Устойчивость измерительных векторов, обеспечивающих восстановление сигнала без фаз

Д.А. Рогач[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В решении дискретной фазовой проблемы важное значение имеет устойчивость измерительных векторов, обеспечивающих восстановление сигнала без фаз. Доказана устойчивость измерительных векторов относительно некоторых преобразований.

1.Введение

В последнее время широко используются цифровые методы обработки информации. Это связано с тем, что цифровую информацию легче хранить, передавать и обрабатывать. Цифровая обработка предполагает два этапа: дискретизация аналогового сигнала и квантование по уровням. В результате каждый оцифрованный сигнал можно представить в виде вектора или числовой матрицы.

Пусть $\mathbb{H}^N$ - конечномерное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и ортонормированным базисом $\{u_n\}_{n=1}^N$. Каждый сигнал единственным образом представим суммой

$$x = \sum_{n=1}^N \langle x, u_n\rangle u_n,$$

где $\langle x, u_n\rangle$ - координаты вектора в выбранном базисе. При оцифровке сигнала$x \in \mathbb{H}$ производятся две операции - дискретизация и квантование.

Дискретизация - процесс преобразования непрерывного сигнала в дискретный. Физические приборы, которые применяются в процессе обработки сигналов, настроены на регистрацию положительных чисел, хотя теоретически возникают не только отрицательные числа, но и комплексные, что наглядно видно при построении спектра или дискретного преобразования Фурье сигнала. В связи с этим классической стала задача о восстановлении сигнала по модулям измерений. Для решения этой задачи важно подобрать такую систему "измерительных векторов" $F = \{f_1, \dots, f_M\}$, $N < M$, чтобы максимально точно восстановить сигнал x по "измерениям"$|\langle x, f_m\rangle|, m = 1, \dots, M$.

В своей работе мы введем понятие системы, которая позволяет по модулям измерений $|\{x, f_m\}|_{m=1}^M$восстановить сигнал, и покажем, относительно каких операций эта система устойчива.

2. Устойчивость системы векторов

В работе используются следующие понятия:

Определение 2.1.

$S: \mathbb{H}^N \to \mathbb{H}^N, S = V^*V,$ (1)

где V - оператор анализа

$V: x \in \mathbb{H}^N \to \{\langle x, f_m \rangle\}_{m=1}^M \in \mathbb{C}^M.$ (2)

V^* - оператор синтеза, сопряженный оператор к V, который удовлетворяет:

$V^*: \{z_m\}_{m=1}^M \in \mathbb{C}^M \to \sum_{m=1}^M z_m f_m \in \mathbb{H}^N.$ (3)

На $\mathbb{H}^N$ вводится отношение эквивалентности $\sim: x \sim y$тогда и только тогда, когда существует постоянная $z, |z| = 1$, такая что$y = zx$. Пусть$\widehat{\mathbb{H}} = \mathbb{H}^N/\sim$ - фактор-пространство. Таким образом, класс эквивалентности имеет вид $\hat{x} = \{\exp(i\varphi)\, x, \varphi \in [0,2\pi)\}$ (в вещественном случае $\hat{x} = \{\pm x\}$).

Рассмотрим следующее нелинейное отображение

$\beta: \widehat{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}^M, (\beta(\hat{x}))_m = |\langle x, f_m \rangle|^2, 1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{M},$ (4)

корректно определено на классах$\hat{x}$, поскольку из $x \sim y$ следует$|\langle x, f_m \rangle|^2 = |\langle y, f_m \rangle|^2$.

Определение 2.2. Будем говорить, фрейм $F = \{f_1, \dots, f_M\}$ восстанавливает без фаз (ВБФ-фрейм), если нелинейное отображениеβ инъективно.

Заметим, что любой сигнал $x \in \mathbb{H}^N$ однозначно (с точностью до множителя) определяется модулями фреймовых коэффициентов с точностью до фазового множителя тогда и только тогда, когдаFявляется ВБФ-фреймом.

