuk // *Adv. Opt. Photonics*. – 2009. – Vol. 1(1). – P. 58-106.
- [14] Sainidou, R. Extraordinary All-Dielectric Light Enhancement over Large Volumes / R. Sainidou, J. Renger, T.V. Teperik, M.U. González, R. Quidant, F.J.G. de Abajo // *Nano Letters*. – 2010. – Vol. 10(11). – P. 4450-4455.
- [15] Zangeneh-Nejad, F. Spatial integration by a dielectric slab and its planar graphene-based counterpart / F. Zangeneh-Nejad, A. Khavasi // *Opt. Lett.* – 2017. – Vol. 42. – P. 1954-1957.
- [16] Pors, A. Analog computing using reflective plasmonic metasurfaces / A. Pors, M.G. Nielsen, S.I. Bozhevolnyi // *Nano Lett.* – 2015. – Vol. 15. – P. 791-797.
- [17] Chizari, A. Analog optical computing based on a dielectric meta-reflect array / A. Chizari, S. Abdollahramezani, M. V. Jamali, J.A. Salehi // *Opt. Lett.* – 2016. – Vol. 41. – P. 3451-3454.
- [18] Golovastikov, N.V. Resonant diffraction gratings for spatial differentiation of optical beams / N.V. Golovastikov, D.A. Bykov, L.L. Doskolovich // *Quantum Electronics*. – 2014. – Vol. 44(10). – P. 984-988.
- [19] Golovastikov, N.V. Spatiotemporal pulse shaping using resonant diffraction gratings / N.V. Golovastikov, D.A. Bykov, L.L. Doskolovich // *Opt. Lett.* – 2015. – Vol. 40. – P. 3492-3495.
- [20] Moharam M.G. Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach / M.G. Moharam, D.A. Pommet, E.B. Grann, T.K. Gaylord // *JOSA A*. – 1995. – Vol. 12(5). – P. 1077-1086.
- [21] Bykov, D.A. On the use of the Fourier modal method for calculation of localized eigenmodes of integrated optical resonators / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich // *Computer Optics*. – 2015. – Vol. 39. – P. 663-673.

# Three-layer diffraction structure for spatiotemporal differentiation of optical signals

N.V. Golovastikov<sup>1,2</sup>, D.A. Bykov<sup>1,2</sup>, E.A. Bezus<sup>1,2</sup>, L.L. Doskolovich<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

<sup>2</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** We propose an optical differentiator based on a three-layer structure composed of a parallel-plate dielectric wa-veguide surrounded by two identical cladding layers. The incident optical pulse is differentiated in reflection due to a resonance caused by excitation of a waveguide mode localized in the central (core) layer. The resonance quality factor (width of the resonance minimum) increases with the width of the cladding layers. We theoretically justify and numerically confirm that this structure can perform temporal differentiation (differentiation of an incident optical pulse envelope), spatial differentiation (differentiation of an optical beam profile) and the so-called "spatiotemporal differentiation" (differentiation of an optical signal envelope along a certain direction in the (x,t)-plane). Second order differentiation can be performed with a system of two differentiator elements separated with a homogenous layer the optical thickness of which is defined by the optical signal's angle of incidence, central frequency and the corresponding transmission coefficient phase. Simulation results obtained with RCWA confirm high accuracy of the performed operations. The proposed differentiator is more compact and easier to fabricate than metasurface-based devices incorporating periodically arranged nanoresonators and may find application in ultrafast analogue computing and signal processing systems.

**Keywords:** waveguide resonance, optical differentiation, optical signal processing.