Определение 2.3.Два фрейма $F = \{f_1, \dots, f_M\}$ и$G = \{g_1, \dots, g_M\} \subset \mathbb{H}$ называютсяэквивалентными, если существует обратимый оператор $T: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, такой что $g_k = Tf_k$ для всех$1 \leq k \leq M$.

Для определения, является ли система ВБФ, будем использовать свойство *альтернативной полноты*, так как данное свойство эквивалентно ВБФ в$\mathbb{R}^N$.

Определение 2.4. Набор векторов $F = \{f_m\}_{m=1}^M$в$\mathbb{R}^N(\mathbb{C}^N)$ альтернативно полон (АП), если для любого $P \subseteq \{1, \dots, M\}$либо$\{f_m\}_{m \in P}$, либо $\{f_m\}_{m \in P^c}$ полно в $\mathbb{R}^N(\mathbb{C}^N)$.

В решении практических задач на первый план выдвигаются проблемы устойчивости погрешности измерений и устойчивости измерительных векторов относительно свойства ВБФ. В даннойработе исследованы вопросы устойчивости второго типа.

Теорема 2.1.Если$F = \{f_1, \dots, f_M\}$- ВБФ-фрейм, то для любого обратимого оператора $T: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$и ненулевых скаляров $z_1, \dots, z_M \in K$, фрейм $G = \{g_1, \dots, g_M\}$, определенный равенствами $g_k = z_k T f_k$, $1 \leq k \leq M$, также является ВБФ-фреймом.

Доказательство: F- ВБФ-фрейм, $\beta(x)$представимо в виде последовательности чисел$\{\langle x, g_k \rangle^2\}_{k=1}^M$. Дано, что $\{\langle x, g_k \rangle^2\}_{k=1}^M = \{\langle y, g_k \rangle^2\}_{k=1}^M$. Распишем более подробно $\{\langle x, g_k \rangle^2\}_{k=1}^M$.

$\langle x, g_k \rangle^2 = \langle x, z_k T f_k \rangle^2 = |z_k|^2 \langle x, T f_k \rangle^2 = |z_k|^2 \langle T^* x, f_k \rangle^2.$

Аналогично с $\{\langle y, g_k \rangle^2\}_{k=1}^M$.

$\langle y, g_k \rangle^2 = \langle y, z_k T f_k \rangle^2 = |z_k|^2 \langle y, T f_k \rangle^2 = |z_k|^2 \langle T^* y, f_k \rangle^2.$

Получаем, что

$|z_k|^2 \langle T^* x, f_k \rangle^2 = |z_k|^2 \langle T^* y, f_k \rangle^2.$

Сократим$|z_k|^2$, так как по условию $z_k \neq 0, 1 \leq k \leq M$. Получим, что $\beta_F(T^* x) = \beta_F(T^* y)$.

Выбранная нами система F- ВБФ, и$T^* x = T^* y$. Если операторT -обратим, то его сопряженный тоже обратим. Подействовав обратным оператором, получим, $x = y$.

Теорема 2.2. Если $F = \{f_1, \dots, f_M\}$ - ВБФ-фрейм, то для любого обратимого оператора $T: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ фрейм $G = \{g_1, \dots, g_M\}$,, определенный равенствами $g_k = T f_k$, $1 \leq k \leq M$, также является ВБФ-фреймом.

Доказательство: Доказательство проводится аналогично предыдущему, так как данная теорема- частный случай Теоремы 2.1, скаляры $z_m = 1, m = 1, \dots, M$.

Замечание: Условие Теоремы 2.2 можно переписать, используя определение эквивалентности фрейма: Если $F \sim G$ и F - ВБФ, то и G - ВБФ.

Теорема 2.3.Если $F = \{f_1, \dots, f_M\}$ - ВБФ-фрейм, то фрейм $\tilde{F} = \{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_M\}$ ВБФ-фрейм, где $\tilde{f}_k = S^{-1} f_k, 1 \leq k \leq M$.

Доказательство: Так как S^{-1}- обратим, то утверждение теоремы вытекает из Теоремы 2.1.

Теорема 2.4. Если $F = \{f_1, \dots, f_M\}$ - ВБФ-фрейм, то фрейм Парсеваля $F^0 = \{f_1^0, \dots, f_M^0\}$,определенный равенствами$f_k^0 = S^{-1/2} f_k, 1 \le k \le M$-ВБФ-фрейм.

Теорема 2.5.Если $F = \{f_1, \dots, f_M\}$ - ВБФ-фрейм, то любой конечный набор векторов$\mathcal{G} \subset \mathbb{H}$, который является расширением ВБФ-фрейма $\mathcal{G} \subset F$- ВБФ-фрейм.

С другой стороны, удаление одного элемента из ВБФ-фрейма может привести к нарушению этого свойства. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.1. Рассмотрим систему F, состоящую из векторов в$\mathbb{R}^3$:

$$f_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

F- фрейм, так как первые три вектора f_1, f_2, f_3образуют ортонормированный базис, который полон в $\mathbb{R}^3$. Добавление еще трех векторов полноту разрушить не может.

Докажем, что выбранный фрейм ВБФ, используя свойство альтернативной полноты. То есть при произвольном разбиении либо$\{f_m\}_{m \in P}$, либо $\{f_m\}_{m \in P^c}$полна в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим несколько произвольных разбиений.

Пусть$P = \{1\}$. Для любого i система $F_1^1 = \{f_i\}$, состоящая из одного вектора, не может быть полной в $\mathbb{R}^3$. Оставшаяся часть фрейма F образует систему $F_2^1 = \{f_m\}_{m \in P^c}$. Её ранг равен трем. Значит, система полна в $\mathbb{R}^3$.

Теперь рассмотрим случай $P = \{i, j\}, i \ne j$. Система, состоящая из двух векторов, так же не может быть полной в $\mathbb{R}^3$. Будем рассматривать лишь $F_2^2 = \{f_m\}_{m \in P^c}$. Для любых i, j ранг F_2^2 равен трем, то есть система полна в $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим случаи разбиения на две системы с равным количеством векторов.

$$P = \{1,2,3\}: F_1^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, F_2^3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}, rank F_i^3 = 3, i = 1,2;$$

Аналогично рассмотрим другие P и получим, что при любом разбиении, хотя бы одна из систем будет полной. Значит, система векторов F – ВБФ.

Теперь рассмотрим подмножество $\boldsymbol{\mathcal{G}^1}$, образованное из пяти векторов F удалением первого вектора.

$$f_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Данная система является фреймом, но не выполняется свойство альтернативной полноты, так как, если мы разобьем нашу систему на два подмножества $G_1 = \{f_2, f_3, f_6\} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ и $G_2 = \{f_4, f_5\} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, то не одно из них не полно в $\mathbb{R}^3$.

Подобную ситуацию мы можем поучить и в других системах$\boldsymbol{\mathcal{G}^i}$, которые образованы из$F$ удалением вектора$\boldsymbol{f_i}$.

Таким образом, мы построили ВБФ-фреймF из 6 векторов в$\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, так что любое подмножество из 5 векторов не является ВБФ-фреймом.

3. Литература

[1] Casazza, P.G. Custom building finite frames / P.G. Casazza// Contemporary Math. – 2004. – Vol. 345. – P. 61-86.

[2] Bandeira, A.S. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval / A.S. Bandeira, J. Cahill, D.G. Mixon, A.A. Nelson // Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). – 2014. – Vol. 37(1). – P. 106-125.

[3] Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин.– М.: Наука, 2012. – 576 с.

[4] Новиков, С.Я. Фреймы конечномерных пространств / С.Я.Новиков, М.А. Лихобабенко. – УОП СамГУ, 2013. – С.5-24.

[5] Balan, R. On signal reconstruction without phase / R. Balan, P. Casazza, D. Edidin // Appl. Comput. Harmon. Anal. – 2006. – Vol. 20 – P. 345-356.
[6] Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – Москва: Издательство «Наука», 1964. – С. 194-199.

Stability of measurable vectors for phaseless reconstruction

D.A.Rogach[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. Stability of measurable vectors for phaseless reconstruction is very important for applications. Stability of systems relatively to some transformations is proved in the paper.

Keywords: space, signal, systems of vectors, frame, operator, phase retrieval.